

Kriterien für diophantische Ungleichungen, indefinite Hauptformen und Hauptideale quadratischer Zahlkörper

Von CLAS-OLOF SELENIUS

1. Problemstellung¹

In der Theorie der quadratischen Zahlkörper sind die „diophantischen“ Ungleichungen

$$\left| x^2 - \frac{d}{4} y^2 \right| < \frac{1}{2} \sqrt{d} \quad (1)$$

$$\left| x^2 + xy - \frac{d-1}{4} y^2 \right| < \frac{1}{2} \sqrt{d}, \quad (2)$$

wo $d(>0)$ die Körperdiskriminante ist, von besonderer Bedeutung. Ihnen entsprechen in der Theorie der indefiniten binären quadratischen Formen die Darstellungen von ganzen Zahlen $< \frac{1}{2} \sqrt{d}$ mittels der Hauptformen².

Lagrange [8] fand eine *notwendige* Bedingung für die Lösungen der klassisch gewordenen Gleichung

$$q_0(x, y) = x^2 - Dy^2 = L, \quad 0 < |L| < \sqrt{D} = \frac{1}{2} \sqrt{d}, \quad (3)$$

wo $d=4D$ die Diskriminante der Hauptform $q_0(x, y) = (1, 0, -D)$ bezeichnet; x, y, L sind ganz rational und D eine natürliche nichtquadratische Zahl. Es ist (3) lösbar, wenn und nur wenn

$$L \in \{(-1)^v Q_v\}, \quad v=0, 1, \dots, \quad (4)$$

wo $\{Q_v\}$ die (endliche) Menge der Nenner der vollständigen Quotienten von der Zahl \sqrt{D} bezeichnet ([8], Euler [3]). Notwendig dafür, dass (x, y) eine (eigentliche) Lösung von (1) oder (3) ist, ist dass $|x|/|y|$ ein Näherungsbruch von \sqrt{D} ist.

¹ Über die Ergebnisse in Nr. 2 dieser Arbeit habe ich an der „Tagung über Zahlentheorie, insbesondere additive und analytische Zahlentheorie“ im September 1965 im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach vorgetragen.

² Vgl. z. B. Brandt [1], S. X, wo er sagt: „Wie schon Legendre gezeigt hat, werden auf diese Weise [Darstellung durch die Kettenbruchentwicklung] alle überhaupt darstellbaren Zahlen erhalten, deren Beträge unter \sqrt{D} liegen. Gewöhnlich finden sich darunter aber auch einige Zahlen, die über diese Schranke hinausgehen, jedoch unter $2\sqrt{D}$ bleiben. Eine nähere Charakterisierung dieser Zahlen fehlt aber“.

Wir werden (Nr. 2) diese notwendige Bedingung durch eine *sowohl notwendige als auch hinreichende* Bedingung ersetzen.

Wenn d allgemein die Diskriminante $b^2 - 4ac$ der binären quadratischen Form $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = (a, b, c)$ bezeichnet, so ergeben die Untersuchungen in Nr. 2 eine volle Charakterisierung der Zahlen, die durch die Hauptform $(1, 0, -D) = (1, 0, -d/4)$ darstellbar und absolut kleiner als $\frac{1}{2}\sqrt{d}$ sind:

$$|q_0(x, y)| < \frac{1}{2} \cdot \sqrt{d}, \quad d \equiv 0 \pmod{4}.$$

Diese Ergebnisse können wir aber auf allgemeine Diskriminanten verallgemeinern. Wir behandeln (Nr. 3–4) gleichzeitig die der Gleichung (3) entsprechende

$$x^2 + xy - Gy^2 = M, \quad 0 < |M| < \sqrt{G},$$

oder eigentlich

$$q_1(x, y) = x^2 + xy - \frac{D-1}{4} y^2 = M, \quad 0 < |M| < \frac{1}{2}\sqrt{D} = \frac{1}{2}\sqrt{d}, \quad d \equiv 1 \pmod{4}, \quad (5)$$

wo jetzt $d = D = 4G + 1$ die Diskriminante der Hauptform $q_1 = (1, 1, -(D-1)/4)$ ist. Für die Lösung von (5) sind sogar keine notwendigen Bedingungen bekannt¹.

Wir werden (Nr. 3–4) dagegen *sowohl notwendige als auch hinreichende* Bedingungen für die Lösungen von (2) oder (5) angeben.

Auf Grund der in Nr. 2–4 gewonnenen Ergebnisse löst sich vollständig das Darstellungsproblem, *die durch die indefiniten binären quadratischen Hauptformen der Diskriminante d*

$$q_\eta(x, y) = \left(1, \eta, -\frac{d-\eta}{4}\right), \quad \eta = 0, 1,$$

darstellbaren Zahlen $< \frac{1}{2}\sqrt{d}$ völlig zu charakterisieren (Nr. 5).

Dabei gewinnen wir *Kriterien für die Normen der ganzen Zahlen eines quadratischen Zahlkörpers*, die absolut kleiner als $\frac{1}{2}\sqrt{d}$ sind (Nr. 6).

2. Die Hauptform erster Art

Wir betrachten zuerst die Gleichung (3) oder die „diophantische“ Ungleichung

$$|q_0(x, y)| \equiv |x^2 - Dy^2| < \sqrt{D} (= \sqrt{d}/2). \quad (6)$$

Die klassische notwendige Bedingung, dass (x, y) eine eigentliche Lösung von (3) oder (6) ist, *nur wenn* $|x|/|y|$ ein *Näherungsbruch* von \sqrt{D} ist (vgl. z. B. [12]), wird durch folgende volle Charakterisierung ersetzt:

¹ Zwar gibt Perron [12], § 30, eine notwendige Bedingung, nur aber für den speziellen Fall $M = \pm 1$.

² D. i. ein Näherungsbruch der Diagonalkettenbruchentwicklung von \sqrt{D} ist. Diese halbregelmässige Entwicklung (vgl. [12] Kap. V, bes. § 43) ist dadurch vollständig charakterisiert, dass ihre Näherungsbrüche gekürzt sind und die Approximation $1/2t^{-2}$ zulassen (vgl. Koksma [7], S. 3, 26, 39).

Satz 1. Von den trivialen Lösungen (mit $xy = 0$) abgesehen, ist (x, y) eine eigentliche Lösung von (6), wenn und nur wenn $|x|/|y|$ ein Diagonalnäherungsbruch von \sqrt{D} ist².

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass (x, y) eine eigentliche Lösung von (6) ist. Es ist also jedenfalls $|x|/|y|$ ein Näherungsbruch von \sqrt{D} , d. h. ein Näherungsbruch, sagen wir A_{v-1}/B_{v-1} , der regelmässigen Kettenbruchentwicklung von \sqrt{D} , und damit

$$\left. \begin{aligned} |x| &= A_{v-1} \\ |y| &= B_{v-1} \end{aligned} \right\} \text{für irgendein } v \ (v = 1, 2, \dots). \tag{7}$$

Wäre $|x|/|y|$ dann kein Diagonalnäherungsbruch von \sqrt{D} , also (vgl. Minkowski [10], [7] oder [12]) definitionsgemäss $|\sqrt{D} - |x|/|y|| > \frac{1}{2} y^2$, so hätten wir

$$\left| \sqrt{D} - \frac{A_{v-1}}{B_{v-1}} \right| > \frac{1}{2 B_{v-1}^2}.$$

Wegen $A > 0, B > 0$ ergibt sich dann

$$|A_{v-1}^2 - DB_{v-1}^2| > \frac{1}{2 B_{v-1}} (A_{v-1} + B_{v-1} \sqrt{D}) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{D} + \frac{A_{v-1}}{B_{v-1}} \right).$$

Nun sind bekanntlich alle Näherungsbrüche ($v - 1 \geq 0$) grösser als oder gleich $A_0/B_0 = [\sqrt{D}]$, weshalb

$$|A_{v-1}^2 - DB_{v-1}^2| > \frac{1}{2} ([\sqrt{D}] + [\sqrt{D}]) = [\sqrt{D}],$$

wo $[x]$, wie üblich, die grösste ganze Zahl nicht grösser als x bezeichnet. Als eine ganze Zahl müsste dann $|x^2 - Dy^2| > \sqrt{D}$ sein, entgegen der Voraussetzung. Der Bruch x/y gehört daher der Menge der Diagonalnäherungsbrüche an¹.

Wenn umgekehrt x/y ein Diagonalnäherungsbruch ist, so gilt (7) und wegen der Irreduzibilität der beiden Brüche auch $x = A_{v-1}, y = B_{v-1}$ mit

$$\left| \sqrt{D} - \frac{A_{v-1}}{B_{v-1}} \right| < \frac{1}{2 B_{v-1}^2}.$$

Diesmal ergibt sich

$$|A_{v-1}^2 - DB_{v-1}^2| < \frac{1}{2 B_{v-1}} (A_{v-1} + B_{v-1} \sqrt{D}) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{D} + \frac{A_{v-1}}{B_{v-1}} \right).$$

Es gilt aber immer $A_{v-1}/B_{v-1} \leq A_1/B_1 \leq [\sqrt{D}] + 1$ und demnach

$$|A_{v-1}^2 - DB_{v-1}^2| < \frac{1}{2} ([\sqrt{D}] + 1 + [\sqrt{D}] + 1) = [\sqrt{D}] + 1.$$

¹ Die Beweismethode Chrystal's [2] (vgl. Le Veque [9], Teil I, Th. 9.8) reicht natürlich gar nicht aus, um unseren Satz zu beweisen.

Wegen der Irrationalität von \sqrt{D} folgt dann auch

$$|A_{v-1}^2 - DB_{v-1}^2| = |x^2 - Dy^2| = |q_0(x, y)| < \sqrt{D},$$

das bedeutet: (x, y) befriedigt die Gleichung (6). Der Satz ist damit bewiesen.

3. Die Hauptform zweiter Art

Wir behandeln nun die Gleichung (5) oder die „diophantische“ Ungleichung

$$|q_1(x, y)| \equiv |x^2 + xy - Gy^2| \leq \sqrt{G}, \quad G = \frac{D-1}{4} = \frac{d-1}{4}, \quad (8)$$

und zwar zunächst den Fall, dass G keine Quadratzahl ist. Der Fall $G = g^2$ (g ganz rational) wird in Nr. 4 auseinandergesetzt. Das Polynom q_1 in (8) ist gleich der Norm der ganzen algebraischen Zahl $x + \omega y$ in dem Fall, dass d ungerade $= 4G + 1$ ist. Wir zeigen

Satz 2. *Ist $D \equiv 1 \pmod{4}$ und $G = (D-1)/4$ keine Quadratzahl, so ist (x, y) , $x > 0$, $y > 0$, eine eigentliche Lösung der „diophantischen“ Ungleichung*

$$|x^2 + xy - Gy^2| < \sqrt{G}, \quad (9)$$

wenn und nur wenn x/y ein Diagonalnäherungsbruch von $(-1 + \sqrt{D})/2$ ist.

Beweis. Die Perronsche Beweismethode (für den Fall $G = \pm 1$) kann kaum verallgemeinert werden. Wir schlagen ganz andere Wege ein und verwenden u. a. ein Ergebnis von Hurwitz [6], § 4.

1) Zunächst nehmen wir an, (x, y) sei eine Lösung von (8) oder (9). Das Hurwitzsche Ergebnis besagt folgendes: Die eigentlichen Lösungen der Gleichung (vgl. (3))

$$q_0(x, y) = L', \quad 0 < |L'| < 2\sqrt{D}, \quad (10)$$

in positiven relativen Primzahlen x, y werden durch die (im Hurwitzschen Sinn) sog. „Näherungsbrüche“ von der Zahl \sqrt{D} geliefert. Unter dem Ausdruck „Näherungsbruch“ versteht Hurwitz einen gewissen Bruch der von ihm aufgestellten sog. Fareyschen Reihe der betreffenden Zahl (loc. cit. § 3). Diese „Näherungsbrüche“ sind, obwohl eigentlich nicht in [6] erwähnt, im grossen ganzen den „Näherungen“ Perron's identisch (vgl. [12] § 15-16)¹.

Wir formen deshalb (9) in folgender Weise um:

$$|(2x + y)^2 - (4G + 1)y^2| \leq 4[\sqrt{G}], \quad (11)$$

¹ Der Hurwitzsche Satz repräsentiert eine *notwendige* Bedingung für die Lösungen von (10), welche Gleichung ich in einer künftigen Arbeit untersuchen werde. Es ist mir bereits gelungen, diese notwendige Bedingung zu verschärfen, und es ist unser Bestreben, sie durch ein vollständiges Kriterium ersetzen zu können. Darüber habe ich im Mathematischen Institut Uppsala vorgetragen.

wo wegen der Voraussetzung \sqrt{G} irrational war und daher durch $[\sqrt{G}]$ ersetzt werden konnte. Nun gilt

$$4[\sqrt{G}] \leq [4\sqrt{G}] \leq [2\sqrt{4G+1}] < 2\sqrt{4G+1} = 2\sqrt{D}$$

(D ist ja nicht-quadratisch). Auch $2x+y$ und y sind relative Primzahlen, und da $4G+1$ kein Quadrat war, so ist die Lösungsmenge der Ungleichung (9) eine Teilmenge von der Lösungsmenge $\{2x+y, y, x \geq 1, y \geq 1\}$ der Ungleichung

$$|q_0(2x+y, y)| = |(2x+y)^2 - Dy^2| < 2\sqrt{D}. \tag{12}$$

Die Lösungsmenge von (12) ist ihrerseits eine Teilmenge der totalen Menge der Näherungen von \sqrt{D} .

Wir bezeichnen die Näherungen von \sqrt{D} mit

$$K_n^{(g)} = \frac{C_{n-1} + gC_n}{D_{n-1} + gD_n}; \quad n = -1, 0, \dots; \quad g = 0, 1, \dots, c_{n+1} - 1; \quad g = n = 0 \text{ ausgeschlossen}, \tag{13}$$

wo C_n/D_n die Näherungsbrüche und c_n die Teilnenner der Kettenbruchentwicklung $[c_0, c_1, \dots]$ von \sqrt{D} sind. Dann gilt allgemein

$$\begin{aligned} \frac{0}{1} < K_{-1}^{(0)} < K_{-1}^{(1)} < \dots < K_1^{(0)} < K_1^{(1)} < \dots < K_3^{(0)} < K_3^{(1)} < \dots < [\sqrt{D}] \\ &< \dots < K_4^{(1)} < K_4^{(0)} < \dots < K_2^{(1)} < K_2^{(0)} < \dots < K_0^{(1)}, \end{aligned}$$

wo bemerkt sei, dass z. B. Perron nicht mit K_{-1} rechnet ([12], § 16). Es gilt also

$$K_n^{(g)} \geq K_1^{(0)} = \frac{C_0}{D_0} = [\sqrt{D}] \geq 2[\sqrt{G}] \tag{14}$$

für alle $n \geq 0$.

a) Es sei dann zuerst $n \neq -1$. Aus (11) und (14) ergibt sich in diesem Fall

$$\frac{2x+y}{y} \geq 2[\sqrt{G}]. \tag{15}$$

Wir schreiben jetzt die ursprüngliche Ungleichung (8)

$$\left| x - y \frac{\sqrt{D}-1}{2} \right| \left(x + y \frac{\sqrt{D}+1}{2} \right) \leq [\sqrt{G}],$$

also

$$y^2 \left| \frac{x}{y} - \frac{\sqrt{D}-1}{2} \right| \left(\frac{2x+y}{y} + \sqrt{D} \right) \leq 2[\sqrt{G}].$$

Auf Grund von (15) erhalten wir dann a fortiori für (9)

$$\left| \frac{x}{y} - \frac{-1 + \sqrt{D}}{2} \right| \leq \frac{1}{y^2} \frac{2[\sqrt{G}]}{2[\sqrt{G}] + \sqrt{D}} < \frac{1}{2y^2},$$

was aber wegen der Definition der Diagonalkettenbrüche ([10]; [12] § 45) darauf hinausläuft, dass x/y ein Diagonalnäherungsbruch von der Zahl $(-1 + \sqrt{D})/2$ ist.

b) Es sei dann in (13) $n = -1$. Wäre damit $(2x + y)/y$ eine Näherung der Form K_{-1} , also gleich $1/1, 2/1, \dots$, oder $(c_0 - 1)/1$, so ist $y = 1$ notwendig (das gilt ausserdem für $K_1^{(0)} = c_0/1$ und kann auch für $K_2^{(0)} = c_0 + 1/c_1$ gelten). Gemäss (11) befriedigt x dann die Ungleichung

$$D - (2x + 1)^2 \leq 4[\sqrt{G}] \leq 2[\sqrt{D}]. \quad (16)$$

Nun ist $D \geq 5$ und somit $D > 2[\sqrt{D}]$, also

$$0 < D - 2[\sqrt{D}] \leq (2x + 1)^2 < [\sqrt{D}]^2.$$

Auf Grund von $D \geq [\sqrt{D}]^2 + 1$ ergibt sich dann

$$[\sqrt{D}]^2 + 1 - 2[\sqrt{D}] \leq D - 2[\sqrt{D}] \leq (2x + 1)^2 < [\sqrt{D}]^2,$$

woraus notwendig $2x + 1 = [\sqrt{D}] - 1$ folgt. In diesem Fall gilt also in (16) $D - ([\sqrt{D}] - 1)^2 \leq 2[\sqrt{D}]$, daher $D \leq [\sqrt{D}]^2 + 1$ und somit ist notwendig $D = [\sqrt{D}]^2 + 1$. Es muss dann $D - 1$, und damit auch $4G$, eine Quadratzahl sein, woraus dasselbe auch für G folgt. Jetzt war aber voraussetzungsgemäss ein quadratisches G ausgeschlossen. In dem betrachteten Fall ist also der Lösungsbruch nicht von der Form K_{-1} .

Damit ist der erste Teil unseres Beweises erbracht. Ist (x, y) eine eigentliche Lösung von (9) und G kein Quadrat, so ist x/y ein Diagonalnäherungsbruch der Zahl $(-1 + \sqrt{D})/2$.

2) Es sei umgekehrt x/y ein derartiger Diagonalnäherungsbruch. Dann ist a fortiori (Minkowski [10]) x/y ein (gewöhnlicher) Näherungsbruch derselben Zahl, A_{v-1}/B_{v-1} , und zwar einer, der der Bedingung

$$\left| \frac{-1 + \sqrt{D}}{2} - \frac{A_{v-1}}{B_{v-1}} \right| < \frac{1}{2B_{v-1}^2}, \quad v > 0 \quad (17)$$

genügt. Dann gilt auch

$$B_{v-1}^2 \left| \frac{A_{v-1}}{B_{v-1}} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{D}}{2} \right| \cdot \left(\frac{A_{v-1}}{B_{v-1}} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{D}}{2} \right) < \frac{1}{2} \left(\frac{A_{v-1}}{B_{v-1}} + \frac{1 + \sqrt{D}}{2} \right). \quad (18)$$

Wegen $A_{v-1}/B_{v-1} \leq A_1/B_1 \leq A_0/B_0 + 1$ folgern wir

$$\left| A_{v-1}^2 + A_{v-1} B_{v-1} - \frac{D-1}{4} B_{v-1}^2 \right| = |q_1(A_{v-1}, B_{v-1})| = |q_1(x, y)|$$

$$< \frac{1}{2} \left(\left[\frac{-1 + \sqrt{D}}{2} \right] + 1 + \frac{1 + \sqrt{D}}{2} \right) < \frac{1}{2} \left(\frac{-1 + \sqrt{D}}{2} + \frac{\sqrt{D} + 3}{2} \right) = \frac{1 + \sqrt{D}}{2}.$$

Auf Grund der Ganzzahligkeit haben wir dann

$$2|q_1(x, y)| \leq [\sqrt{D}] + 1. \tag{19}$$

In (19) ist aber Gleichheit nicht möglich. Infolge (18) wäre dann wegen der Eigenschaften der Ganzzahlfunktion $[x]$ für $v \geq 1$

$$\frac{A_{v-1}}{B_{v-1}} > 2|q_1(x, y)| - \frac{1 + \sqrt{D}}{2} = [\sqrt{D}] + 1 - \frac{1 + \sqrt{D}}{2} > \frac{[\sqrt{D}]}{2} > \frac{-1 + \sqrt{D}}{2} > \frac{A_0}{B_0}. \tag{20}$$

Da nach (19) aber $[\sqrt{D}]$ ungerade ist, so gilt

$$\frac{[\sqrt{D}]}{2} = \left[\frac{-1 + \sqrt{D}}{2} \right] + \frac{1}{2} \left(> \frac{-1 + \sqrt{D}}{2} \right). \tag{21}$$

Auf Grund der Eigenschaften der Näherungsbrüche schliessen wir dann

$$\frac{A_1}{B_1} \leq \left[\frac{-1 + \sqrt{D}}{2} \right] + \frac{1}{2},$$

a fortiori also
$$\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} \leq \left[\frac{-1 + \sqrt{D}}{2} \right] + \frac{1}{2}, \quad m \geq 2. \tag{22}$$

Durch Vergleich von (20) und (21) mit (22) ergibt sich dann $v = 1$. Nach (20) ist aber die Zahl $(-1 + \sqrt{D})/2$ kleiner als ihr Näherungsbruch A_{v-1}/B_{v-1} , woraus $v - 1$ ungerade wird. Wir haben also einen Widerspruch: in (19) ist das Gleichheitszeichen nicht möglich.

Wenn x/y ein Diagonalnäherungsbruch ist, gilt also sicher nach (19)

$$2|q_1(x, y)| < [\sqrt{D}] + 1,$$

auf Grund der Irrationalität von \sqrt{D} daher $2|q_1(x, y)| < \sqrt{D}$. Daraus folgt dann

$$|q_1(x, y)| \leq \left[\frac{\sqrt{D}}{2} \right] = [\sqrt{G}], \quad (23)$$

denn es war $D=4G+1$. Nach der Voraussetzung, dass G keine Quadratzahl war, ergibt sich schliesslich $|q_1| < \sqrt{G}$, womit der letztere Teil und somit der ganze Satz bewiesen ist.

4. Fortsetzung; der Fall $G=g^2$

Jetzt untersuchen wir den noch ausstehenden Fall, dass in (8) G eine Quadratzahl ist ($=g^2$, $g>0$), D also von der Form $4g^2+1$.

1) Es sei dann (x, y) eine Lösung von (8). In dem 1. Teil des obigen Beweises (Nr. 3) wurde im Fall a), als $n \neq -1$ war, kein Gebrauch von der Voraussetzung $G \neq g^2$ gemacht. Im Fall b), $n = -1$, wurde dagegen gezeigt, dass D von der Form $4g^2+1$ sein muss. Dann war in (11) notwendig $(2x+y)/y = [\sqrt{D}] - 1$, aber auch $y=1$, also

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2}[\sqrt{D}] - 1}{1} = \frac{[\sqrt{G}] - 1}{1} = \frac{g-1}{1}.$$

Dieser Bruch ist identisch mit dem Näherungsbruch A_0/B_0 von $(-1 + \sqrt{D})/2$ (für den speziellen Wert $D=5$ erhält man die Lösung $(x, y) = (0, 1)$, die ja wegen $x > 0$ eigentlich ausgeschlossen war, obwohl doch in der Tat eine Lösung; A_0/B_0 ist dann $= \frac{0}{1}$), denn es gilt

$$\frac{A_0}{B_0} = \left[\frac{-1 + \sqrt{D}}{2} \right] = \left[\frac{[\sqrt{4G+1}] - 1}{2} \right] = \left[\frac{2[\sqrt{G}] - 1}{2} \right] = \left[\frac{2g-1}{2} \right] = g-1. \quad (24)$$

In diesem Fall ist aber $A_0/B_0 = (g-1)/1$ kein Diagonalnäherungsbruch. In der Kettenbruchentwicklung $[c_0, c_1, \dots]$ von $(-1 + \sqrt{D})/2$ muss nämlich $c_1=1$ sein, denn vermöge (24) ergibt sich ($c_0 = A_0/B_0$)

$$c_1 = \left[\frac{2}{\sqrt{4g^2+1} - 2g + 1} \right] < 2.$$

Wenn $c_1=1$ ist, kann aber (vgl. [12], S. 179) A_0/B_0 kein Diagonalnäherungsbruch sein. Vgl. Beispiel 3 in Nr. 7.

2) Es sei nun umgekehrt x/y ein Diagonalnäherungsbruch von $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{4g^2+1})$. Dann gilt der ganze Teil 2 des Beweises von Satz 2 von (17) bis (23), denn dieser war mit \sqrt{D} durchgehend geführt. Am Schluss kommt noch die Möglichkeit der Gleichheit in (23) hinzu:

$$|q_1(x, y)| = \left[\frac{\sqrt{D}}{2} \right] = [\sqrt{G}] = g,$$

welcher Fall auch durch Zahlenbeispiele (z. B. $D=101$, vgl. Nr. 7, Beispiel 3) bestätigt wird.

In diesem Fall ist die Kettenbruchentwicklung von $(-1 + \sqrt{D})/2$:

$$\frac{-1 + \sqrt{4g^2 + 1}}{2} = [g - 1, \overline{1, 1, 2g - 1}], \tag{25}$$

(die Periode durch Überstreichung kenntlich gemacht), denn die rekursive Entwicklung (vgl. [2], § 20) liefert die vollständigen Quotienten $(P_v + \sqrt{D})/Q_v$, $v=0, 1, \dots$;

$$\begin{aligned} P_0 &= -1, \quad Q_0 = 2, \quad c_0 = g - 1, \\ \left\{ \begin{aligned} P_1 &= (g - 1) \cdot 2 - (-1) = 2g - 1, \\ Q_1 &= \frac{1}{2} \{4g^2 + 1 - (2g + 1)^2\} = 2g, \quad c_1 = \left[\frac{2g - 1 + \sqrt{4g^2 + 1}}{2g} \right] = 1, \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} P_2 &= 1 \cdot 2g - (2g - 1) = 1, \\ Q_2 &= \frac{1}{2g} (4g^2 + 1 - 1) = 2g, \quad c_2 = \left[\frac{1 + \sqrt{4g^2 + 1}}{2g} \right] = 1, \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} P_3 &= 1 \cdot 2g - 1, \\ Q_3 &= \frac{1}{2g} \{4g^2 + 1 - (2g - 1)^2\} = 2, \quad c_3 = \left[\frac{2g - 1 + \sqrt{4g^2 + 1}}{2} \right] = 2g - 1. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Die entsprechende Diagonalkettenbruchentwicklung wird

$$g - \frac{1}{2 + \frac{1}{[2g - 1, 1, 1]}}. \tag{26}$$

In (25) ist also A_0/B_0 kein Diagonalnährungsbruch, jedoch aber dann A_1/B_1 . Die zu den darauffolgenden Perioden gehörigen Näherungsbrüche sind aber alle Diagonalnährungsbrüche (vgl. Perron [12], S. 176, die Regeln Pippings [13], S. 6).

Gilt in diesem Fall Gleichheit in (8), mit anderen Worten $|x^2 + xy - g^2 y^2| = g$, so ist x/y gleich einem der Näherungsbrüche

$$\frac{A_s}{B_s}, \quad s \equiv 0, 1 \pmod{3}, \text{ der Entwicklung (25).}$$

Die Ergebnisse dieser und der vorigen Nummer fassen wir zusammen in

Satz 3. Die „diophantische“ Ungleichung

$$|x^2 + xy - Gy^2| \leq \sqrt{G},$$

wo $4G+1$ keine Quadratzahl ist, hat die eigentliche Lösung $x=a (>0)$, $y=b (>0)$, wenn und nur wenn a/b ein Diagonalnährungsbruch der Zahl $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{4G+1})$ ist.

Alleinige und triviale Ausnahme ist der Sonderfall G = einer Quadratzahl $= g^2$ ($g > 0$) und dann nur für $a=g-1$, $b=1$ (a/b ist dann zwar ein Näherungsbruch, doch nicht ein Diagonalnährungsbruch, der genannten Zahl).

5. Darstellung von Zahlen durch die Hauptformen

Die in Satz 1 und 3 ausgesprochenen neuen Ergebnisse gestatten uns, eine vollständige Charakterisierung der durch indefinite, binäre, quadratische Hauptformen darstellbaren Zahlen absolut $< \frac{1}{2}\sqrt{d}$ anzugeben.

Wir bemerken zunächst, dass die Hauptform

$$\left(1, 1, -\frac{D-1}{4}\right) = x^2 + xy - \frac{D-1}{4} y^2$$

durch die unimodulare Substitution

$$x' = x - y, \quad y' = y$$

in die Form $(1, -1, -(D-1)/4)$ übergeht. Deshalb sind in Satz 3, wenn man auf die Forderung $a, b > 0$ verzichtet, von den Lösungsvierern $\pm a/\pm b$ diejenigen mit $ab < 0$ Diagonalnährungsbrüche von $\frac{1}{2}(+1 + \sqrt{D})$, während die übrigen eben-solche von $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{D})$ sind. Die ersteren sind dann gleich $(a_v + b_v)/b_v$, wenn a_v/b_v die Diagonalnährungsbrüche von $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{D})$ bezeichnen. In dem Sonderfall $G=g^2$ ist (vgl. (25)) die regelmässige Entwicklung

$$\frac{+1 + \sqrt{4g^2 + 1}}{2} = [g, \overline{1, 1, 2g-1}]$$

und damit die Diagonalkettenbruchentwicklung nur im Anfangsglied von den entsprechenden Entwicklungen (25) bzw. (26) verschieden.

Die zwei Fälle können jetzt vermittle der Diskriminante d vereinigt werden. Unsere Ergebnisse fassen wir im folgenden **Hauptsatz** zusammen.

Satz 4. *Für die unendlich vielen Darstellungen (x, y) einer gegebenen Zahl vom Betrag $< \frac{1}{2}\sqrt{d}$ durch eine der indefiniten quadratischen Hauptformen erster oder zweiter Art*

$$q_\eta(x, y) = \left(1, \eta, -\frac{d-\eta}{4}\right), \quad \eta = 0, 1,$$

mit der Diskriminante d gilt folgendes Kriterium:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass (x, y) ($x \neq 0, y \neq 0$) eine eigentliche Lösung der Ungleichung

$$|q_\eta(x, y)| < \frac{1}{2} \sqrt{d}$$

sei, ist dass $|x|/|y|$ ein Diagonalnäherungsbruch von $\frac{1}{2}(\mp\eta + \sqrt{d})$ ist, je nachdem $xy \geq 0$ ist.

Alleinige und triviale Ausnahme ist der Sonderfall $\eta = 1, d = 4g^2 + 1 (g > 0)$, also die Hauptform zweiter Art $q_1(x, y) = (1, 1, -g^2)$, und dann nur für $x = g - 1, y = 1$ oder $x = -g, y = 1$. In diesem Fall wird nämlich die Zahl $-g = -\frac{1}{2}[\sqrt{d}]$ durch die Form

$$q_1(x, y) = q_1(g - 1, 1) = -g \quad \text{bzw.} \quad q_1(-g, 1) = -g$$

repräsentiert, obwohl $(g - 1)/1$ bzw. $|-g|/1$ kein Diagonalnäherungsbruch von der betreffenden Zahl

$$[g - 1, 1, 1, 2g - 1] \quad \text{bzw.} \quad [g, 1, 1, 2g - 1]$$

ist.

In der einfachen Ausdrucksform dieses Satzes weisen die Minkowskischen Diagonalkettenbrüche neue, fundamentale Eigenschaften auf, die ebenso bemerkenswert sind wie bei der klassischen Definition Minkowski's¹. Die Rolle, die die allgemeinen Diagonalkettenbrüche bei der speziellen Darstellung von quadratischen Irrationalzahlen spielen, ist mit der Rolle zu vergleichen, die den allgemeinen Idealkettenbrüchen bei der Lösung von (3) mit $L = 1$ (die „zyklische Methode“) zukommt.

Satz 5. Für die Darstellungen $(x, y), x > 0, y > 0$, einer Zahl vom Betrag kleiner als $\frac{1}{2} \sqrt{d}$ durch die Hauptformen

$$q_\eta(x, y) = x^2 + \eta xy - \frac{d - \eta}{4} y^2, \quad \eta = 0 \text{ oder } 1,$$

mit der Diskriminante $d > 0$ gilt das Kriterium

$$|q_\eta(x, y)| < \frac{1}{2} \sqrt{d} \quad \Leftrightarrow \quad y \cdot \left| y \frac{-\eta + \sqrt{d}}{2} - x \right| < \frac{1}{2}.$$

Ist x oder y negativ, gilt das Kriterium, falls x, y durch $|x|, |y|$ ersetzt werden, und zwar mit $\frac{1}{2}(\mp\eta + \sqrt{d})$, je nachdem $xy \geq 0$ ist.

Ausgeschlossen ist dabei der triviale Fall $\eta = 1, d = 4g^2 + 1 (g > 0)$ und dann $x = g - 1, y = 1$ oder $x = -g, y = 1$.

Die zwei in dem Kriterium vorkommenden „diophantischen“ Ungleichungen sind also äquivalent: ihre unendlichen Lösungsmengen sind identisch.

Beweis. Das Kriterium folgt nach Satz 4 aus der Definition der Diagonalkettenbrüche, denn die letztere Ungleichung gilt dann und nur dann wenn x/y ein Diagonalnäherungsbruch von $(-\eta + \sqrt{d})/2$ ist.

Wir erhalten somit eine Verallgemeinerung eines früheren Satzes:

¹ Vgl. Koksma [7], S. 39, wo u. a. gesagt wird: „Wir ... betonen nur die Tatsache, dass überhaupt eine solche Kettenbruchentwicklung von θ existiert, deren Näherungsbrüche mit den Brüchen von $F_2(\theta)$ zusammenfallen.“

Satz 6. Die endliche Menge der Zahlen, die absolut kleiner als $\frac{1}{2}\sqrt{d}$ sind und die durch die eine der zwei Hauptformen

$$q_\eta(x, y) = x^2 + \eta xy - \frac{d-\eta}{4} y^2, \quad \eta = 0 \text{ oder } 1,$$

mit der Diskriminante $d > 0$ eigentlich darstellbar sind, ist völlig bestimmt durch die Werte von $q_\eta(x, y)$, die sich ergeben, wenn x, y Zähler und Nenner der zum Anfangsglied und zur ersten Periode der Diagonalkettenbruchentwicklung von $(-\eta + \sqrt{d})/2$ gehörigen Näherungsbrüche sind (diese Werte von $q_\eta(x, y)$ sind nicht notwendig alle verschieden).

Rekursiv wird diese Menge von darstellbaren Zahlen so bestimmt, dass die Zahl $(-\eta + \sqrt{d})/2$ (gekürzt) in den Diagonalkettenbruch entwickelt wird und die Nenner S_v der vollständigen Quotienten notiert werden, bis dahin, wenn (für $\eta = 0$ bzw. $\eta = 1$) zum ersten Mal $S_k = -1$ bzw. $S_k = \pm 2$ auftritt. Die gesuchte Menge der darstellbaren Zahlen ist dann durch die Menge

$$\{(-1)^{v+m} S_v\} \quad \text{bzw.} \quad \left\{(-1)^{v+m} \frac{S_v}{2}\right\}, \quad v = 0, 1, \dots, k,$$

also durch die Menge $\{(-1)^{v+m} S_v/(1+\eta)\}$, bestimmt. Hierbei ist v der Schritindex und m die Anzahl der Male, wo in dem betreffenden Schritt der Entwicklung -1 als Teilzähler gewählt war.

Beweis. Nach dem Hauptsatz ist $|q_\eta(x, y)| < \frac{1}{2}\sqrt{d}$, wenn und nur wenn $|x|/|y|$ ein Diagonalnäherungsbruch von $\frac{1}{2}(\mp\eta + \sqrt{d})$ ist, $\text{sgn}(\mp\eta) = -\text{sgn} xy$ (es spielt dann keine Rolle, ob im Falle $\eta = 0$ diese Zahl unverkürzt bleibt, denn die Teilnenner sind ja die gleichen). Hier kann man sich aber auf positive x, y beschränken, denn der Wertevorrat $q_\eta(x, y)$ ist (vgl. Anfang dieser Nr.) schon durch diese bestimmt.

Weil x/y der Menge der (gewöhnlichen) Näherungsbrüche angehört und für diese bekanntlich ([3] bzw. [12], S. 109, mit veränderten Zeichen) die Beziehungen

$$\begin{aligned} A_{v-1}^2 - DB_{v-1}^2 &= (-1)^v Q_v \\ A_{v-1}^2 + A_{v-1} B_{v-1} - GB_{v-1}^2 &= (-1)^v \frac{1}{2} Q_v \end{aligned} \tag{27}$$

gelten, wo die Q_v (vgl. Nr. 4) die Nenner der vollständigen Quotienten von $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{d})$ bezeichnen, so gehören die Werte von $|q_\eta(x, y)|$ der Menge von Q_v an. Diese Menge ist bekanntlich schon durch die erste Periode der regelmässigen Entwicklung (über)bestimmt. Die Menge von $q_\eta(x, y)$ selbst ist gemäss (27) durch die $Q_v, v = 0, 1, \dots, k$ (= die Periodenlänge), bestimmt (dann ist, wie üblich, $A_0/B_0 = 1/0$ zu setzen, und folgerichtig der vorher ausgeschlossene Wert $q(1, 0) = +1$ mitzunehmen). Denn ist k gerade, so folgt aus Muir's Theorem und wegen der Periodizität

$$(-1)^v Q_v = (-1)^{v+nk} Q_{v+nk} = (-1)^{k-v+nk} Q_{k-v+nk}, \quad n \in N,$$

so dass sogar die Menge der Zahlen $q_\eta(x, y)$ schon durch die $Q_v, v = k/2, \dots, k$,

bestimmt ist. Ist k ungerade, so ist $(-1)^v Q_v = -(-1)^{k-v} Q_{k-v}$, und die erste Periode reicht zu, um die $q_n(x, y)$ zu bestimmen, wenn nur noch Q_0 mitgenommen wird.

Um die Richtigkeit des letzteren Teils des Satzes einzusehen, bemerken wir, dass $\{S_v\} \subset \{Q_v\}$ gilt, und dass jedesmal, wenn bei dem Entwickeln in den Diagonalkettenbruch ein negativer Teilzähler gewählt wird (vgl. Minkowski [10], oder [12], § 45, § 40, II, bes. Satz 5.30), so wird ein Näherungsbruch übersprungen und damit entsteht auch ein Indexunterschied zwischen Q und S .

Somit ist das Darstellungsproblem vollständig gelöst.

6. Die Normen algebraischer Zahlen

Da die Theorien der unbestimmten Gleichungen und Ungleichungen, der quadratischen Formen und der algebraischen Zahlen meistens ohne Vermittlung der vereinigenden Kettenbruchtheorie entwickelt worden sind, können die hier gefundenen Eigenschaften der Lösungen der Ungleichungen (6) und (8) auch auf die Theorie der Normen übertragen werden.

Die ganzen Zahlen des quadratischen Zahlkörpers $K = Q(\sqrt{d})$ sind bekanntlich von der Form $x + \omega y$, wo $1, \omega$ eine Ganzheitsbasis $= 1, \sqrt{d}$ bzw. $1, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{d})$ ist, je nachdem $d \equiv 0$ oder $1 \pmod{4}$ ist. Für die Normen der Zahlen ergibt sich $x^2 - Dy^2$ bzw. $x^2 + xy - (D-1)/4 y^2$, also $q_n(x, y)$,

Wir haben demnach

Satz 7. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Norm der ganzen quadratischen Zahl $x + \omega y$, wo ω die Ganzheitsbasis, absolut kleiner als $\frac{1}{2}\sqrt{d}$ sei ($d =$ die Diskriminante), ist dass $|x|/|y|$ ein Diagonalnäherungsbruch von $\omega - \eta$ bzw. ω ist, je nachdem $xy \geq 0$. (η Divisionsrest von $D/4$).

Triviale Ausnahmen sind die Zahlen $x + y(1 + \sqrt{4g^2 + 1})/2$ ($g > 0$) für $x = g - 1$, $y = 1$ oder $x = -g$, $y = 1$ mit der Norm $-g = -\frac{1}{2}[\sqrt{d}]$ (vgl. Satz 4).

Nach dem Minkowskischen Determinantensatz (z. B. [14], [4], § 32, [5] I) gibt es Paare ganzer Zahlen (x, y) , die nicht beide Null sind und der Normenungleichung

$$|N(x + y\sqrt{D})| < 2\sqrt{D}$$

genügen. Aus Satz 7 und den vorangegangenen Ergebnissen (vgl. Satz 6) folgt

Satz 8. In jedem Körper $K = Q(\sqrt{d})$ gibt es Hauptideale $\alpha = (a + b\sqrt{D})$, deren Norm absolut kleiner ist als \sqrt{D} . Die Menge der von 0 und ± 1 verschiedenen ganzen Zahlen, deren Normenbetrag höchstens $[\sqrt{D}]$ ist, ist durch die Menge der Diagonalnäherungsbrüche von \sqrt{D} bestimmt.

Die möglichen Anzahlen der Zahlen $< \sqrt{D}$ eines vollständigen Restsystems nach dem Hauptideal α ist durch die zum Anfangsglied und zur ersten Periode der Diagonalkettenbruchentwicklung von \sqrt{D} gehörigen Näherungsbrüche bestimmt.

7. Numerische Beispiele

Zur Erläuterung mögen einige Zahlenbeispiele angeführt werden.

Beispiel 1. In der „diophantischen“ Ungleichung

$$|q_0(x, y)| = |x^2 - 276 y^2| < \sqrt{276}$$

ist die totale Menge der Lösungen identisch mit der Menge der Diagonalnährungsbrüche von $\frac{1}{2} \sqrt{d} = \sqrt{276}$. Entwicklung von $\sqrt{276}$ in den Diagonalkettenbruch ergibt schnell (direkt nach der Methode Minkowski's [10], vgl. [12], Satz 5.30, oder über die regelmässige Entwicklung nach den Regeln Pipping's [13])

$$\frac{x}{y} = \frac{17}{1}, \frac{33}{2}, \frac{50}{3}, \frac{83}{5}, \frac{216}{13}, \frac{515}{31}, \frac{1246}{75}, \frac{1761}{106}, \frac{3007}{181}, \frac{7775}{468}, \dots \quad (28)$$

als Diagonalnährungsbrüche der ersten Periode (der zum Bruch

$$\frac{A_{v-1}}{B_{v-1}} = \frac{7775}{468}$$

gehörigen Nenner S_v erweist sich als 1). Die entsprechenden entweder während des Entwickelns entstehenden oder auch aus (28) mittels (3) berechneten S_v sind der Reihe nach

$$S_v = |q_0(x, y)| = 1, 13, 15, 16, 11, 12, 11, 16, 15, 13, 1, \dots,$$

wobei schon die erste halbe Periode die Gesamtheit der repräsentierbaren Zahlen $< \frac{1}{2} \sqrt{d}$ bestimmt (vgl. Satz 6):

$$x^2 - 276 y^2 = 1, 13, -15, 16, -11, 12 \text{ (die Menge } \{(-1)^{v+m} S_v\} \text{)}.$$

In der Euler-Lagrangeschen Menge (4)

$$1, -20, 13, -15, 16, -11, 12, -11, 16, -15, 13, -20, 1$$

sind jetzt die Zahl -20 ausgesondert.

Die kleinsten Lösungen der verschiedenen Lösungsklassen sind also

$$\begin{aligned} q_0(\pm 17, \pm 1) &= 13 & q_0(\pm 83, \pm 5) &= -11 \\ q_0(\pm 33, \pm 2) &= -15 & q_0(\pm 216, \pm 13) &= 12. \\ q_0(\pm 50, \pm 3) &= 16 \end{aligned}$$

Die Mengen der übrigen zu der betreffenden Lösungsklassen gehörigen Lösungen werden in klassischer Weise konstruiert. Die Kenntnis von und das Rechnen mit der fundamentalen Einheit ist dann erforderlich. Hier gibt aber volle Anwendung von (28) ohne weiteres die nächstfolgenden Lösungen.

Beispiel 2. In der Ungleichung

$$|q_1(x, y)| = |x^2 + xy - 18y^2| \leq \sqrt{18}$$

ist $G=18$, $d=73$, weshalb die Zahlen $(\mp 1 + \sqrt{73})/2$ in den Diagonalkettenbruch entwickelt werden. Die der ersten Periode entsprechenden Näherungsbrüche sind

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{1}, \frac{15}{4}, \frac{34}{9}, \frac{49}{13}, \frac{83}{22}, \frac{215}{57}, \frac{943}{250}, \dots$$

bzw.

$$-\frac{x}{y} = \frac{5}{1}, \frac{19}{4}, \frac{43}{9}, \frac{62}{13}, \frac{105}{22}, \frac{272}{57}, \frac{1193}{250}, \dots$$

Schon beim ersten Schritt wird ein negativer Teilzähler gewählt. Die Menge der Zahlen $(-1)^{v+m} S_v/2$ ist nun gleich der Menge der repräsentierbaren Zahlen;

$$\{1, 2, -3, 4, -4, 3, -2, -1\}.$$

(Periodenlänge $k=7$; die Nenner der vollständigen Quotienten der regelmässigen Entwicklung der genannten Zahlen sind: 2, 12, 4, 6, 8, 8, 6, 4, 12, 2, von denen $\frac{1}{2} Q_1 = \frac{1}{2} Q_8 = 6 > \sqrt{18}$ automatisch ausgesondert werden). Da jetzt $Q_k = -1$ ist, und der dem Nenner $Q_0 = +1$ entsprechenden Näherungsbruch $A_{-1}/B_{-1} = 1/0$ eigentlich ausgeschlossen war, muss die Repräsentation von $+1$ in klassischer Weise berechnet werden. Jedoch leitet man aber die folgenden Formeln her

$$\begin{aligned} A_{2k-1} &= A_{k-1}^2 + GB_{k-1}^2 \\ B_{2k-1} &= 2A_{k-1}B_{k-1} - B_{k-1}^2, \end{aligned} \tag{29}$$

welche die nicht-triviale Darstellung von $+1$ in kleinsten Zahlen direkt geben. Wir haben also

$$\begin{aligned} q_1(\pm 4, \pm 1) &= 2 & \text{bzw.} & & q_1(\pm 5, \mp 1) &= 2 \\ q_1(\pm 15, \pm 4) &= -3 & & & q_1(\pm 19, \mp 4) &= -3 \\ q_1(\pm 34, \pm 9) &= 4 & & & q_1(\pm 43, \mp 9) &= 4 \\ q_1(\pm 49, \pm 13) &= -4 & & & q_1(\pm 62, \mp 13) &= -4 \\ q_1(\pm 83, \pm 22) &= 3 & & & q_1(\pm 105, \mp 22) &= 3 \\ q_1(\pm 215, \pm 57) &= -2 & & & q_1(\pm 272, \mp 57) &= -2 \\ q_1(\pm 943, \pm 250) &= -1 & & & q_1(\pm 1193, \mp 250) &= -1 \\ q_1(\pm 2014249, \pm 534000) &= 1 & & & q_1(\pm 2548249, \mp 534000) &= 1 \text{ (nach (29)).} \end{aligned}$$

Beispiel 3. Wir lösen die Ungleichung

$$|x^2 + xy - 25y^2| \leq 5. \tag{30}$$

Jetzt ist $d=101$ und $G=g^2$, $g=5$. Die Diagonalnährungsbrüche von $\frac{1}{2}(\mp 1 + \sqrt{d})$ sind

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{1}, \frac{9}{2}, \dots \quad \text{bzw.} \quad -\frac{x}{y} = \frac{6}{1}, \frac{11}{2}, \dots$$

Nach Satz 4 sollen aber die Lösungen (x, y) mit den speziellen $(g-1, 1) = (4, 1)$ bzw. $(-g, 1) = (-5, 1)$ ergänzt werden. Demgemäss und wegen (29) ergeben sich die *fundamentalen Darstellungen*

$$\begin{aligned} q_1(\pm 4, \pm 1) &= -5 & \text{bzw.} & & q_1(\pm 5, \mp 1) &= -5 \\ q_1(\pm 5, \mp 1) &= 5 & & & q_1(\pm 6, \mp 1) &= 5 \\ q_1(\pm 9, \mp 2) &= -1 & & & q_1(\pm 11, \mp 2) &= -1 \\ q_1(\pm 181, \pm 40) &= 1 & & & q_1(\pm 221, \mp 40) &= 1, \end{aligned}$$

wo die zwei ersten dem Gleichheitszeichen in (30) entsprechen.

8. Bemerkungen

Wir haben für die Lösungen der „*diophantischen*“ Ungleichungen (1) und (2) oder (3) und (5) vollständige Kriterien gefunden (Sätze 1–3). Diese Kriterien gestatten uns, sowohl die totale Menge der fraglichen Lösungen einfach zu charakterisieren (Satz 4) als auch für bestimmte Werte von L in (3) bzw. M in (5) die etwaige Lösbarkeit der entsprechenden „*diophantischen*“ Gleichungen zu entscheiden (Satz 6). Diese beiden letztgenannten Aufgaben entsprechen der Bestimmung der *Darstellungen* (x, y) von Zahlen $< \frac{1}{2}\sqrt{d}$ durch die *indefiniten quadratischen Hauptformen* $q_n(x, y)$ (Sätze 4–5) sowie der durch solche Formen darstellbaren Zahlen selbst (Satz 6). Aussagen über die *Normen ganzer quadratischer Zahlen* und *Hauptideale* werden dabei erzielt (Sätze 7–8).

Kennzeichnend für die Kriterien ist, dass man sowohl direkt (Satz 5) entscheiden kann, ob ein Zahlenpaar (x, y) eine Lösung von (1) oder (2) ist (für grosse x, y einfacher als durch Einsetzen), als man auch wegen des rekursiven Charakters der Diagonalkettenbruchentwicklung ein *algorithmisches* Verfahren in der Hand hat, das genau alle Lösungen liefert. Die Lagrangesche Methode erfordert eine Prüfung, ein Ausschneiden derjenigen Näherungsbrüche x/y , für welche $q_0(x, y)$ in (3) grösser als \sqrt{D} ausfällt. Auch bei der Methode von Nagell [11], die zwar den grossen Vorteil hat, allgemein zu sein (L in (3) unbeschränkt), erhält man die „*Fundamentallösungen*“ durch Prüfung, welches auch in dem negativen Fall (Unlösbarkeit) geschehen muss.

In einer gleichzeitig erscheinenden Arbeit untersuchen wir die allgemeineren Ungleichungen $|q_n(x, y)| < \sqrt{d}$, oder $\frac{1}{2}\sqrt{d} < q_n(x, y) < \sqrt{d}$, welche ebenfalls interessante Eigenschaften besitzen.

Es sei noch erwähnt, dass wir die Ergebnisse in Nr. 2 insofern verallgemeinert haben, dass wir folgendes bewiesen haben: es gilt die Ungleichung

$$|x^3 - Dy^3| < \frac{3}{2}\sqrt[3]{D^2} \cdot y, \quad x, y > 0,$$

dann und nur dann, wenn x/y ein Diagonalnährungsbruch genügend hoher Ordnung ($v \geq v_0$) von $\sqrt[n]{D}$ ist. Es gilt sogar die Ungleichung

$$|x^n - Dy^n| < \frac{n}{2} \sqrt[n]{D^{n-1}} \cdot y^{n-2}, \quad x, y > 0,$$

dann und nur dann, wenn x/y ein ebensolcher Bruch von $\sqrt[n]{D}$ ist. Das wird hoffentlich in nicht allzu ferner Zukunft publiziert.

Ich bin dafür dankbar, dass ich die vorliegende Arbeit in dem Mathematischen Institut der Universität Uppsala zu wesentlichen Teilen habe ausführen dürfen.

Abo Akademi, Abo, Finland

LITERATUR

1. BRANDT, H., (Vorwort) Patz, W. Tafel der regelmässigen Kettenbrüche und ihrer vollständigen Quotienten für die Quadratwurzeln aus den natürlichen Zahlen von 1–10000. Akademie-Verlag, Berlin 1955.
2. CRYSTAL, G., Algebra. Chelsea, New York 1952.
3. EULER, L., De usu novi algorithmi in problemato pelliano solvendo. Novi comm. acad. scient. Petrop. 11((1765), 1767) = Op. omnia (1) 3, 1917.
4. HECKE, E., Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. Akademische Verlagsges., Leipzig 1923.
5. HOLZER, L., Zahlentheorie 1–2. Teubner, Leipzig 1958–1959.
6. HURWITZ, A., Über die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche. Math. Ann. 44 (1894) = Math. Werke 2.
7. KOKSMA, J. F., Diophantische Approximationen. Ergebn. der Math. und ihrer Grenzgeb. 4. Chelsea, New York.
8. LAGRANGE, J. L., Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré. Mém. de l'Acad. roy. des sciences et belles-lettres Berlin 23 (1769) = Œuvres 2 = Über die Lösung der unbestimmten Probleme zweiten Grades. Ostw. Klass. 146, Leipzig 1904.
9. LEVEQUE, W. J., Topics in number theory 1–2. Addison-Wesley, Massachusetts 1956.
10. MINKOWSKI, H., Über die Annäherung an eine reelle Grösse durch rationale Zahlen. Math. Ann. 54 (1901) = Ges. Abh. 1.
11. NAGELL, T., Über die Darstellung ganzer Zahlen durch eine indefinite quadratische Form. Arch. Math. 2, (1950).
12. PERRON, O., Die Lehre von den Kettenbrüchen 1. Teubner, Stuttgart 1954.
13. PIPPING, N., Diagonalkettenbrüche. Acta acad. Aboensis, math. phys. 16.5 (1949).
14. SOMMER, J., Vorlesungen über Zahlentheorie, Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Teubner, Leipzig–Berlin 1907.

Tryckt den 31 maj 1966

Uppsala 1966. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB