ARKIV FÖR MATEMATIK Band 1 nr 1

Mitgeteilt am 26. Mai 1948 durch T. CARLEMAN und ARNE BEURLING

# Über die Existenz der beschränkten automorphen Funktionen

Von LEO USKILA

Mit 1 Figur im Text

1. In der klassischen Uniformisierungstheorie werden die einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen nach ihrer konformen Abbildbarkeit in drei Typen eingeteilt. Die Fläche ist vom elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Typus, je nachdem sie eineindeutig und konform auf die Vollebene, die punktierte Ebene oder den Einheitskreis abgebildet werden kann. Ein zentrales Problem der modernen Funktionentheorie ist es dann, notwendige und hinreichende Bedingungen für jeden der obigen Fälle aufzustellen.

Die Riemannschen Flächen können auch nach anderen Prinzipien klassifiziert werden. Eine Riemannsche Fläche wird *nullberandet* genannt, wenn es keine Greenschen Funktionen der Fläche gibt. Wenn eine Greensche Funktion oder, was auf dasselbe herauskommt, eine eindeutige und beschränkte nichtkonstante harmonische Funktion auf der Fläche existiert, sagt man, dass die Fläche einen *positiven Rand* hat. Nach NEVANLINNA [2] ist eine Riemannsche Fläche nullberandet oder hat einen positiven Rand, je nachdem das harmonische Mass ihres Randes Null oder positiv ist. In Analogie mit der nachstehenden Ausdrucksweise können wir auch sagen, dass die Fläche vom *Nulltypus* oder *positiven Typus* in bezug auf die *beschränkten harmonischen* Funktionen ist, je nachdem sie einen Nullrand oder einen positiven Rand besitzt.

Im Falle einer endlich vielblättrigen Riemannschen Fläche $F$ ist es durch den Kapazitätsbegriff sogleich möglich, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufzustellen, dass die Fläche einen positiven Rand hat (MYRBERG [2]). Wenn $m$ die Menge der Häufungspunkte der Projektionen der Verzweigungspunkte der Fläche auf der Grundebene ist, so hat $F$ einen positiven Rand dann und nur dann, wenn die Kapazität von $m$ positiv ist.

Jeder Riemannschen Fläche vom hyperbolischen Typus entspricht bekanntlich (z. B. WEYL [1]) eine wesentlich diskontinuierliche Gruppe $G$ linearer Substitutionen, die das Innere des Einheitskreises in sich überführen (»Hauptkreisgruppe»). Die Gruppe $G$ enthält keine elliptischen Substitutionen und ist bis auf eine lineare Transformation, die den Einheitskreis auf sich abbildet, eindeutig bestimmt. Umgekehrt gehört auch zu jeder wesentlich diskontinuierlichen Gruppe linearer Substitutionen, die das Innere des Einheitskreises in sich überführen, eine bestimmte Klasse von Riemannschen Flächen, die aufeinander konform abbildbar sind, vorausgesetzt, dass diese Gruppe keine elliptischen Substitutionen enthält. Zwei hyperbolische

Riemannsche Flächen sind dann und nur dann konform äquivalent, d. h. können eineindeutig konform aufeinander abgebildet werden, wenn die entsprechenden Gruppen linearer Substitutionen durch eine lineare Transformation auseinander erhalten werden können.

Durch das Obige ist eine Dualität zwischen den hyperbolischen Riemannschen Flächen und den Hauptkreisgruppen ohne elliptische Substitutionen aufgedeckt worden. Jedem Satze über analytische Funktionen auf hyperbolischen Riemannschen Flächen entspricht ein analoger Satz über automorphe Funktionen und umgekehrt. So ist nach MYRBERG [1] eine hyperbolische Riemannsche Fläche vom Nulltypus oder vom positiven Typus in bezug auf die beschränkten harmonischen Funktionen, je nachdem die Summe

$$\Sigma\,(1-|S_k(z)|), \tag{1}$$

worin $S_k$ die Substitutionen der entsprechenden Hauptkreisgruppe durchläuft, divergent oder konvergent ist.

2. In dieser Arbeit wollen wir eine neue Typeneinteilung der Riemannschen Flächen einführen. Eine Riemannsche Fläche ist vom *positiven* Typus in bezug auf die *beschränkten analytischen* Funktionen, wenn eine eindeutige und beschränkte nichtkonstante analytische Funktion auf der Fläche existiert und vom *Nulltypus* in bezug auf die genannten Funktionen, wenn sich jede eindeutige und beschränkte analytische Funktion auf der Fläche auf eine Konstante reduziert. Die elliptischen und parabolischen Riemannschen Flächen sind nach den Sätzen von LIOUVILLE und PICARD immer vom Nulltypus. Die hyperbolischen Riemannschen Flächen aber werden dadurch in zwei Typen eingeteilt. Wir wollen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Auftreten dieser beiden Typen finden.

Jeder analytischen Funktion auf einer hyperbolischen Riemannschen Fläche entspricht vermittels der konformen Abbildung eine automorphe Funktion der entsprechenden Hauptkreisgruppe. Die oben eingeführte Typeneinteilung der Riemannschen Flächen hat also eine Typeneinteilung der entsprechenden Hauptkreisgruppen zur Folge. Eine Hauptkreisgruppe ohne elliptische Substitutionen ist vom *positiven* Typus in bezug auf die *beschränkten automorphen* Funktionen, wenn eine eindeutige und beschränkte nichtkonstante automorphe Funktion der Gruppe existiert und vom *Nulltypus* in bezug auf die genannten Funktionen, wenn sich jede eindeutige und beschränkte automorphe Funktion der Gruppe auf eine Konstante reduziert.

Nach der obengenannten Dualität sind diese beiden Einteilungen äquivalent. Um unser Typenproblem zu lösen, können wir entweder die Einteilung der hyperbolischen Riemannschen Flächen in Flächen vom positiven Typus und vom Nulltypus in bezug auf die beschränkten analytischen Funktionen oder die Einteilung der Hauptkreisgruppen ohne elliptische Substitutionen in Gruppen vom positiven Typus und vom Nulltypus in bezug auf die beschränkten automorphen Funktionen vornehmen.

Wir wollen nun das oben formulierte Typenproblem der hyperbolischen Riemannschen Flächen auf die Untersuchung der entsprechenden Hauptkreisgruppen zurückführen und in der Form von geometrischen Eigenschaften des Fundamentalgebietes der Gruppe die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufstellen, dass eine gegebene Hauptkreisgruppe ohne elliptische Substitutionen vom positiven Typus in bezug auf die beschränkten automorphen Funktionen ist.

Das obige Problem, auf das ich durch Herrn Prof. Dr. A. BEURLING aufmerksam gemacht worden bin, wird in dieser Arbeit durch Anwendung einer Hilfsfunktion von DENJOY [1] in dem Falle vollständig gelöst, dass die Hauptkreisgruppe eine symmetrische Gruppe vom Geschlecht $p = 0$ ohne elliptische Substitutionen ist.

3. Es sei $B_0$ ein einfach zusammenhängender Teilbereich des Kreises $|z| < 1$, der von einer endlichen oder abzählbar unendlichen Anzahl offener punktfremder Orthogonalkreisbogen

(2) $$b_0, b_1, b_2, \ldots$$

des Kreises

(3) $$|z| = 1 \qquad :H$$

begrenzt wird.

Die den Seiten $b_n$ zugeordneten Bogen des Hauptkreises $H$ werden mit $\beta_n$ bezeichnet.

Wenn wir $B_0$ an einem der Bogen (2), z. B. $b_0$, spiegeln, erhalten wir ein Kurvenpolygon $\bar{B}_0$, das zusammen mit $B_0$ einen Fundamentalbereich $B = B_0 + \bar{B}_0$ einer symmetrischen Fuchsschen oder fuchsoiden Gruppe $G$ vom Geschlecht $p = 0$ ohne elliptische Substitutionen bildet, je nachdem die Anzahl der Bogen (2) endlich oder unendlich ist.

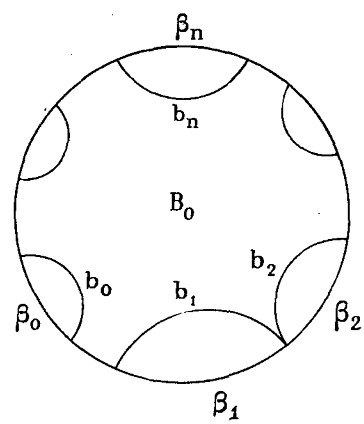

Fig. 1.

Es soll unten bewiesen werden, dass die Gruppe vom positiven Typus oder vom Nulltypus in bezug auf die beschränkten analytischen Funktionen ist, je nachdem $\Sigma \beta_k$ kleiner oder gleich $2\pi$ ist.

4. Wenn wir den Bereich $B_0$ durch die Riemannsche Abbildungsfunktion

(4) $$x = x(z)$$

auf den Einheitskreis

(5) $$|x| < 1 \qquad :D_0$$

abbilden, werden die Bogen (2) auf gewisse Bogen

(6) $$b_0', b_1', b_2', \ldots$$

des Einheitskreises $|x| = 1$ abgebildet. Durch Spiegelung an $b_0'$ erhalten wir zum Bildbereich $\bar{D}_0$ von $\bar{B}_0$ das Äussere des Einheitskreises $D_0$. Der Bildbereich von $B$ wird dann der Bereich $D = D_0 + \bar{D}_0$ sein. Wir betrachten die Punkte der offenen Bogen (6) als innere Punkte des Bereiches $D$.

Die Funktion (4) ist dann eine *Hauptfunktion* der Gruppe $G$, d. h. eine automorphe Funktion, die jeden komplexen Wert höchstens einmal in $B$ annimmt, und die $B$ auf einen schlichten Bereich $D$ abbildet, der ein *Hauptbereich* genannt wird. Die inverse Funktion $z(x)$ von (4) ist eine in $D$ linear polymorphe beschränkte einwertige Funktion, deren Zweige sich gemäss den Substitutionen der Gruppe vertauschen, wenn der Punkt $x$ in $D$ einen geschlossenen Weg beschreibt.

Jeder in $D$ eindeutigen Funktion entspricht nach (4) eine automorphe Funktion der Gruppe $G$ und umgekehrt. Wir können unser Problem dann wie folgt formulieren:

Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass in $D$ eine eindeutige und beschränkte nichtkonstante analytische Funktion existiert?

Durch eine lineare Transformation, die $D_0$ auf die obere $u$-Halbebene so abbildet, dass ein innerer Punkt von einem der Bogen (6), z. B. $b_0'$, dem unendlich fernen Punkt der $u$-Ebene entspricht, erhalten wir als Bild derjenigen Randpunkte von $B_0$, deren absoluter Betrag gleich Eins ist, eine abgeschlossene lineare reelle Punktmenge $E$, die in einem endlichen Intervall $(a, b)$ liegt, welches von der reellen $u$-Achse durch Weglassung der Bildpunkte $\omega_0$ von $b_0'$ übrig bleibt. Den übrigen Bogen (6) entspricht eine Folge

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \tag{7}$$

offener Bogen auf $(a, b)$, die die Komplementmenge von $E$ bilden. Wir haben also

$$mE + \sum_{\nu=1}^{\infty} |\omega_\nu| = b - a. \tag{8}$$

Wenn wir jetzt, um ein allgemeines Ergebnis zu erhalten, die Menge $E$ eine beliebige abgeschlossene Punktmenge im Intervall $(a, b)$ bedeuten lassen, erhalten wir die folgende Formulierung unseres Problems:

Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine ausserhalb einer beschränkten geschlossenen linearen Punktmenge $E$ eindeutige und beschränkte nichtkonstante analytische Funktion existiert?

Eine notwendige Bedingung ergibt sich aus dem folgenden Satz, der zuerst in den Untersuchungen von PAINLEVÉ [1] und LINDEBERG [1] vorkommt.

5. *Satz von Painlevé-Lindeberg. Es sei $f(u)$ eine Funktion, die in einem endlichen, von einer rektifizierbaren Jordankurve $C$ begrenzten abgeschlossenen Bereich $G$ ausserhalb einer in $G$ liegenden abgeschlossenen linearen Punktmenge $E$ vom linearen Mass Null eindeutig analytisch und beschränkt ist. Dann ist $f(u)$ auch in jedem Punkt von $E$ regulär analytisch.*

Zum Beweise schliessen wir die Punktmenge $E$ in eine endliche oder abzählbar unendliche Folge von einfachen rektifizierbaren Kurven $\Gamma_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ein, die innerhalb $G$ verlaufen, und deren Gesamtlänge beliebig klein gemacht werden kann, da die Menge $E$ vom linearen Mass Null ist. Nach dem Heine-Borelschen Überdekkungssatze können wir von diesen Kurven eine endliche Anzahl $\Gamma_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ so auswählen, dass jeder Punkt der Menge $E$ von einer der Kurven $\Gamma_\nu$ umschlossen wird, und dass diese Kurven und $C$ einen zusammenhängenden Bereich $G_1$ beschränken. Die Länge der Randkurve $\Gamma = \sum_{\nu=1}^{n} \Gamma_\nu$ sei $L$.

Da $f(u)$ nach unseren obigen Voraussetzungen in $G$ ausnahmslos eindeutig und analytisch ist, können wir den Wert von $f(u)$ in einem beliebigen Punkt $u$ von $G_1$ durch die Cauchysche Integralformel

$$f(u) = \int_C \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - u} - \int_\Gamma \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - u}$$

ausdrücken. Wenn wir mit $M$ die obere Grenze von $|f(u)|$ und mit $\Delta$ den kürzesten Abstand von $u$ nach $\Gamma$ bezeichnen, können wir den Betrag des letzteren Integrals abschätzen, wie folgt:

$$\left| \int_\Gamma \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - u} \right| \leq \frac{M L}{\Delta}.$$

Da wir $L$ nach dem Obigen beliebig klein machen können, ohne den Wert von $\Delta$ zu verkleinern, können wir durch eine geeignete Wahl der Kurven $\Gamma_\nu$ das Integral über $\Gamma$ beliebig klein machen. Da andererseits $f(u)$ und das Integral über $C$ von der Wahl der Kurven $\Gamma_\nu$ unabhängig sind, gilt

$$f(u) = \int_C \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - u},$$

worin die rechte Seite bekanntlich in dem ganzen Bereich $G$ regulär analytisch ist. Der Satz ist somit bewiesen.

Wenn unsere abgeschlossene Punktmenge $E$ auf dem Segmente $(a, b)$ der reellen $u$-Achse vom linearen Mass Null ist, können wir sie durch eine rektifizierbare Kurve $C$ umschliessen. Wenn es eine in der ganzen $u$-Ebene ausserhalb der Menge $E$ eindeutige und beschränkte analytische Funktion gibt, so muss sie nach dem obigen Satz dann auch in allen Punkten von $E$ regulär analytisch sein. Nach dem Liouvilleschen Satz reduziert sich aber diese Funktion auf eine Konstante.

Eine notwendige Bedingung für die Existenz einer ausserhalb einer beschränkten abgeschlossenen linearen Punktmenge $E$ eindeutigen und beschränkten nichtkonstanten Funktion ist also, dass das lineare Mass der Punktmenge $E$ positiv ist. Wir wollen im folgenden beweisen, dass diese Bedingung für die Existenz der obigen Funktionen auch hinreichend ist.

6. Wenn $E$ eine abgeschlossene Punktmenge vom positiven linearen Mass auf dem Segment $(a, b)$ der reellen $u$-Achse ist, besteht die Komplementmenge aus endlich oder abzählbar unendlich vielen offenen Intervallen

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \tag{7}$$

mit

$$mE + \sum_{\nu=1}^{\infty} |\omega_\nu| = b - a. \tag{8}$$

Wir wählen nun aus der Folge (7) z. B. die $n-1$ ersten, und bilden die Menge

$$(a, b) - \sum_{\nu=1}^{n-1} \omega_\nu = E_n, \tag{9}$$

die aus $n$ geschlossenen Intervallen

$$(a_{\nu, n}, b_{\nu, n}); \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n \tag{10}$$

besteht. Die Menge $E_n$ nimmt mit wachsendem Wert von $n$ ab

$$E_1 > E_2 > \cdots > E_n > \cdots \tag{11}$$

und konvergiert gegen die Menge $E$.

Wir bilden jetzt nach einer Idee von Denjoy [1] die Funktion

$$f_n(u) = e^{i \sum\limits_{\nu=1}^{n} \log \frac{u - b_{\nu, n}}{u - a_{\nu, n}}} = \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{u - b_{\nu, n}}{u - a_{\nu, n}}\right)^i. \tag{12}$$

Der absolute Betrag der Funktion $f_n(u)$ ist

$$f_n(u) = e^{\arg \frac{u-a_{\nu,n}}{u-b_{\nu,n}}}. \tag{13}$$

Da $\arg \frac{u - a_{\nu,n}}{u - b_{\nu,n}}$ gleich dem Winkel zwischen den vom Punkt $u$ aus nach den Punkten $a_{\nu,n}$ und $b_{\nu,n}$ gezogenen Geraden ist, und da diese Winkel für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ abgesehen von $u$ offenbar keine gemeinsamen Punkte besitzen, gilt für jeden Wert von $n$

$$-\pi < \sum_{\nu=1}^{n} \arg \frac{u - a_{\nu,n}}{u - b_{\nu,n}} < 0 \text{ in der oberen Halbebene und}$$

$$0 < \sum_{\nu=1}^{n} \arg \frac{u - a_{\nu,n}}{u - b_{\nu,n}} < \pi \text{ in der unteren Halbebene.}$$

Wenn $u$ ein Punkt der Menge $\sum_{\nu=1}^{n-1} \omega_\nu$ ist, wird jene Summe gleich Null. Ist $u$ dagegen ein Punkt der Menge (10), so hat die Summe den Wert $-\pi$ oder $+\pi$, je nachdem man sich der Menge von oben oder von unten nähert.

In der längs $E_n$ aufgeschnittenen Ebene $T_n$ gilt demnach

$$e^{-\pi} \leq |f_n(u)| \leq e^{\pi}. \tag{14}$$

Die Funktion $f_n(u)$ ist also in $T_n$ beschränkt. Die Schranken sind von $n$ unabhängig.

Wenn $u$ in $T_n$ geschlossene Wege beschreibt, kehrt $\arg \frac{u - a_{\nu,n}}{u - b_{\nu,n}}$ für alle Werte von $\nu$ und $n$ nach dem Anfangswert zurück, woraus wir die Eindeutigkeit der Funktion $f_n(u)$ in $T_n$ schliessen können.

Um beweisen zu können, dass sich die Grenzfunktion $f(u) = \lim_{n \to \infty} f_n(u)$ dieser eindeutigen beschränkten Funktion $f_n(u)$ nicht auf eine Konstante reduziert, bilden wir die Entwicklung der Funktion $f_n(u)$ in dem unendlich fernen Punkt der Ebene. Eine elementare Rechnung

$$\begin{aligned} f_n(u) &= \prod_{\nu=1}^{n} \left( \frac{u - b_{\nu,n}}{u - a_{\nu,n}} \right)^i \\ &= \prod_{\nu=1}^{n} \left( 1 - \frac{i\,(b_{\nu,n} - a_{\nu,n})}{u} + \left[ \frac{1}{u^2} \right] \right) \\ &= 1 - \frac{i \sum_{\nu=1}^{n} (b_{\nu,n} - a_{\nu,n})}{u} + \left[ \frac{1}{u^2} \right], \end{aligned}$$

worin $[\alpha]$ einen Ausdruck bedeutet, für welchen $\frac{[\alpha]}{\alpha}$ falls $\alpha \to 0$ beschränkt ist, erweist, dass $f_n(u)$ in $u = \infty$ die Entwicklung

$$f_n(u) = 1 + \frac{C_1^{(n)}}{u} + \frac{C_2^{(n)}}{u^2} + \cdots \tag{15}$$

mit

$$C_1^{(n)} = -i \sum_{\nu=1}^{n} (b_{\nu,n} - a_{\nu,n}) = -i\, m E_n \tag{16}$$

hat. Hieraus folgt für die Grenzfunktion $f(u)$ die Entwicklung in $u = \infty$

$$f(u) = 1 + \frac{C_1}{u} + \frac{C_2}{u^2} + \cdots \tag{17}$$

mit

$$C_1 = -i\, m E. \tag{18}$$

Da wir vorausgesetzt haben, dass die Menge $E$ vom positiven Mass ist, folgt hieraus, dass die Funktion $f(u)$ sich nicht auf eine Konstante reduzieren kann. Wir bezeichnen die Ebene, aus welcher die Punkte der Menge $E$ ausgelassen sind, mit $T$. Als Grenzfunktion eindeutiger gleichmässig beschränkter Funktionen (12) ist $f(u)$ in $T$ eindeutig und nach (14) gilt

$$e^{-\pi} \leq |f(u)| \leq e^{\pi}. \tag{19}$$

*Satz 1. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer ausserhalb einer beschränkten abgeschlossenen linearen Punktmenge $E$ eindeutigen und beschränkten nichtkonstanten analytischen Funktion ist, dass das lineare Mass der Menge $E$ positiv ist.*

7. Wir wollen jetzt die Regularität der ausserhalb einer beschränkten abgeschlossenen linearen Punktmenge $E$ vom positiven Mass eindeutigen und beschränkten nichtkonstanten analytischen Funktionen in der Umgebung der Menge $E$ untersuchen.

Alle Punkte von $E$ können in zwei Klassen eingeteilt werden. Zur ersten Klasse werden alle Punkte $P$ der Menge $E$ berechnet, die die Eigenschaft besitzen, dass in jeder Umgebung des Punktes $P$ eine abgeschlossene Teilmenge von $E$ existiert, deren lineares Mass positiv ist. Alle übrigen Punkte von $E$ werden der zweiten Klasse zugeführt. Alle Punkte der ersten Klasse bilden eine abgeschlossene Teilmenge von $E$, die der *Kern* der Menge $E$ genannt wird.

Es sei nun $f(u)$ eine ausserhalb der Menge $E$ eindeutige und beschränkte nichtkonstante analytische Funktion. Wir wollen diese Funktion $f(u)$ zuerst in der Umgebung eines Punktes $P$ von $E$ untersuchen, der dem Kern von E nicht angehört.

Dann gibt es eine Umgebung $U(P)$ von $P$ mit der Eigenschaft, dass die abgeschlossene Teilmenge $e$ von $E$, die der Umgebung $U(P)$ angehört, das lineare Mass Null hat. Nach dem Satz von Painlevé-Lindeberg ist $f(u)$ noch in den Punkten von $e$, also in der ganzen Umgebung $U(P)$ regulär analytisch.

Da dies für alle Punkte $P$ von $E$ gilt, die dem Kern von $E$ nicht angehören, ist demnach $f(u)$ in allen diesen Punkten regulär analytisch. Die Punkte von $E$, die dem Kern von $E$ nicht angehören, sind somit hebbare Singularitäten der Funktionen $f(u)$.

Wir wollen jetzt im Gegenteil beweisen, dass es eindeutige und beschränkte analytische Funktionen gibt, die jeden Punkt des Kernes von $E$ als einen wesentlich singulären Punkt haben.

In der Tat ist die in Nr. 6 konstruierte Funktion von Denjoy eine solche Funktion, die durch ihre Konstruktion eindeutig bestimmt ist.

Wenn $P$ ein Punkt des Kernes von $E$ ist, so gibt es also in jeder Umgebung $U(P)$ von $P$ eine abgeschlossene Teilmenge $E_1$ von $E$, die ein positives lineares Mass hat. Wenn wir die Funktion von Denjoy für die Punktmenge $E$ mit $f_E(u)$ bezeichnen und $E_2 = E - E_1$ die Komplementmenge von $E_1$ in bezug auf $E$ ist, gilt infolge des multiplikativen Charakters der Funktion $f_E(u)$

$$f_E(u) = f_{E_1}(u) \cdot f_{E_2}(u). \tag{20}$$

Die Funktion $f_{E_1}(u)$ ist regulär ausserhalb der Menge $E_1$ und nichtkonstant, da $m E_1 > 0$ ist. Da dies für jede Umgebung von $P$ gilt, so ist $P$ ein wesentlich singulärer Punkt von $f_{E_1}(u)$. Die Funktion $f_{E_2}(u)$ dagegen ist regulär ausserhalb $E_2$, also auch in den Punkten von $E_1$. Wir können dann nach (20) schliessen, dass der Punkt $P$ ein singulärer Punkt von $f_E(u)$ ist.

Da dies für jeden Punkt des Kernes von $E$ gilt, folgern wir, dass jeder Punkt des Kernes von $E$ ein wesentlich singulärer Punkt der eindeutig bestimmten Funktion $f_E(u)$ von Denjoy ist. Jeder Punkt von $E$, der dem Kern von $E$ nicht angehört, ist dagegen eine hebbare Singularität von $f_E(u)$. Somit haben wir die Frage nach dem singulären Charakter der Punktmenge $E$ für die Funktion $f_E(u)$ vollkommen gelöst.

*Satz 2. Eine ausserhalb einer abgeschlossenen und beschränkten linearen Punktmenge $E$ vom positiven Mass eindeutige und beschränkte nichtkonstante analytische Funktion ist regulär analytisch in allen Punkten von $E$, die dem Kern der Menge $E$ nicht angehören.*

*Dagegen gibt es ausserhalb $E$ eindeutige und beschränkte analytische Funktionen, die in jedem Punkte des Kerns von $E$ einen wesentlich singulären Punkt besitzen.*

8. Da die Eigenschaft der linearen Punktmengen, auf Kreisen oder Geraden Mengen vom linearen Mass Null bzw. positiven linearen Mass zu sein, gegen lineare Transformationen offenbar invariant ist (dies ist übrigens eine Folge des unten bewiesenen Satzes von Riesz), können wir durch Satz 1 unser Problem für den Hauptbereich $D$ unmittelbar lösen.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine in $D$ eindeutige und beschränkte nichtkonstante analytische Funktion existiert, ist, dass das lineare Mass der Summe der Bogen (6) $2\pi$ untersteigt.

Um dieses Ergebnis auf den Bereich $B_0$ übertragen zu können und hierdurch zur Lösung unseres Problems zu gelangen, wollen wir einen allgemeinen, von F. und M. Riesz [1] und F. Riesz [1] herrührenden Satz beweisen.

*Satz von Riesz. Bei konformer Abbildung zweier endlichen einfach zusammenhängenden Gebiete mit rektifizierbaren Randkurven aufeinander ist das gegenseitige Entsprechen der Ränder ein totalstetiges, d. h. den Nullmengen entsprechen Nullmengen.*

Da jedes einfach zusammenhängende endliche Gebiet nach dem Riemannschen Abbildungssatz auf den Einheitskreis konform abgebildet werden kann, genügt es, den obigen Satz für den Fall zu beweisen, dass das eine Gebiet der Einheitskreis ist.

Es sei also $f(z)$ eine in dem Einheitskreis $|z| < 1$ eindeutige und beschränkte analytische Funktion, die den Einheitskreis ausnahmslos konform auf ein endliches von einer rektifizierbaren Jordankurve $C$ mit der Länge $L$ begrenztes Gebiet $G$ abbildet. Wir behaupten, dass dann eine Nullmenge auf dem Einheitskreis $|z| = 1$ auf eine Nullmenge auf $C$ abgebildet wird, und dass jeder Nullmenge auf $C$ eine Nullmenge auf dem Einheitskreise entspricht.

Wir können das Gebiet $G$ mit Hilfe von geradlinigen Polygonen $G_n$, die mit wachsendem $n$ gegen $G$ so konvergieren, dass die Längen $L_n$ der Polygonränder eine wachsende gegen die Länge $L$ der Randkurve $C$ konvergierende Folge bilden, beliebig genau approximieren. Es sei $f_n(z)$ diejenige Abbildungsfunktion, die den Einheitskreis auf das Polygon $G_n$ abbildet. Da die Funktionen $f_n(z)$, abgesehen von endlich vielen Punkten, die den Polygonecken von $G_n$ entsprechen, noch auf dem Einheitskreise $|z|=1$ regulär sind, können wir das folgende Integral als Summe von endlich vielen Integralen regulärer Funktionen bilden und erhalten

$$\int_0^{2\pi} |f_n'(e^{i\theta})|\,d\theta = L_n. \tag{21}$$

Nach einem Satz von HARDY [1] ist das Integral $\int_0^{2\pi} |f_n'(re^{i\theta})|\,d\theta$ für $0<r<1$ eine wachsende Funktion von $r$. Also ist

$$\int_0^{2\pi} |f_n'(re^{i\theta})|\,d\theta < L_n \qquad (0<r<1). \tag{22}$$

Wenn $n$ unbeschränkt wächst, konvergiert $f_n(z)$ auf dem Kreise $|z|=r<1$ gleichmässig gegen $f(z)$. Dann konvergiert auch die Ableitung $f_n'(z)$ in jedem Kreise $|z|=r<1$ gleichmässig gegen $f'(z)$. Nach (22) erhalten wir dann

$$\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|\,d\theta \leq \lim_{n\to\infty} L_n = L, \tag{23}$$

wenn $0<r<1$ ist.

Nach dieser vorbereitenden Diskussion werden wir durch

$$\sqrt{f'(z)} = g(z) \tag{24}$$

eine Hilfsfunktion $g(z)$ definieren. Da die Abbildungsfunktion $f(z)$ im ganzen Kreise $|z|<1$ ausnahmslos konform ist, ist $f'(z)$ in $|z|<1$ von Null verschieden. Wenn wir nun $g(z)$ einen wohlbestimmten Zweig der Quadratwurzel bedeuten lassen, erhalten wir durch (24) eine eindeutig definierte analytische Funktion, die in $|z|<1$ nirgends verschwindet.

Nach (23) ist

$$\int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2\,d\theta \leq L \qquad (0<r<1). \tag{25}$$

Wenn die Entwicklung der Funktion $g(z)$ im Ursprung

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{26}$$

ist, so ist nach (25)

$$2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \leq L. \tag{27}$$

Die Summe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ ist also konvergent. Wenn nun $r_1$ und $r_2$ zwei beliebige Zahlen zwischen 0 und 1 sind, gilt demnach

$$\int_0^{2\pi} |g(r_2 e^{i\theta}) - g(r_1 e^{i\theta})|^2 \, d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \, |r_2^n - r_1^n|^2. \tag{28}$$

Wenn wir $r_1$ und $r_2$ unabhängig voneinander gegen Eins konvergieren lassen, wird der Grenzwert von (28) gleich Null. Die Funktion $g(re^{i\theta})$ konvergiert also im Mittel, wenn $r \to 1$. Nach dem Satz von Fischer-Riesz (FISCHER [1]) gibt es dann eine mit ihrem Quadrat summable Funktion $g(e^{i\theta})$, so dass

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} |g(e^{i\theta}) - g(re^{i\theta})|^2 \, d\theta = 0. \tag{29}$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung ist

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^{2\pi} |f'(e^{i\theta}) - f'(re^{i\theta})| \, d\theta\right)^2 &= \left(\int_0^{2\pi} |g^2(e^{i\theta}) - g^2(re^{i\theta})| \, d\theta\right)^2 \\
&= \left(\int_0^{2\pi} |g(e^{i\theta}) + g(re^{i\theta})| \cdot |g(e^{i\theta}) - g(re^{i\theta})| \, d\theta\right)^2 \\
&\leq \int_0^{2\pi} |g(e^{i\theta}) + g(re^{i\theta})|^2 \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} |g(e^{i\theta}) - g(re^{i\theta})|^2 \, d\theta.
\end{aligned}$$

Das erste Integral ist endlich, da $g(e^{i\theta})$ und $g(re^{i\theta})$ mit ihren Quadraten summabel sind, das zweite Integral hat für $r \to 1$ nach (29) den Grenzwert Null. Es gilt also

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} |f'(e^{i\theta}) - f'(re^{i\theta})| \, d\theta = 0. \tag{30}$$

Die Funktion $f(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} f(re^{i\theta})$ ist somit eine *totalstetige* Funktion.

Hieraus können wir leicht die Behauptung ablesen. Das Mass der Bildmenge $E$ einer Punktmenge $M$ auf dem Einheitskreise ist gleich dem Lebesgueschen Integral

$$\int_M |f'(e^{i\theta})| \, d\theta. \tag{31}$$

Wenn $M$ eine Nullmenge ist, so ist auch $E$ eine Nullmenge, da das Integral (31) dann den Wert Null hat. Wenn $M$ dagegen ein positives Mass hat, so kann $f'(e^{i\theta})$ nach einem bekannten Satz von FATOU und RIESZ (F. und M. RIESZ [1] S. 28) nur auf einer Randpunktmenge vom Masse Null verschwinden. Es gibt dann also eine Teilmenge von $M$, die vom positiven Mass ist, und auf welcher $f'(e^{i\theta})$ von Null verschieden ist. Das Integral (31) hat dann einen positiven Wert, d. h. die Bildmenge $E$ einer Punktmenge $M$ vom positiven Mass muss auch vom positiven Mass sein. Der Satz von Riesz ist damit völlig bewiesen.

Durch den obigen Satz von Riesz können wir unsere Ergebnisse sogleich auf den Bereich $B_0$ übertragen. Der Rand von $B_0$ ist ja offenbar rektifizierbar, und seine Länge ist kleiner als $\frac{\pi}{2} \cdot 2\pi = \pi^2$.

Notwendig und hinreichend, damit die Gruppe $G$ vom Nulltypus sei, ist dann, dass die Menge der Randpunkte von $B_0$, deren absoluter Betrag gleich Eins ist, ein positives Mass hat, oder, was dasselbe bedeutet, die Summe $\Sigma \beta_k$ (Fig. 1) kleiner als $2\pi$ ist.

Wir haben also den folgenden, im Anfang behaupteten Satz bewiesen:

*Satz 3. Eine symmetrische Hauptkreisgruppe vom Geschlecht $p = 0$, die keine elliptischen Substitutionen enthält, ist vom positiven Typus oder vom Nulltypus in bezug auf die beschränkten automorphen Funktionen, je nachdem die Summe derjenigen Bogen des Hauptkreises, die dem Fundamentalbereich der Gruppe nicht angehören, kleiner oder gleich $2\pi$ ist.*

LITERATUR. **Denjoy, A.**, [1] Sur les fonctions analytiques uniformes à singularités discontinues. C. r. Acad. Sci. Paris 149, 1909, 2. — **Fischer, E.**, [1] Sur la convergence en moyenne. C. r. Acad. Sci. Paris 144, 1907, S. 1022—1024. — **Hardy, G. H.**, [1] On the mean value of an analytic function. Proc. London Math. Soc., ser. 2, 14, 1915. — **Lindeberg, J. W.**, [1] Sur l'existence des fonctions d'une variable complexe et des fonctions harmoniques bornées. Ann. Acad. Sci. Fenn. 11, Nr. 6, 1918. — **Myrberg, P. J.**, [1] Ueber die Existenz der Greenschen Funktionen auf einer gegebenen Riemannschen Fläche. Acta math. 61, 1933. — ——, [2] Ueber Integrale auf transzendenten symmetrischen Riemannschen Flächen. Ann. Acad. Sci. Fenn., A I, Nr. 31, 1945. — **Nevanlinna, R.**, [1] Eindeutige analytische Funktionen. Berlin 1936. — ——, [2] Quadratisch integrierbare Differentiale auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Ann. Acad. Sci. Fenn., A I, Nr. 1, 1941. — **Painlevé, P.**, [1] Sur les lignes singulières des fonctions analytiques. Ann. Fac. Sci. Toulouse, 1882, 2. — **Riesz, F. u. M.**, [1] Ueber die Randwerte einer analytischen Funktion. 4. Congr. Scand. Math. Stockholm 1916. — **Riesz, F.**, [1] Ueber die Randwerte einer analytischen Funktion. Math. Zeitschrift 18, 1923. — **Weyl, H.**, [1] Die Idee der Riemannschen Fläche. Göttingen 1923.

Tryckt den 26 januari 1949

Uppsala 1949. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB