1.64 14 2 Communiqué le 11 Novembre 1964 par O. FROSTMAN et Å. PLEIJEL

Sur un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues

Par KARL DAGERHOLM

0. Introduction

Pour résoudre un système d'équations linéaires

$$\sum_{q=1}^{\infty} c_{pq} x_q = c_p, p = 1, 2, \dots \tag{1}$$

on cherche généralement les solutions $x = (x_1, x_2, \dots)$ comme éléments d'un espace linéaire normé (par exemple l^P avec $\|x\|^P = \sum |x_i|^P$) dans lequel la convergence *absolue* des séries dans (1) est garanti par une inégalité de Hölder.

M'inspirant de T. Carleman [1], j'ai étudié dans [3] et [4] comment résoudre certains systèmes de la forme (1) *sous la seule condition que les solutions rendent convergentes les séries du système consideré.* Ainsi j'ai démontré le théorème d'unicité suivant pour un système de la forme

$$\sum_{q=1}^{\infty} (p - aq)^{-1} x_q = c_p, p = 1, 2, 3 \dots \tag{2}$$

Si dans le plan complexe la constante a se trouve en dehors de l'intervalle réel $0 < a \leqslant 1$ le système homogène ($c_p = 0, p = 1, 2, 3, \dots$) n'admet pas d'autres solutions que $x = 0$. Si a est réel et $0 \leqslant a < 1$ il existe d'autres solutions.

Ici et dans des cas semblables il est entendu qu'on raye les termes qui deviennent infinis.

Dans le cas ou a n'est pas réel positif j'ai aussi examiné, dans [3], le systéme *inhomogène* au moyen d'une transformation de Laplace. En effet, ce système se transforme en l'équation intégrale suivante

$$\int_0^{\infty} (e^s - z)^{-1} \varphi(s) ds = f(z) \tag{3}$$

où
$$\varphi(s) = \sum_{q=1}^{\infty} x_q \exp(aqs),$$

et
$$f(z) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p z^{p-1}.$$

Si a n'est pas réel positif on peut choisir pour chemin d'intégration une courbe simple de 0 à ∞ satisfaisant aux conditions $\operatorname{Re} s > 0$, $\operatorname{Re}(as) < 0$. Soit γ l'image, dans le plan complexe de t, de cette courbe par la transformation $t=e^s$. Alors, la solution de (3) doit satisfaire à la relation

$$\lim\,(f(z')-f(z''))=2\pi\, i\, e^{-t'}\varphi(t'), \tag{4}$$

où z', z'' tendent vers t', point de γ, en approchant t' des deux côtés de γ. Pour la formule (4) voir par exemple [2], p. 267.

Notre but est ici la détermination d'une formule analogue à (3) mais *valable pour a réel positif*. Si $a>1$ nous allons voir que l'équation intégrale qu'on trouve, peut être résolue à l'aide d'une formule d'inversion analogue à (4).

1. Théorème

Si dans (2) on remplace a par b^{-1}, ac_p par d_p ce système devient

$$\sum_{q=1}^{\infty}(bp-q)^{-1}x_q=\mathrm{d}_p,\ p=1,2,3,\ldots \tag{5}$$

Le problème qui se pose est de chercher pour b réel positif toutes les solutions qui rendent les séries de (5) convergentes ou, ce qui est équivalent, qui sont telles que

$$\sum_{q=1}^{\infty}q^{-1}x_q \text{ converge.}$$

Soit dans le plan complexe de s un contour $\Gamma r\sigma, 0<r<\sigma\leqslant 1$, qui va de $\sigma+i\cdot 0$ à $\sigma-i\cdot 0$ et qui se compose du cercle $|s|=r, 0<\arg s<2\pi$, et des deux côtés d'une coupure suivant l'intervalle réel $r\leqslant\varrho\leqslant\sigma$.

Pour $\sigma=1$ nous écrivons $\Gamma_{r\sigma}=\Gamma_r$.

Nous nous proposons de démontrer le

Théorème: *Si b est réel positif, les conditions nécessaires et suffisantes pour que* (5) *admette une solution sont*

α. *que $f(z)=\sum_{p=1}^{\infty}d_p z^{p-1}$ soit holomorphe pour $|z|<1$,*

β. *que, si b est irrationnel, l'équation intégrale*

$$\int_{\Gamma_r}(s^b-z)^{-1}\varphi(s)ds=\sum_{q=1}^{\infty}(1-e^{-2\pi i b p})\,d_p z^{p-1} \tag{6}$$

ait une solution $\varphi(s)=\sum_{q=1}^{\infty}x_q s^{q-1}$ telle que $\sum_{q=1}^{\infty}q^{-1}x_q$ converge,

γ. *ou, si $b=m/n$ est rationnel, les entiers m, n étant premiers entre eux, que*

$$\int_{\Gamma_r}(s^b-z)^{-1}\varphi(s)ds-(\pi i)^{-1}z^{n-1}\int_{\Gamma_r}(s^m-z^n)^{-1}\varphi(s)\log s\,ds$$
$$=\sum_{p=1}^{\infty}(1-e^{-2\pi i b p})\,d_p z^{p-1}+2\sum_{k=1}^{\infty}d_{nk}z^{nk-1} \tag{6'}$$

ait une solution φ du même caractère. Si les conditions du théorème sont remplies, les x_q, coefficients de φ, nous donnent une solution du système.

Observons que dans (6) et (6') nous supposons que pour chaque z, $|z|<1$, on choisit r de sorte que $|z|<r^b$.

2. Les conditions du théorème sont nécessaires

Soit x une solution de (5) telle que $\sum_{q=1}^{\infty} q^{-1}x_q$ converge. À l'aide du théorème d'Abel il s'ensuit que l'intégrale

$$g(\sigma)=\int_{\sigma}^{1}\varphi(s)ds,$$

où $\varphi(s)=\sum_{q=1}^{\infty}x_q s^{q-1}$, existe comme limite finie de l'intégrale de σ à z, $|z|<1$, quand z tend vers 1. Donc $g(\sigma)$ a la limite 0 pour σ tendant vers 1 et $g'(\sigma)=-\varphi(\sigma)$. En intégrant par parties et en introduisant g on voit que

$$\int_{\sigma}^{\tau}(s^b-z)^{-1}\varphi(s)ds$$

tend uniformément vers 0 lorsque σ,τ tendent vers 1 et $|z|<r^b$. Donc

$$\lim_{\sigma\to 1}\int_{r}^{\sigma}(s^b-z)^{-1}\varphi(s)ds=\int_{r}^{1}(s^b-z)^{-1}\varphi(s)\,ds$$

uniformément pour $|z|<r^b$. D'une manière analogue

$$\lim_{\sigma\to 1}\int_{r}^{\sigma}(s^m-z^n)^{-1}\varphi(s)\log s\,ds=\int_{r}^{1}(s^m-z^n)^{-1}\varphi(s)\log s\,ds$$

uniformèment pour $|z|<r^{m/n}$.

À l'aide de la formule $\varphi(s)=\sum_{q=1}^{\infty}x_q s^{q-1}$ et par un développement en série de $(s^b-z)^{-1}$ on trouve que

$$\int_{\Gamma_{r\sigma}}(s^b-z)^{-1}\varphi(s)ds=\sum_{p=1}^{\infty}z^{p-1}\left(\sum_{q=1}^{\infty}x_q\int_{\Gamma_{r\sigma}}s^{-bp+q-1}ds\right). \tag{7}$$

α. Soit d'abord b irrationnel. Alors

$$\int_{\Gamma_{r\sigma}}s^{-bp+q-1}ds=(1-e^{-2\pi i bp})\,(bp-q)^{-1}\sigma^{-bp+q} \tag{8}$$

et
$$\int_{\Gamma_{r\sigma}}(s^b-z)^{-1}\varphi(s)ds=\sum_{p=1}^{\infty}(1-e^{-2\pi i bp})z^{p-1}\cdot\left(\sum_{q=1}^{\infty}(bp-q)^{-1}\sigma^{-bp+q}x_q\right). \tag{9}$$

Utilisons maintenant un lemme, qui est une conséquence immédiate de la formule de Cauchy.

Lemme. *Soit pour $0<\sigma<1$ une fonction $w(z,\sigma)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(\sigma)z^\nu$ holomorphe dans $|z|<1$, qui pour $\sigma\to 1$ tend uniformément vers $w(z)$ sur tout compact de $|z|<1$. Alors $w(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu$ est holomorphe dans $|z|<1$ et $\lim_{\sigma\to 1}a_\nu(\sigma)=a_\nu$.*

L'application à (9) de ce lemme nous donne l'équation (6) à cause de la convergence de $\sum_{q=1}^{\infty}(bp-q)^{-1}x_q$ et à l'aide du théorème d'Abel.

β. Dans le cas où b est rationnel, l'évaluation de (8) donne le résultat précédent seulement si $-bp+q-1$ n'est pas entier. Si $-bp+q-1$ est entier et différent de -1

le résultat devient 0 et si $-bp+q-1=-1$ on trouve le résultat $2\pi i$. En tenant compte de cela, un calcul nous donne, si $b=m/n$, où m et n sont premiers entre eux, et si $|z|<r^b<\sigma^b<1$, que

$$\int_{\Gamma_{r\sigma}}(s^b-z)^{-1}\varphi(s)ds$$
$$=\sum_{p=1}^{\infty}(1-e^{-2\pi ibp})z^{p-1}\cdot\left(\sum_{q=1}^{\infty}(bp-q)^{-1}\sigma^{-bp+q}x_q\right)+2\pi i\sum_{k=1}^{\infty}x_{mk}z^{nk-1}. \tag{10}$$

Dans la première somme, les termes où $-bp+q-1$ est entier sont rayés ou s'évanouissent à cause du facteur $1-e^{-2\pi ibp}$. La dernière somme comprend les contributions qu'on obtient pour $-bp+q-1=-1$, c'est à dire pour $p=nk$ et $q=mk$. Si σ tend vers 1 on trouve

$$\int_{\Gamma_r}(s^b-z)^{-1}\varphi(s)ds=\sum_{p=1}^{\infty}(1-e^{-2\pi ibp})d_pz^{p-1}+2\pi i\sum_{k=1}^{\infty}x_{mk}z^{nk-1}. \tag{11}$$

Considérons maintenant la fonction

$$z^{n-1}\int_{\Gamma_{r\sigma}}(s^m-z^n)^{-1}\varphi(s)\log s\,ds.$$

Pour $|z^n|<|s^m|$ cette fonction peut être développée en série de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty}z^{nk-1}\int_{\Gamma_{r\sigma}}s^{-mk}\varphi(s)\log s\,ds$$
$$=2\pi i\sum_{k=1}^{\infty}z^{nk-1}\left(-\sum_{q=1}^{\infty}x_q(mk-q)^{-1}\sigma^{q-mk}+\pi ix_{mk}+x_{mk}\log\sigma\right). \tag{12}$$

Si σ tend vers 1 on trouve

$$(\pi i)^{-1}z^{n-1}\int_{\Gamma_r}(s^m-z^n)^{-1}\varphi(s)\log s\,ds=-2\sum_{k=1}^{\infty}d_{nk}z^{nk-1}+2\pi i\sum_{k=1}^{\infty}x_{mk}z^{nk-1}. \tag{13}$$

La combinaison de (11) et (13) nous donne la relation (6′).

3. Les conditions du théorème sont suffisantes

Admettons que les conditions du théorème soient remplies. La convergence de $\sum_{q=1}^{\infty}q^{-1}x_q$ prouve que l'intégrale $\int_0^1\varphi(s)ds$ est finie. Ceci et la convergence de $f(z)=\sum_{p=1}^{\infty}d_pz^{p-1}$ pour $|z|<1$ nous donne comme conséquence de (6) que, avec $|z|<s^b<1$,

$$\lim_{\sigma\to1}\int_{\Gamma_{r\sigma}}(s^b-z)^{-1}\varphi(s)ds=\sum_{p=1}^{\infty}(1-e^{-2\pi ibp})d_pz^{p-1},$$

où la convergence est uniforme sur chaque compact de $|z|<1$ (on choisit toujours r de sorte que $|z|<r^b$ dans le domaine consideré). D'après le lemme dans le moment 2,

les limites des coefficients du membre gauche, donnés dans (9), sont égales aux coefficients de z^{p-1} du membre droit. Donc

$$\sum_{q=1}^{\infty}(bp-q)^{-1}x_q = d_p,\, p=1,2,3,\dots$$

D'une manière analogue, mais un peu plus compliqué, le même résultat découle de (6'), (10) et (12) dans le cas où b est rationnel.

4. Étude du cas $\mathbf{b<1}$

Si $b<1$ nous posons $t=s^b$ où t sera réel pour $\arg s=0$. Si nous supposons b irrationnel l'équation (6) se transforme en

$$\int_{\gamma}(t-z)^{-1}\varphi_1(t)dt = F(z), \tag{14}$$

où $$b^{-1}s^{1-b}\varphi(s)=\varphi_1(t) \quad \text{et} \quad F(z)=\sum_{p=1}^{\infty}(1-e^{-2\pi i b p})d_p z^{p-1}.$$

Le chemin d'intégration γ va de 1 à $\varrho=r^b$ en suivant l'axe réel, suit le cercle $|t|=\varrho$ jusqu'au point $t=\varrho e^{2\pi i b}$ et va enfin de ce point au $e^{2\pi i b}$ en suivant le rayon $\arg t=2\pi i b$.

Il est important que γ soit simple si $0<b<1$. Le membre gauche de (14) est une fonction holomorphe en dehors de γ. Donc (14) prouve qu'il est nécessaire que F, qui est holomorphe dans $|z|<1$, peut être prolongée analytiqement et d'une manière unique au travers des deux arcs

$$2\pi b<\arg z<2\pi \quad \text{et} \quad 0<\arg z<2\pi b$$

du cercle $|z|=1$.

De (14) il suit alors que (voir [2], p. 267)

$$2\pi i\,\varphi_1(t') = \lim\,(F(z')-F(z'')), \tag{15}$$

si z' et z'' tendent vers $t'=\varrho'\exp(iv)$, $0<v<2\pi b$ de manière que $|z'|<\varrho'<|z''|$. Dans (15) $F(z'')$ est le prolongement analytique de F.

Si $d_p=0$, $p=1,2,3,\dots$, on voit que $\varphi_1(t)=0$, donc $\varphi(s)=0$, donc $x_q=0$, $q=1,2,3,\dots$, *c'est à dire $x=0$ est la seule solution du système homogène.* D'une manière analogue on trouve que si les d_p, sans être tous 0 sont tels que F représente par exemple une fonction uniforme, le système inhomogène n'aura pas de solutions.

Remarque. Si $b<1$ est rationnel on tire de l'équation (6') des conclusions semblables à celles qui l'on a tirées de l'équation (6). Mais cela exige plusieurs calculs. L'équation (6') peut être écrite sous la forme

$$\int_{\Gamma_r}(s^b-z)^{-1}\varphi(s)ds-(\pi\,\mathrm{in})^{-1}\sum_{\nu=0}^{n-1}\int_{\Gamma_r}(\varepsilon_\nu s^b-z)^{-1}\varphi(s)\log s\,ds$$
$$=\sum_{p=1}^{\infty}(1-e^{-2\pi i b p})\,d_p z^{p-1}+2\sum_{k=1}^{\infty}d_{nk}z^{nk-1}. \tag{16}$$

$\varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}$ désignent des racines de l'équation $z^n - 1 = 0$. Posons $s^b = t$. L'argument de t est compris entre 0 et $b \cdot 2\pi$ où $b < 1$. De plus, on pose $\varphi(s)s^{1-b} = \varphi_1(t)$, $\varepsilon_\nu t = t_\nu$. L'argument de t_ν est compris entre $2\pi \cdot n^{-1} \cdot \nu$ et $2\pi n^{-1} \cdot (\nu + m)$ où $\nu = 0, 1, \ldots, (n-1)$. En posant $\varepsilon_\nu t = t_\nu$ la courbe γ dans (14) se transforme en des courbes γ_ν. Après une multiplication par le facteur b, le membre gauche de l'équation (16) se transforme en

$$\int_\gamma (t-z)^{-1}\varphi_1(t)dt - (\pi\,\mathrm{im})^{-1}\int_\gamma (t-z)^{-1}\varphi_1(t)\log t\,dt$$
$$- (\pi\,\mathrm{im})^{-1}\sum_{\nu=1}^{n-1}\int_{\gamma\nu}(t_\nu - z)^{-1}\varphi_1(t_\nu\varepsilon_\nu^{-1})\log(t_\nu\varepsilon_\nu^{-1})\,\varepsilon_\nu^{-1}dt_\nu.$$

On continue de la manière précédente.

BIBLIOGRAPHIE

1. CARLEMAN, T., Sur la théorie des équations intégrales et ses applications. (Verh. des Inter. Math. Kongresses Zürich 1932. Bd. I. Bericht und allg. Vorträge.)
2. GOURSAT, É., Cours d'analyse mathématique II. Quatrième édition. Paris 1924.
3. PERSSON (DAGERHOLM), K., Sur une classe de systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Uppsala 1938.
4. PERSSON, K., Sur un système d'équations linéaires. (Arkiv för mat., astr. och fysik, Uppsala 1945.)

Tryckt den 21 juni 1965

Uppsala 1965. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB