ARKIV FÖR MATEMATIK Band 3 nr 11

Mitgeteilt am 14. April 1954 durch T. NAGELL und OTTO FROSTMAN

Zur Axiomatik endlicher Gruppen

Von BENGT STOLT

§ 1. Einleitung

In der Axiomatik endlicher Gruppen haben BAER und LEVI solche Axiomensysteme behandelt, die die sogenannten allgemeinen Axiome enthalten; siehe [1]. LORENZEN erweitert die Menge der zu betrachtenden Axiome, indem er die Eins-Existenzaxiome und die allgemeinen Inversaxiome aufstellt; siehe [2]. Ferner habe ich die Eins-Unitätsaxiome und die speziellen Inversaxiome aufgestellt; siehe [3] und [4]. Weder in [2] noch in [3] oder [4] wird die Axiomatik endlicher Gruppen behandelt.

In [5] habe ich sämtliche Systeme aufgestellt, die aus den von LORENZEN betrachteten Axiomen gebildet werden können und nur für eine zugrundeliegende endliche Menge vollständig und irreduzibel sind. Es ist das Ziel vorliegender Arbeit, sämtliche vollständigen irreduziblen Axiomensysteme zu bestimmen, die aus den von STOLT betrachteten Axiomen gebildet werden können und nur dann vollständig sind, wenn die zugrundeliegende Menge endlich ist und die in dieser Menge definierte Verknüpfung eindeutig ist.

Den sämtlichen Systemen dieser Arbeit liegt eine endliche abstrakte Menge zugrunde. Für Bezeichnungen wird auf [3] verwiesen. Es wird hervorgehoben, dass, wenn eines der Axiome $l\varepsilon.J$, $lv.J$, $r\varepsilon.J$ und $rv.J$ besteht, es zwei Elemente c und d gibt, die eine gewisse Gleichung erfüllen. Wenn mehrere dieser Axiome bestehen, werden wir annehmen, dass c und d in allen Gleichungen dieselben sind.

§ 2. Hilfssätze

Zuerst wollen wir die folgenden Hilfssätze beweisen.

Hilfssatz 1. *Wenn A, E und U bestehen, hat jedes Element a eine Potenz a^m, die idempotent ist.*

Beweis: Wenn a beliebig ist, ist es möglich, der Reihe nach die Produkte $a\,a = a^2$, $a\,a^2 = a^3$, $a\,a^3 = a^4, \ldots$ zu bilden. Weil die zugrundeliegende Menge endlich ist, kommt man zu einer Gleichung $a\,a^\lambda = a^k$, wo $k \leqq \lambda$ ist. Es ist nun möglich, $a^2\,a^{\lambda-1} = a^k$; $a^3\,a^{\lambda-2} = a^k, \ldots$ zu bilden, bis man nach $a^h\,a^k = a^k$ kommt. Aus der letzten Gleichung ergibt sich

$$a^h\,a^{2k} = a^h\,(a^k\,a^k) = (a^h\,a^k)\,a^k = a^k\,a^k = a^{2k}.$$

Indem man fortfährt, kommt man zur Gleichung $a^h\,a^{hk} = a^{hk}$.

Ferner erhalten wir

$$a^{2h} a^{hk} = (a^h a^h) a^{hk} = a^h (a^h a^{hk}) = a^h a^{hk} = a^{hk}.$$

Wenn man fortfährt, erhält man schliesslich $a^{hk} a^{hk} = a^{hk}$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 2. *Wenn A, E, U und $I(U)$ bestehen, gibt es ein e_α mit $lE.I$ und $rE.I$.*

Beweis: Wenn $a, b, c, \ldots$ die Elemente der Menge sind, gibt es zu jedem Element eine idempotente Potenz $a^m, b^n, c^r, \ldots,$ die $a^m a^m = a^m$ usw. erfüllen. Wegen $I(U)$ gilt folglich $a^m = b^n = c^r = \cdots = e_\alpha$. Aus $a\, a^{m-1} = a^{m-1} a = e_\alpha$ folgt, dass e_α die Eigenschaften $lE.I$ und $rE.I$ hat. Hiermit ist der Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 3. *Wenn A, E, U, $li(E)$ und $li(U)$ bestehen, hat ein e mit $li(E)$ sogar die Eigenschaft $lE.li$.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es ein e mit $li(E)$ und ein c, das $ec = c$ erfüllt. Wenn a ein beliebiges Element ist, gilt $ca = g$. Wie im Hilfssatz 1 ist es möglich, zwei Potenzen von g zu bestimmen, die $g^h g^k = g^k$ erfüllen. Aus

$$e g = e(c a) = (e c) a = c a = g$$

folgt $eg = g$, und es ist leicht zu zeigen, dass auch $eg^2 = g^2$, $eg^3 = g^3, \ldots$ bestehen. Dann gilt $eg^k = g^k$. Aus $li(U)$ folgt $g^h = e$, was $g^{h-1} c.a = e$ geschrieben werden kann. Folglich gilt $lE.li$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 4. *Wenn A, E, U, $li(E)$ und $I(U)$ bestehen, hat ein e mit $li(E)$ sogar die Eigenschaften $lE.I$ und $rE.I$.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 2 gibt es ein e_α mit $lE.I$ und $rE.I$. Ferner gibt es ein e mit $li(E)$ und ein c, dass $ec = c$ erfüllt. Wegen Hilfssatz 1 gibt es idempotente Potenzen e^m und c^n, die $e^m e^m = e^m$ und $c^n c^n = c^n$ erfüllen. Aus $I(U)$ folgt $e^m = c^n$.

Aus $ec = c$ ist es leicht, $e^x c^y = c^y$ herzuleiten, wo x und y ganze positive Zahlen sind. Dann erhalten wir

$$e^{m+x} = e^x e^m = e^x c^n = c^n = e^m.$$

Dies ist aber nur dann möglich, wenn $ee = e$ besteht. Aus $I(U)$ folgt $e_\alpha = e$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

§ 3. Vollständige Systeme

Wir wollen nun die Vollständigkeit der folgenden Systeme zeigen.

1) $A, lE, U, rI(U)$

2) $A, lE, U, r\varepsilon.i, rv.i$

3) $A, E, U, lE.i, rU.i$

4) $A, E, U, lI(E), li(U)$

5) $A, E, U, lI(E), I(U)$
6) $A, E, U, rI(E), li(U), rI(U)$
7) $A, E, U, lU.li, ri(U)$
8) $A, E, U, lU.ri, ri(U)$
9) $A, E, U, lU.li, I(U)$
10) $A, E, U, lU.ri, I(U)$
11) $A, E, U, lU.li, r\varepsilon.li, rv.li, li(U)$
12) $A, E, U, lU.ri, r\varepsilon.ri, rv.ri, li(U)$
13) $A, E, U, r\varepsilon.rI, rv.rI, li(U)$

Vollständigkeitsbeweis von 1):

Wegen Hilfssatz 2 in [5] bestehen A, E, lE, U, lU und $rI(U)$, womit das System auf das vollständige System 12) in [3], S. 31, zurückgeführt ist.

Vollständigkeitsbeweis von 2):

Wegen Hilfssatz 2 in [5] bestehen $A, E, lE, U, lU, r\varepsilon.i$ und $rv.i$, womit das System auf das vollständige System 16) in [3], S. 32, zurückgeführt ist.

Vollständigkeitsbeweis von 3):

Die Vollständigkeit von 3) ist in [5] bewiesen.

Vollständigkeitsbeweis von 4):

Wegen Hilfssatz 3 hat ein Element mit $lI(E)$ auch die Eigenschaft $lE.lI$, womit das System auf das vollständige System 1) in [3], S. 26, zurückgeführt ist.

Vollständigkeitsbeweis von 5):

Wegen Hilfssatz 2 gibt es ein e_α mit $lE.I$ und $rE.I$, und auf Grund der Annahme gibt es ein e mit $lI(E)$. Aus $I(U)$ folgt $e_\alpha = e$. Dann gilt $lE.lI$, womit das System auf das vollständige System 1) in [3], S. 26, zurückgeführt ist.

Vollständigkeitsbeweis von 6):

Wegen Hilfssatz 3 hat ein Element mit $rI(E)$ auch die Eigenschaft $lE.rI$. Hiermit ist das System auf das vollständige System 11) in [3], S. 31, zurückgeführt.

Vollständigkeitsbeweis von 7):

Der Annahme zufolge gibt es ein e mit $lU.li$ und ein c, das $ec=c$ erfüllt. Wegen Hilfssatz 1 bestehen $e^n e^n = e^n$ und $c^m c^m = c^m$.

Wenn $c = c_0$ bezeichnet wird, sieht man sofort ein, dass $e^x c_0^y = c_0^y$ besteht. Das Produkt von c_0 und e^x wird in folgender Weise definiert: $c_0 e^x = c_x$. Man erhält sofort

$$c_x e^y = (c_0 e^x) e^y = c_0 (e^x e^y) = c_0 e^{x+y} = c_{x+y},$$

und es ist klar, dass

$$e^x c_y = e^x (c_0 e^y) = (e^x c_0) e^y = c_0 e^y = c_y$$

besteht. Wir erhalten auch

$$c_x c_0^y = (c_0 e^x) c_0^y = c_0 (e^x c_0^y) = c_0 c_0^y = c_0^{y+1}.$$

Aus

$$c_0^2 e^x = (c_x c_0) e^x = c_x (c_0 e^x) = c_x c_x = c_x^2$$

folgt $c_0^2 e^x = c_x^2$, aus

$$c_0^3 e^x = (c_x c_0^2) e^x = c_x (c_0^2 e^x) = c_x c_x^2 = c_x^3$$

folgt $c_0^3 e^x = c_x^3$, und aus analogen Gleichungen ist es leicht, den allgemeinen Ausdruck $c_0^y e^x = c_x^y$ herzuleiten.

Man erhält auch

$$c_y^x e^z = (c_0^x e^y) e^z = c_0^x (e^y e^z) = c_0^x e^{y+z} = c_{y+z}^x,$$

$$c_0^x c_z^y = c_0^x c_0^y e^z = c_0^{x+y} e^z = c_z^{x+y}$$

und

$$c_u^x c_z^y = (c_0^x e^u) c_z^y = c_0^x (e^u c_z^y) = c_0^x c_z^y = c_z^{x+y},$$

denn es ist ja klar, dass $e^x c_z^y = c_z^y$ besteht.

Unter Berücksichtigung von $e^n e^n = e^n$ und $c_0^m c_0^m = c_0^m$ erhalten wir

$$c_n^m e^n = (c_0^m e^n) e^n = c_0^m (e^n e^n) = c_0^m e^n = c_n^m,$$

$$c_n^m c_0^m = (c_0^m e^n) c_0^m = c_0^m (e^n c_0^m) = c_0^m c_0^m = c_0^m$$

und

$$c_n^m c_n^m = c_n^m (c_0^m e^n) = (c_n^m c_0^m) e^n = c_0^m e^n = c_n^m.$$

Wegen $ri(U)$ gilt $c_n^m = e^n$. Dann ist es möglich, die folgenden Gleichungen aufzustellen.

$$e^n e = e e^n = e c_n^m = c_n^m = e^n,$$

$$e^n e^2 = e^2 e^n = e^2 c_n^m = c_n^m = e^n.$$

Aus $ri(U)$ folgt dann $e^2 = e$, womit gezeigt ist, dass e die Eigenschaft $lU.I$ hat. Wegen Hilfssatz 2 hat e auch die Eigenschaft $rE.I$. Hiermit ist gezeigt, dass das vorliegende System umfassender als das vollständige System 5) in [3], S. 28, ist.

Vollständigkeitsbeweis von 8):

Wegen Hilfssatz 6 in [3], S. 23, hat ein e mit $lU.ri$ sogar $lU.I$, womit das System auf 7) zurückgeführt ist.

Vollständigkeitsbeweis von 9):

Wegen Hilfssatz 4 hat ein e mit $lU.li$ sogar $lU.I$, $lE.I$ und $rE.I$, womit das System auf das vollständige System 7) in [3], S. 29, zurückgeführt ist.

Vollständigkeitsbeweis von 10):

Wegen Hilfssatz 4 hat ein e mit $lU.ri$ sogar $lU.I$, $lE.I$ und $rE.I$, womit das System auf das vollständige System 7) in [3], S. 29, zurückgeführt ist.

Vollständigkeitsbeweis von 11):

Wegen Hilfssatz 3 hat ein e mit $lU.li$, $r\varepsilon.li$ und $rv.li$ auch die Eigenschaft $lE.li$, womit das System auf das vollständige System des Satzes 1 in [4], S. 82, zurückgeführt ist.

Vollständigkeitsbeweis von 12):

Wegen Hilfssatz 8 in [3], S. 23, hat ein e mit $lU.ri$, $r\varepsilon.ri$ und $rv.ri$ auch die Eigenschaft $li(E)$, womit dieses System auf 11) zurückgeführt ist.

Vollständigkeitsbeweis von 13):

Wegen Hilfssatz 3 hat ein e mit $r\varepsilon.rI$ und $rv.rI$ auch die Eigenschaft $lE.rI$, womit das System auf das vollständige System 17) in [3], S. 33, zurückgeführt ist.

§ 4. Unvollständige Systeme

Wir werden nun zeigen, dass die in den folgenden Sätzen aufgestellten Systeme unvollständig sind, wenn eine endliche abstrakte Menge zugrunde liegt.

Satz 1. *Das System* A, E, lE, U, lU *und* $r\varepsilon.rI$ *ist unvollständig.*

Satz 2. *Das System* A, E, lE, U, lU *und* $rv.rI$ *ist unvollständig.*

Satz 3. *Das System,* A, E, U, $lE.I$, $lU.I$, $r\varepsilon.I$, $li\,(U)$ *und* $rI\,(U)$ *ist unvollständig.*

Satz 4. *Das System* A, E, U, $lE.I$, $lU.I$, $rv.I$, $li\,(U)$ *und* $rI\,(U)$ *ist unvollständig.*[1]

Satz 5. *Das System* A, E, U, $lE.I$, $rE.I$, $lv.I$, $rv.I$, $lU.i$, $rU.i$, $l\varepsilon.i$, $r\varepsilon.i$, $li\,(U)$, $ri\,(U)$ *und* $I\,(U)$ *ist unvollständig.*

Satz 6. *Das System* A, E, U, $lU.e$, $rU.e$, $l\varepsilon.e$, $r\varepsilon.e$, $lE.I$, $rE.I$, $lI\,(U)$ *und* $rI\,(U)$ *ist unvollständig.*

Satz 7. *Das System* A, E, lE, rE, $lU.e$, $rU.e$ *und* $I\,(U)$ *ist unvollständig.*

Satz 8. *Das System* A, E, lE, rE, $lU.i$, $rU.i$, $lv.e$, $rv.e$, $li\,(U)$, $ri\,(U)$ *und* $I\,(U)$ *ist unvollständig.*

Satz 9. *Das System* A, E, $lU.I$, $rU.I$, $l\varepsilon.I$, $r\varepsilon.I$, $li\,(U)$ *und* $ri\,(U)$ *ist unvollständig.*

Satz 10. *Das System* A, E, $lU.rI$, $rU.rI$, $l\varepsilon.rI$, $r\varepsilon.rI$, $li\,(U)$ *und* $rI\,(U)$ *ist unvollständig.*

[1] In [4], S. 92, werden A, E, U, $lE.I$, $lU.I$, $r\varepsilon.I$, $li\,(U)$, $rI\,(U)$ und A, E, U, $lE.I$, $lU.I$, $rv.I$, $li\,(U)$, $rI\,(U)$ als unentschiedene Systeme bezeichnet. Aus Satz 3 und Satz 4 geht hervor, dass die Systeme unvollständig sind.

Beweis von 1, 2, 7 und 8: Die Sätze 1, 2, 7 und 8 sind schon in [3], S. 51 und S. 53, bewiesen. Es leuchtet unmittelbar ein, dass die Beweise für eine zugrundliegende endliche Menge durchgeführt sind.

Beweis von 3 und 4: Die folgende Menge ist keine Gruppe, weil z. B. rE fehlt. Dagegen bestehen A, E, U, $li\,(U)$ und $rI\,(U)$, und ferner hat das Element 1 die Eigenschaften $lE.I$ und $lU.I$. Die Gleichung $c\,h'=1$ ist z. B. für $c=7$, $h'=4$, 5, 6 oder 7 erfüllt. Für $c=7$ hat also 1 die Eigenschaft $r\varepsilon.I$, und folglich sind alle Axiome des Satzes 3 erfüllt. Für $c=2$, 3, 4, 5 oder 6 gibt es dagegen kein h', das $c\,h'=1$ erfüllt. Für ein solches c ist also $rv.I$ erfüllt, und folglich sind auch die Axiome des Satzes 4 erfüllt.

1	1	1	7	7	7	7
2	2	2	6	6	6	6
3	3	3	5	5	5	5
6	5	5	3	3	3	2
5	5	5	3	3	3	3
6	6	6	2	2	2	2
7	7	7	1	1	1	1

Beweis von 5: In der folgenden Menge hat das Element 1 die Eigenschaften $lE.I$, $rE.I$, $lv.I$ und $rv.I$, und das Element e hat die Eigenschaften $lU.i$, $rU.i$, $l\varepsilon.i$ und $r\varepsilon.i$. Die Axiome des Satzes 5 sind also erfüllt, aber die Menge ist keine Gruppe.

1	3	3	4	4	7	7
3	1	1	7	7	4	4
3	1	1	7	7	4	4
4	7	7	1	1	3	3
4	7	7	1	1	2	3
7	4	4	3	2	1	1
7	4	4	3	3	1	1

Beweis von 6: In folgender Menge bestehen die Axiome des Satzes 6, denn das Element 1 hat die Eigenschaften $lU.e$, $rU.e$, $l\varepsilon.e$ und $r\varepsilon.e$ und das Element 2 die Eigenschaften $lE.I$ und $rE.I$. Die Menge ist aber keine Gruppe.

1	2
2	2

Beweis von 9: In folgender Menge bestehen die Axiome des Satzes 9, denn das Element 1 hat die Eigenschaften $lU.I$, $rU.I$, $l\varepsilon.I$ und $r\varepsilon.I$. Die Menge ist aber keine Gruppe.

(1, 2, 3, 4)	(3, 4)	(2, 4)	(2, 3)
(3, 4)	2	3	4
(2, 4)	3	4	2
(2, 3)	4	2	3

Beweis von 10: In folgender Menge, die keine Gruppe ist, hat das Element 1 die Eigenschaften $lU.rI$, $rU.rI$, $l\varepsilon.rI$ und $r\varepsilon.rI$.

(1, 2, 3, 4)	(3, 4)	(2, 4)	(2, 3)
(2, 3)	2	3	(2, 3)
(2, 3)	3	2	(2, 3)
4	4	4	4

§ 5. Die Irreduzibilität der vollständigen Systeme

Schliesslich werden wir zeigen, dass diejenigen vollständigen Systeme, die wir oben hergeleitet haben, irreduzibel sind. Dabei werden wir in derselben Weise wie in [3], S. 54, verfahren. Wir ersetzen die in einem vollständigen System enthaltenen Axiome der Reihe nach mit weniger umfassenden Axiomen, und wir zeigen, dass alle so enthaltenen Systeme unvollständig sind.

Es ist zu bemerken, dass in [3], S. 19 und 20 gezeigt ist, dass ein vollständiges System das Axiom A, eines der Axiome E, lE, rE und eines der Axiome E, U enthalten muss.

Wenn die zugrundeliegende Menge unendlich ist, sind sämtliche Systeme des § 3 unvollständig, was aus [3], Satz 1 und Satz 7 im Abschnitt IV, hervorgeht.

Vollständiges System	Teilsystem, das aus dem vollständigen System hervorgeht	Auf Grund folgenden Satzes ist das Teilsystem unvollständig
1. $A, lE, U, rI(U)$	A, lE, U	Satz 1
2. $A, lE, U, r\varepsilon.i, rv.i$	$A, lE, U, rv.i$ $A, lE, U, r\varepsilon.i$	Satz 2 Satz 1
3. $A, E, U, lE.i, rU.i$	$A, E, lE.i, rU.i$ $A, E, U, l\varepsilon.i, rU.i$ $A, E, U, lE.i, rv.i, rI(U)$	Satz 7 Satz 5 Satz 4
4. $A, E, U, lI(E), li(U)$	$A, E, lI(E), li(U)$ $A, E, U, I(E), li(U)$ $A, E, U, lI(E), lI(U)$	Satz 8 Satz 1 Satz 6
5. $A, E, U, lI(E), I(U)$	$A, E, lI(E), I(U)$ $A, E, U, I(E), I(U)$ $A, E, U, lI(E), lI(U), rI(U)$	Satz 7 Satz 5 Satz 6
6. $A, E, U, rI(E), li(U), rI(U)$	$A, E, rI(E), li(U), rI(U)$ $A, E, U, I(E), li(U), rI(U)$ $A, E, U, rI(E), lI(U), rI(U)$ $A, E, U, rI(E), li(U)$	Satz 8 Satz 3 Satz 6 Satz 1
7. $A, E, U, lU.li, ri(U)$	$A, E, lU.li, ri(U)$ $A, E, U, lv.li, ri(U), lI(U)$ $A, E, U, lU.i, ri(U)$ $A, E, U, lU.li, rI(U)$	Satz 9 Satz 4 Satz 5 Satz 3

(Forts.)

Vollständiges System	Teilsystem, das aus dem vollständigen System hervorgeht	Auf Grund folgenden Satzes ist das Teilsystem unvollständig
8. $A, E, U, lU.ri, ri(U)$	$A, E, lU.ri, ri(U)$ $A, E, U, lv.ri, ri(U), lI(U)$ $A, E, U, lU.i, ri(U)$ $A, E, U, lU.ri, rI(U)$	Satz 9 Satz 4 Satz 5 Satz 3
9. $A, E, U, lU.li, I(U)$	$A, E, lU.li, I(U)$ $A, E, U, lv.li, I(U)$ $A, E, U, lU.i, I(U)$ $A, E, U, lU.li, lI(U), rI(U)$	Satz 7 Satz 5 Satz 5 Satz 3
10. $A, E, U, lU.ri, I(U)$	$A, E, lU.ri, I(U)$ $A, E, U, lv.ri, I(U)$ $A, E, U, lU.i, I(U)$ $A, E, U, lU.ri, lI(U), rI(U)$	Satz 7 Satz 5 Satz 5 Satz 3
11. $A, E, U, lU.li, r\varepsilon.li, rv.li, li(U)$	$A, E, lU.li, r\varepsilon.li, rv.li, li(U)$ $A, E, U, lv.li, r\varepsilon.li, rv.li, li(U)$ $A, E, U, lU.i, r\varepsilon.i, rv.i, li(U)$ $A, E, U, lU.li, rv.li, li(U)$ $A, E, U, lU.li, r\varepsilon.li, li(U)$ $A, E, U, lU.li, r\varepsilon.li, rv.li$	Satz 10 Satz 5 Satz 5 Satz 2 Satz 1 Satz 6
12. $A, E, U, lU.ri, r\varepsilon.ri, rv.ri, li(U)$	$A, E, lU.ri, r\varepsilon.ri, rv.ri, li(U)$ $A, E, U. lv.ri, r\varepsilon.ri, rv.ri, li(U)$ $A, E, U, lU.i, r\varepsilon.i, rv.i, li(U)$ $A, E, U, lU.ri, rv.ri, li(U)$ $A, E, U, lU.ri, r\varepsilon.ri, li(U)$ $A, E, U, lU.ri, r\varepsilon.ri, rv.ri$	Satz 9 Satz 5 Satz 5 Satz 2 Satz 1 Satz 6
13. $A, E, U, r\varepsilon.rI, rv.rI, li(U)$	$A, E, r\varepsilon.rI, rv.rI, li(U)$ $A, E, U, r\varepsilon.I, rv.I, li(U)$ $A, E, U, rv.rI, li(U)$ $A, E, U, r\varepsilon.rI, li(U)$ $A, E, U, r\varepsilon.rI, rv.rI, lI(U)$	Satz 10 Satz 5 Satz 2 Satz 1 Satz 6

Es bleibt nun zu zeigen, dass die oben hergeleiteten vollständigen Systeme die einzigen Systeme sind, die U enthalten und für eine zugrundeliegende Menge vollständig und irreduzibel sind.

Wenn ein System die Axiome A, E, lU enthält, bestehen wegen Hilfssatz 2 in [5] die Axiome A, E, lE, U, lU. Wenn ein vollständiges System die Axiome A, E, U und lU enthält, ist es also möglich, das Axiom U wegzunehmen, denn U folgt ja aus den übrigen Axiomen. Darum werden wir solche Systeme nicht in Betracht ziehen.

Wenn ein System A, lE und U enthält, bestehen wegen Hilfssatz 2 in [5] die fünf Axiome A, E, lE, U und lU. Aus Satz 1 und Satz 2 geht hervor, dass nur $A, lE, U, rI(U)$; $A, lE, U, r\varepsilon.i, rv.i$; $A, lE, U, lI(E)$ und $A, lE, U, rE.i$ vollständig sind. Die zwei letzten Systeme sind sogar für eine zugrundeliegende unendliche Menge vollständig; siehe [2] S. 320 oder [3] S. 27. Folglich bleiben die Systeme 1) und 2) des § 3 übrig.

Wir wenden uns nun den Systemen zu, die von den allgemeinen Axiomen nur E und U enthalten. Aus den folgenden Tafeln geht hervor, ob ein solches System vollständig oder unvollständig ist.

In den Tafeln sind folgende Bezeichnungen benutzt worden.

— bedeutet, dass das entsprechende System wegen eines Satzes des § 4 unvollständig ist.

G bedeutet, dass das entsprechende System mit einem System des § 3 identisch ist, d. h. dass es vollständig und irreduzibel ist.

g bedeutet, dass das entsprechende System für eine zugrundeliegende endliche aber nicht unendliche Menge vollständig ist.

x bedeutet, dass das entsprechende System vollständig ist, wenn eine endliche oder unendliche Menge zugrunde liegt.

Zu den Tafeln ist zu bemerken, dass, wenn ein System A, E, U und drei allgemeine Inversaxiome enthält, es immer vollständig ist, was aus den vollständigen Systemen 6) und 7) in [3], S. 25, hervorgeht.

Axiomensystem	Auf Grund folgenden vollständigen Systems ist das Axiomensystem vollständig	Auf Grund folgenden Satzes ist das Axiomensystem unvollständig
$A, E, U, lU.e, rU.e, l\varepsilon.e, r\varepsilon.e$		Satz 6
$A, E, U, lE.lI$	1 in [3]	
$A, E, U, lE.rI, r\varepsilon.rI, rv.rI$	17 in [3]	
$A, E, U, lE.rI, lU.rI, r\varepsilon.rI$		Satz 1
$A, E, U, lE.rI, lU.rI, rv.rI$		Satz 2
$A, E, U, lE.i, rU.i$	3	
$A, E, U, lE.i, lU.i, r\varepsilon.i, rv.i$	1 in [4]	
$A, E, U, lE.I, rE.I, lv.I, rv.I$		Satz 5

Axiomensystem	Eins-Unitätsaxiome, die zum Axiomensystem hinzugefügt werden sollen											
	$lI(U)$ $rI(U)$	$ri(U)$ $lI(U)$	$li(U)$ $rI(U)$	$rI(U)$	$ri(U)$	$li(U)$	$lI(U)$	$I(U)$	$li(U)$ $ri(U)$	$li(U)$ $I(U)$	$ri(U)$ $I(U)$	$li(U)$ $ri(U)$ $I(U)$
A, E, U, e	–	g	g	–	g	g	–	g	g	g	g	g
$A, E, U, lU.e, rU.e, l\varepsilon.e, r\varepsilon.e$ . .	–	g	g	–	g	g	–	g	g	g	g	g
$A, E, U, lE.rI$	x	x	x	x	x	–	–	x	x	x	x	x
$A, E, U, lE.rI, lU.rI, r\varepsilon.rI$ . . .	x	x	x	x	x	–	–	x	x	x	x	x
$A, E, U, lE.rI, lU.rI, rv.rI$ . . .	x	x	x	x	x	–	–	x	x	x	x	x
$A, E, U, lU.lI$	–	g	g	–	g	g	–	g	g	g	g	g
$A, E, U, l\varepsilon.lI, lv.lI$	–	g	g	–	**G**	g	–	g	g	g	g	g
$A, E, U, lU.lI, rU.lI, l\varepsilon.lI, r\varepsilon.lI$	–	g	g	–	g	g	–	g	g	g	g	g
$A, E, U, rI(E)$	–	g	**G**	–	**G**	–	–	**G**	g	g	g	g
$A, E, U, lU.rI, l\varepsilon.rI, r\varepsilon.rI$ . . .	–	g	g	–	g	–	–	g	g	g	g	g
$A, E, U, lU.rI, l\varepsilon.rI, rv.rI$ . . .	–	g	g	–	g	–	–	g	g	g	g	g
$A, E, U, lU.I, rU.I$	–	g	g	–	g	g	–	g	g	g	g	g
$A, E, U, lU.I, r\varepsilon.I, rv.I$	–	g	g	–	g	g	–	g	g	g	g	g
$A, E, U, lU.I, rU.I, l\varepsilon.I, r\varepsilon.I$ . .	–	g	g	–	g	g	–	g	g	g	g	g
$A, E, U, lU.I$	–	g	–	–	g	–	–	g	g	g	g	g

(Forts.)

Axiomensystem	Eins-Unitätsaxiome, die zum Axiomensystem hinzugefügt werden sollen											
	$lI(U)$ $rI(U)$	$ri(U)$ $lI(U)$	$li(U)$ $rI(U)$	$rI(U)$	$ri(U)$	$li(U)$	$lI(U)$	$I(U)$	$li(U)$ $ri(U)$	$li(U)$ $I(U)$	$ri(U)$ $I(U)$	$li(U)$ $ri(U)$ $I(U)$
$A, E, U, lU.I, l\varepsilon.I, r\varepsilon.I$	–	g	–	–	g	–	–	g	g	g	g	g
$A, E, U, lU.I, l\varepsilon.I, rv.I$	–	g	–	–	g	–	–	g	g	g	g	g
$A, E, U, lU.li, rU.li$	–	g	g	–	g	g	–	g	g	g	g	g
$A, E, U, lU.li, r\varepsilon.li, rv.li$	–	g	g	–	g	G	–	g	g	g	g	g
$A, E, U, lU.ri, r\varepsilon.ri, rv.ri$. . . .	–	g	g	–	g	G	–	g	g	g	g	g
$A, E, U, lU.li, rU.li, l\varepsilon.li, r\varepsilon.li$.	–	g	g	–	g	g	–	g	g	g	g	g
$A, E, U, lU.li$.	–	g	–	–	G	–	–	G	g	g	g	g
$A, E, U, lU.ri$.	–	g	–	–	G	–	–	G	g	g	g	g
$A, E, U, lU.li, l\varepsilon.li, r\varepsilon.li$	–	g	–	–	g	–	–	g	g	g	g	g
$A, E, U, lU.ri, l\varepsilon.ri, r\varepsilon.ri$	–	g	–	–	g	–	–	g	g	g	g	g
$A, E, U, lU.li, l\varepsilon.li, rv.li$	–	g	–	–	g	–	–	g	g	g	g	g
$A, E, U, lU.ri, l\varepsilon.ri, rv.ri$	–	g	–	–	g	–	–	g	g	g	g	g
$A, E, U, lE.i, lU.i$	–	x	–	–	x	–	–	x	x	x	x	x
$A, E, U, lE.I, lU.I, r\varepsilon.I$	–	x	–	–	x	–	–	x	x	x	x	x
$A, E, U, lE.I, rE.I, lv.I, rv.I$ . .	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
$A, E, U, lU.i, rU.i, l\varepsilon.i, r\varepsilon.i$. . .	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

LITERATURVERZEICHNIS

[1]. R. BAER - F. LEVI, Vollständige irreduzible Systeme von Gruppenaxiomen. S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl., 2. Abhandlung 1932, S. 3–12.

[2]. P. LORENZEN, Ein Beitrag zur Gruppenaxiomatik. Math. Z. *49* (1943–44), S. 313–327.

[3]. B. STOLT, Über Axiomensysteme, die eine abstrakte Gruppe bestimmen. Uppsala 1953.

[4]. —— Weitere Untersuchungen zur Gruppenaxiomatik. Arkiv för matematik Bd 3 (1954), S. 89–101.

[5]. —— Über irreduzible Axiomensysteme, die eine endliche abstrakte Gruppe bestimmen. Arkiv för matematik Bd 3 (1954), S. 113–115.

Tryckt den 6 oktober 1954

Uppsala 1954. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB