ARKIV FÖR MATEMATIK Band 7 nr 4

1.66 07 1 Mitgeteilt am 27. April 1966 von O. Frostman und L. Carleson

Eine Nevanlinna-Picardsche Theorie en miniature

Von Raymond M. Redheffer

1. Einleitung

Für passende Funktionenklassen $\{F\}$ betrachtet man Gleichungen der Form $F(z)-a=0$, worin a konstant ist. Eine Nevanlinna–Picardsche Theorie behauptet, grob gesprochen, dass die Anzahl der Wurzeln von a unabhängig ist. Nun ist eine solche Aussage offenbar für reelle Funktionen falsch, und man fragt sich: warum sollte es im Komplexen anders sein? Um das einzusehen, schreiben wir „∞" statt „0". Die Gleichung lautet jetzt $F(z)-a=\infty$, die Wurzeln sind die Pole der Funktion F, und bei verschiedenen Werten von a sind sie nicht nur in derselben Anzahl vorhanden, sie liegen sogar an denselben Stellen. Aber auf der Riemannschen Kugel ist der Punkt „∞" ebensowenig ausgezeichnet wie z. B. der Punkt „0". Darin erkennen wir einen Grund dafür, dass Sätze der Nevanlinna–Picardschen Art überhaupt möglich sind.

Dieser Ideenkreis hat sich in zwei Richtungen entfaltet. Einerseits hat man die Funktionenklasse $\{F\}$ nach und nach erweitert. Die Sätze von Borel beziehen sich auf ganze Funktionen endlicher Ordnung, während keine Ordnungsbeschränkung für die Ergebnisse von Picard nötig ist. Nevanlinna hat die Theorie auf meromorphe Funktionen ausgedehnt, und Ahlfors, Sario u. a. haben die Theorie für Funktionen auf beliebigen Riemannschen Flächen entwickelt. — Andererseits wird die „Anzahl" der Nullstellen mit mehr oder weniger Genauigkeit angegeben. Die Sätze von Picard behaupten nur die Existenz der Nullstellen, diejenigen von Borel bestimmen den Konvergenzexponenten, und andere Sätze geben sogar Aussagen über die Verteilungsdichte. Diese ist viel genauer als jener; der Konvergenzexponent ist immer 1 wenn die Dichte endlich und positiv ist, manchmal auch wenn sie 0 oder ∞ ist.

Es wäre aber interessant, die unendliche Menge von Nullstellen mit einem Fehler *kleiner als eins* abzuzählen. Wenn z. B. die Funktion $\sin\frac{1}{2}z$ die „Anzahl" $N=\infty$ Nullstellen hat, dann möchte ich gern sagen, dass $(z^3+1)\sin\frac{1}{2}z$ die Anzahl $n=\infty+3$ hat, dass $\sin z$ die Anzahl 2∞ hat, dass $z^{-1}\sin z$ die Anzahl $2\infty-1$ hat, usw. Wie kann man aber eine unendliche Menge von komplexen Zahlen $\{\lambda_n\}$ derart präzis zählen?

Zuerst betrachten wir das Vollständigkeitsintervall der Funktionenfolge $\{\exp i\lambda_n x\}$. Das Intervall hat die Länge I wenn die Folge auf jedem Intervall kleinerer Länge als I vollständig ist, aber auf keinem Intervall von grösserer Länge als I. Ist die Menge auf keinem Intervall vollständig, so setzt man $I=0$, und ist die Menge auf jedem endlichen Intervall vollständig, so setzt man $I=\infty$. Für die Klasse L^p, $1\leqslant p\leqslant\infty$, ist I offenbar wohl bestimmt, und von p unabhängig.

Bekanntlich ist I viel empfindlicher als die Verteilungsdichte: Man kann z. B. eine Menge $\{\lambda_n\}$ der Dichte 0 konstruieren, für die I irgendeinen vorgegebenen Wert zwischen 0 und ∞ einschliesslich annimmt [2], [3]. Aber I ist nicht empfindlich genug. Es bleibt stets unverändert bei Hinzufügung oder Weglassung einer endlichen Anzahl von λ_n, und dasselbe gilt für unendlich viele λ_n, wenn z. B. $\sum|\lambda_n|^{-1}<\infty$ ist [10].

Die gewünschte Genauigkeit wird durch folgende Überlegung erreicht. Es kommt gelegentlich vor, dass die Menge $\{\exp i\lambda_n x\}$ auf einem Intervall der Länge I vollständig ist, und vollständig bleibt wenn E Funktionen $\{\exp i\lambda_n x\}$, aber nicht wenn $E+1$ weggelassen werden. Dann sagen Paley und Wiener [5], dass die Menge den Exzess E hat. Sie sprechen auch vom Defekt, welcher hier als negativer Exzess betrachtet wird. Wir setzen $E=-\infty$ wenn $I=0$ ist, oder wenn unendlich viele Funktionen $\exp(i\lambda x)$ hinzugefügt werden können, ohne dass die Menge auf I vollständig wird. Es ist dagegen $E=\infty$ wenn $I=\infty$ ist, oder wenn unendlich viele Funktionen weggelassen werden können, ohne dass die Menge auf I unvollständig wird.

Das Wesentliche ist, das nur die Anzahl der Funktionen massgebend ist. Levinson, auf elementarem Weg [4], und Schwartz, durch den Hahn–Banachschen Satz [11], haben beide bewiesen, dass, falls ein λ_n durch irgendeine komplexe Zahl λ ersetzt wird, die Menge $\{\exp(i\lambda_n x)\}L^p$ vollständig bzw. unvollständig bleibt. Das trifft auch zu, wenn gewisse λ_n mehrfach auftreten. Man fordert nämlich eine Nullstelle der entsprechenden Multiplizität in der ganzen Funktion $F(z)$, die für $z=\lambda_n$ verschwindet (vide infra). Wenn die Abgeschlossenheit an Stelle der Vollständigkeit betrachtet wird, so hat diese Verabredung die Bedeutung, dass nicht nur $e^{i\lambda x}$ sondern eine passende Funktionenmenge

$$\{e^{i\lambda x}, xe^{i\lambda x}, x^2e^{i\lambda x}, \ldots, x^{m-1}e^{i\lambda x}\}$$

für die Approximation vorhanden ist.

Wir haben also das gesteckte Ziel erreicht, indem wir

$$N\{\lambda_n\} = I\infty + E$$

als Anzahl einer unendlichen Menge $\{\lambda_n\}$ erklären. Wird ein λ geändert, so bleibt E konstant, wird ein neues λ hinzugefügt, so vermehrt sich E um 1, und wird ein λ weggelassen, so vermindert sich E um 1. Da E von p abhängt setzen wir $p=2$.

Wie steht es nun mit dem Nevanlinna–Picardschen Ideenkreis, wenn wir derart genau abzählen möchten? Es ist das Ziel dieser Arbeit, diese Frage zu untersuchen.

2. Ausnahmewerte

Sind λ_n die Wurzeln von

$$F(z) \equiv 2ie^{3iz}\sin z = 0,$$

so ist $N_0=2\infty+0$ die zugehörige Anzahl $N\{\lambda_n\}$. Aber $F(z)=a\neq 0$ führt zu einer gewissen quadratischen Gleichung, und daraus schliessen wir auf $N_a=4\infty+0$ für die neue Anzahl. Der Wert 0 ist hier ein Ausnahmewert. Wie auch in der Nevanlinnaschen Theorie ist der Ausnahmewert gut approximiert; es ist nämlich

$$|F(iy)-0| \leqslant 2e^{-2y}, \quad y\to\infty.$$

Allgemein sagen wir, dass a ein I Ausnahmewert vom Mass δ_a ist, wenn

$$\limsup \frac{\log|F(iy)-a|}{y} = -\delta_a < 0 \quad \text{für } y \to -\infty \text{ oder } y \to \infty \tag{1}$$

gilt. Im obigen Beispiel ist 0 ein I Ausnahmewert vom Mass 2.

Als anderes Beispiel sei $F(z)=z^{-1}\sin z$. Hier ist $N_0 = 2\infty - 1$ für die Wurzeln der Gleichung $F(z)=0$, jedoch $N_a = 2\infty + 0$ für die Gleichung $F(z)=a \neq 0$. (Siehe § 6.) Allgemein heisst a ein E Ausnahmewert, wenn

$$F(x)-a \in L^2, \quad -\infty < x < \infty \tag{2}$$

gilt. Im obigen Beispiel ist 0 ein E Ausnahmewert.

Für jedes Paar (a_1, a_2) von komplexen Zahlen kann man eine Funktion F finden derart, dass a_1 ein I Ausnahmewert und a_2 ein E Ausnahmewert ist. Die zwei Bedingungen sind voneinander unabhängig, da das Verhalten von F einerseits auf der imaginären, andererseits auf der reellen Achse bestimmt ist. Es gilt aber:

Bemerkung. Ist $F \not\equiv 0$ von endlichem Typus, so gibt es höchstens einen I Ausnahmewert und höchstens einen E Ausnahmewert.

Gibt es zwei I Ausnahmewerte, so ist $|F(iy)e^{icy}| \leqslant e^{-\delta|y|}$ für eine passende Konstante c und ein $\delta > 0$ (vergl. Beweis des Hilfsatzes 3). Daraus folgt wegen des Satzes von Carlson $F(z) \equiv 0$. Offenbar kann auch nur ein E Ausnahmewert existieren, denn der Satz von Plancherel und Polya ergibt $F(x)-a \to 0$ als Folgerung aus (2).

3. Ergebnisse

Der folgende Satz wird bewiesen:

Satz 1. *Sei $F(z)$ vom exponentiellen Typus, und die Nullstellenmenge $\{\lambda_n\}$ bzw. $\{\mu_n\}$ für $F(z)=a$ bzw. $F(z)=b$ habe die Anzahl*

$$N\{\lambda_n\} = I_a\infty + E_a \quad \textit{bzw.} \quad N\{\mu_n\} = I_b\infty + E_b$$

mit $|E_a|$ und $|E_b|$ endlich. Dann gilt:

(i) *$I_a = I_b$, oder (etwa) b ist der I Ausnahmewert und $I_a = I_b + \delta_b$.*

(ii) *$E_a = E_b$, oder (etwa) b ist der E Ausnahmewert und $E_a = 0$, $E_b < 0$.*

Setzen wir $\delta_a = 0$, wenn a kein I Ausnahmewert ist, sonst δ_a wie in (1), so besagt die Aussage (i) nichts anderes als

$$I_a + \delta_a = I_b + \delta_b.$$

Die Aussage (ii) bedeutet

$$E_b = E_a \text{ bzw. } E_b < 0 \text{ und } E_a = 0 \text{ bzw. } E_b = 0 \text{ und } E_a < 0.$$

Diese Beziehung zwischen E_a und E_b ist in Abb. 1 dargestellt. Es wird gezeigt, dass alle dort erlaubten Möglichkeiten wirklich auftreten:

Satz 2. *Seien a und b verschiedene komplexe Zahlen, und seien E_a und E_b ganze Zahlen derart, dass der Punkt (E_a, E_b) so liegt, wie in Abb. 1 angegeben. (Die Fälle*

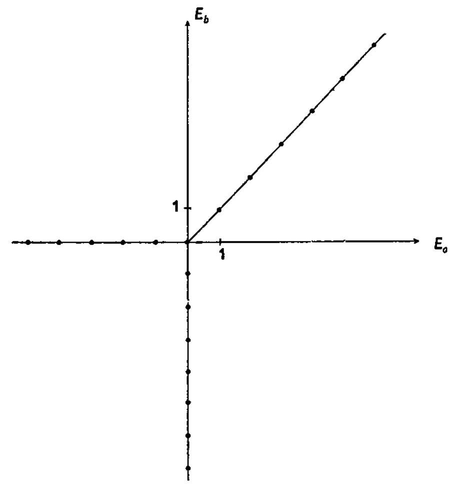

Abb. 1

$$E_a = E_b = \infty; \quad E_a = 0, \quad E_b = -\infty; \quad E_a = -\infty, \quad E_b = 0$$

sind auch erlaubt.) Seien I_a und I_b endlich und positiv. Dann gibt es eine ganze Funktion $F(z)$ von endlichem Typus derart, dass gleichzeitig

$$N_a = I_a\infty + E_a \quad \textit{und} \quad N_b = I_b\infty + E_b$$

für die Nullstellenmengen von $F(z) - a = 0$ bzw. $F(z) - b = 0$ gilt.

Eine Folgerung aus Satz 1 ist:

Satz 3. *Sei $F(z)$ eine ganze Funktion der Ordnung <2, mit $|F(x)| = 0(e^{\delta|x|})$ für jedes $\delta > 0$, $-\infty < x < \infty$. Sei $I_a\infty + E_a$ die Anzahl der a Punkte von $F(z)$ wobei a durch alle komplexen Zahlen läuft. Behauptung: E_a nimmt höchstens zwei verschiedene Werte an, auch dann, wenn $E_a = -\infty$ und $E_a = \infty$ zugelassen werden.*

4. Beweis des Satzes 1

Wir sagen, dass eine komplexe Funktion F zur Klasse K gehört, wenn es eine nicht abnehmende Funktion $\phi(x)$ derart gibt, dass

$$|F(x)| \leqslant e^{\phi(|x|)}, \; -\infty < x < \infty, \quad \text{und} \quad \int_1^\infty \frac{\phi(x)}{x^2}\,dx < \infty.$$

Hilfssatz 1. *Sei F ganz, von endlichem Typus, und sei $F \in K$. Dann ist $I = h(\frac{1}{2}\pi) + h(-\frac{1}{2}\pi)$, wobei I sich auf die Nullstellen λ_n von F bezieht und $h(\theta)$ die Phragmen–Lindelöfsche Funktion ist.*

Das heisst, es ist $h(\theta) = \limsup r^{-1} \log |F(re^{i\theta})|$, $r \to \infty$. Für den Beweis betrachtet man $e^{icz}F(z)$ bei passendem reellem c und erzielt, dass $h(\frac{1}{2}\pi) = h(-\frac{1}{2}\pi) = \alpha$ ist. (Dabei ist α durch diese Gleichung definiert.) Man konstruiere eine Funktion $A(x) \not\equiv 0$ von beliebig kleinem Typus ε derart, dass $|A(x)| \leqslant |x|^{-1}\exp[-\phi(|x|)]$ auf der reellen Achse gilt. Infolge des bekannten Satzes von Levinson [4] ist das gerade dann möglich, wenn das Integral konvergiert. Nun ist $AF \in L^2$ auf der reellen Achse, und der Satz von Paley–Wiener [5], [6] ergibt die Schreibweise

$$AF = \int_{-(\alpha+\varepsilon)}^{\alpha+\varepsilon} f(t) e^{ixt} dt, \quad f \in L^2.$$

Da $f(t)$ senkrecht zu $\exp(i\lambda_n t)$ für jedes n ist, schliessen wir auf $I \leqslant 2\alpha + 2\varepsilon$.

Ist andererseits $I < 2\alpha$, so können wir eine passende Funktion $f \in L^2$ und ein $\varepsilon > 0$ derart finden, dass die Funktion

$$G(z) = \int_{-(\alpha+\varepsilon)}^{\alpha+\varepsilon} f(t) e^{izt} dt$$

bei $z = \lambda_n$ verschwindet. Infolge des Hadamardschen Zerlegungssatzes ist $G = FA$, wobei $A(z)$ die Ordnung 1 hat. Das Kriterium von Lindelöf[1] zeigt, dass A sogar von endlichem Typus ist. Ich betrachte Ausdrücke wie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |F(x)|}{1+x^2} dx$$

für F, A und G. Weil $F \in K$ ist, ist das Integral für F endlich, und eine bekannte Konsequenz der Formel von Carleman zeigt dann, dass auch das Integral mit $\log^-$ endlich ist. Dasselbe gilt für G, daher auch für A. Ein Satz von Cartwright ergibt dann $h_A(0) = h_A(\pi) = 0$ für die zugehörige Phragmen-Lindelöfsche Funktion und ebenso für F. Aus dem Satz von Ahlfors–Heins schliessen wir nun, dass $\alpha +$ Typus A = Typus G ist. Daher ist Typus A < 0, und $A \equiv 0$. Wegen der Parsevalschen Gleichung ist fast überall $f = 0$, und das ergibt $I \geqslant 2\alpha - 2\varepsilon$.

Hilfssatz 2. *Sei F ganz, von endlichem Typus, und sei $|E| < \infty$ auf dem zugehörigen Vollständigkeitsintervall I für die Nullstellen λ_n von F. Dann ist $e^{cx}F \in K$ für genau ein reelles c.*

Lässt man Nullstellen weg, so teilt man $F(z)$ durch ein passendes Polynom $P(z)$. Da $E < \infty$ ist, können wir wie früher erzielen

$$\frac{F(z)}{P(z)} A(z) = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(t) e^{izt} dt, \quad f \in L^2, \quad \alpha = \tfrac{1}{2} I.$$

Die Funktion A hat nur endlich viele Nullstellen, denn sonst wäre $E = -\infty$. Daher ist A im Wesentlichen eine Exponentialfunktion, und das zeigt die Existenz eines passenden c. Gilt der Schluss aber für zwei verschiedene Konstanten c und c', dann ist $|F(x)| = 0\ (e^{-\delta|x|})$ für ein $\delta > 0$. Der Satz von Carlson ergibt nun $F \equiv 0$, was nicht der Fall war.

Hilfssatz 3. *In Satz 1 ist $F \in K$.*

Wegen Hilfssatz 2 gibt es Konstanten A und B derart, dass

$$e^{Ax}[F(x) - a] \in K \quad \text{und} \quad e^{Bx}[F(x) - b] \in K.$$

[1] Die erwähnten Sätze sind in [1] zu finden.

Daher haben diese Funktionen die Grössenordnung $0(e^{\delta|x|})$ für jedes $\delta>0$. Es ist unmöglich, dass A und B beide positiv oder beide negativ sind, denn dann müsste $F(x)$ zur selben Zeit beliebig nah an a und an b sein. Sei etwa $A>0$, $B<0$. Die Funktion

$$e^{\frac{1}{2}Ax}[F(x)-a]$$

ist dann $0[\exp(-\frac{1}{4}A|x|)]$ für $|x|\to\infty$, und das ergibt $F(x)\equiv a$. Daher ist $A=0$ oder $B=0$.

Jetzt kommen wir zum Beweis des ersten Teiles des Satzes. Da es höchstens einen Ausnahmewert gibt, können wir annehmen, dass a kein Ausnahmewert ist, und dass $h_a(\frac{1}{2}\pi)>0$ ist, wobei h_a die Lindelöfsche Funktion für $F(z)-a$ ist. Es ist stets $h_a=h_b$ für $\theta=\frac{1}{2}\pi$, und dasselbe gilt für $\theta=-\frac{1}{2}\pi$, wenn h_a dort positiv ist. Ist $h_a(-\frac{1}{2}\pi)=0$, so ist $h_b(-\frac{1}{2}\pi)=\delta_b$, und Hilfssatz 1 ergibt nun $I_a=I_b+\delta_b$.

5. Fortsetzung

Das beweist die Aussage über I. Aber wie gesagt, kann man unendlich viele λ_n hinzufügen oder weglassen, ohne dass I sich ändert. Um die Aussage über E zu bekommen, müssen wir etwas feiner messen, denn E merkt es ja, wenn nur ein λ_n zuviel oder zuwenig da ist.

Hilfssatz 4. *Sei $F\in K$ und sei $|E|<\infty$ für die Nullstellenmenge $\{\lambda_n\}$ von $F(z)$. Dann ist E die grösste ganze Zahl n, derart, dass*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|F(x)|^2}{(1+x^2)^n}\,dx=\infty.$$

Sei $E+1\geqslant 0$. Werden $E+1$ Nullstellen weggelassen, so wird die Menge unvollständig, und wir haben

$$\frac{F(x)}{P(x)}=\int_{-\alpha}^{\alpha}f(t)e^{ixt}dt,\quad f\in L^2,$$

wobei P ein Polynom vom Grad $E+1$ ist. Die obige Ueberlegung zeigt, dass kein schädlicher Faktor $A(x)$ auftreten kann. Wegen des Satzes von Plancherel ist $F/P\in L^2$, und das zeigt, dass das Integral mit $n=E+1$ konvergiert.

Ist aber das Integral mit $n=E$ konvergent, dann sieht man leicht, dass der Exzess kleiner als E ist.

Bei $E+1<0$ müssen wir nur den Beweis etwas anders führen. Die Weglassung von $E+1$ Nullstellen bedeutet die Hinzufügung von $-(E+1)$ Nullstellen, usw.

Hilfssatz 5. *In Satz 1 ist: $E_a<0\Rightarrow E_b=0$, und $E_a\geqslant 0\Rightarrow E_b\leqslant E_a$.*

Ist $E_a<0$, so ist $F-a\in L^2$, wegen Hilfssatz 4. Der Satz von Plancherel und Polya ergibt $F-a\to 0$, daher $F-b\sim a-b$. Also ist $n=0$ die grösste ganze Zahl derart, dass das Integral für $F-b$ divergiert, und daher ist $E_b=0$.

Bei $E_a\geqslant 0$ schreibt man

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|(F-a)+(a-b)|^2}{(1+x^2)^n}\,dx\leqslant 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|F-a|^2}{(1+x^2)^n}\,dx+2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|a-b|^2}{(1+x^2)^n}\,dx.$$

wo $n=E_a+1$ ist. Das erste Integral ist nach Hilfssatz 4, das zweite wegen $E_a \geqslant 0$ konvergent. Also ist die grösste ganze Zahl n, für die das Integral divergiert, nicht grösser als E_a. Das ergibt $E_b \leqslant E_a$.

Das Verhältnis zwischen E_a und E_b lässt sich durch eine Punktmenge darstellen (vergl. Abb. 1). Einerseits muss diese Punktmenge die Bedingung des Hilfssatzes 5 befriedigen, andererseits muss sie in bezug auf die Gerade $E_a=E_b$ symmetrisch sein. Diese Überlegung führt zu Abb. 1.

6. Beweis des Satzes 2

Wir müssen zeigen, dass jede Möglichkeit bei passendem F vorkommt. Es ist natürlich leicht, eine Funktion F zu konstruieren, für die I_0 und E_0 vorgegebene Werte zwischen $-\infty$ und ∞ einschliesslich annehmen. Aber im Allgemeinen weiss man wenig über die Wurzeln von $F(z)=a$, daher wenig über I_a und E_a.

Hilfssatz 6. *Sei F ganz, vom Typus $\alpha>0$, und sei $F(x)\in K$. Gilt $|F(z)| \geqslant |z|^{-N}$ auf einer arithmetischen Reihe $z=nD+z_0$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, D>0)$, so ist $I=2\alpha$, $E \geqslant -N$ für die Wurzelmenge $\{\lambda_n\}$ von $F(z)=0$.*

Mit dieser Voraussetzung ist $E<\infty$ genau dann, wenn $|F(x)|=0(|x|^M)$ für ein M gilt. Zum Beweis des Hilfssatzes sei $E<0$ auf $[-\alpha, \alpha]$, daher

$$\tilde{F}(z)A(z)=\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{izt}f(t)dt, \quad f\in L^2, \quad \tilde{F}=e^{icz}F(z).$$

Nun ist wie früher Typ $\tilde{F}$ + Typ $A=\alpha$, also A vom Typus O und ferner gilt $A(z)=o(|z|^N)$ in der gegebenen arithmetischen Reihe. Das zeigt, dass A ein Polynom vom Grad $\leqslant N-1$ ist, und daraus folgt das Ergebnis.

Als erstes Beispiel sei $F(z)=P(z)\sin z$, wobei P ein Polynom vom Grad m ist. Für $x=n\pi$ ist $|F(x)-a|=|a|$, daher $E_a \geqslant 0$. Aber andererseits ist $E_a<\infty$, Satz 1 ist anwendbar, und $E_a=E_0=m$. Bei $m=1, 2, 3, \ldots$ erhalten wir die Punkte mit $E_a>0$ in Abb. 1.

Als nächstes Beispiel sei $F(z)=(\sin z)/P(z)$, wobei $P(z)$ ein Polynom vom Grad m ist, dessen Nullstellen unter den Nullstellen von $\sin z$ vorkommen. Es ist $E_0=-m$, wegen Hilfssatz 6 ist $|E_a|$ endlich, und das zeigt, dass $E_a=0$ für $a \neq 0$ ist. Daher kommen alle anderen Punkte in Abb. 1 auch wirklich vor.

Als drittes Beispiel betrachten wir irgend eine Funktion $F(z)$, die gerade, vom Typus α und $0[\exp(-|x|^{\frac{1}{2}})]$ auf der reellen Achse ist. Dann ist $E_0=-\infty$ und $E_a=0$ für $a \neq 0$. Man konstruiere nämlich eine ganze Funktion $A(z)$ mit unendlich vielen Nullstellen und von der Grössenordnung $|z|^{-1}\exp z^{\frac{1}{2}}$. Dann ist $FA\in L^2$, Typ (AF) = Typ (F), und daher ist die Menge der Nullstellen für AF auf I unvollständig. Das ergibt $E_0=-\infty$, und $E_a=0$ folgt aus Hilfssatz 6.

Als letztes Beispiel sei $F(z)=\sin z \cos \sqrt{z}$. Dann ist $I=2$ und $E_a=E_b=\infty$ für jedes a und b. Denn Hilfssatz 6 ergibt $E_a \geqslant 0$, und $E_a=\infty$ folgt daraus, dass $\limsup |x|^{-n} |F(x)|=\infty$ für jedes n ist.

Um Satz 2 zu beweisen, merken wir an, dass

$$F(z)=e^{i\alpha z}F(\beta z+\gamma)$$

dem Kriterium des Hilfssatzes 6 genügt, wenn F ihm genügt und α und $\beta \neq 0$ reell sind.

7. Beweis des Satzes 3

Werden drei Werte E_a, E_b, E_c angenommen, so ist mindestens ein Wert, etwa E_a, auf einem zugehörigen Intervall der Länge I_a endlich. Aus $|E_a| < \infty$ folgt $I_a < \infty$, und daher sind die Nullstellen von $F(z) - a$ unter den Nullstellen einer ganzen Funktion vom Typus $\frac{1}{2} I_a$ enthalten. Mittels des Satzes von Jensen und des Zerlegungssatzes von Hadamard sieht man leicht, dass $F(z)$ von endlichem Typus ist. Die Bedingung $F(x) = 0(e^{\delta|x|})$ ergibt $A = 0$ im Beweis des Hilfssatzes 4, daher $F \in K$. Das zeigt, dass $I_a = I$ von a unabhängig ist (Hilfssatz 1). Da E_a endlich ist, besteht $F(x) = 0(|x|^N)$ für ein gewisses N, und daher ist $E_a < \infty$ auf I für jedes a. Unter den drei Werten müssen daher mindestens zwei endlich sein, Satz 1 ist anwendbar, und das Ergebnis folgt.

8. Eine Bemerkung über die Vollständigkeit

Manchmal möchte man eine Funktion $A(z) \not\equiv 0$ vom Typus 0 konstruieren, derart, dass $F(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$, $x \in M$ gilt, wobei M eine vorgegebene unbeschränkte Menge auf der reellen Achse ist. Wenn das nicht geht, bezeichnen wir die Menge M als „schlecht". Andererseits ist eine reelle Menge M „gut", wenn

$$F \in K, \quad |F(x)| \geqslant \eta > 0 \quad \text{für} \quad x \in M \Rightarrow E\{\lambda_n\} \geqslant 0 \text{ auf } I$$

für alle ganzen Funktionen F von endlichem Typus $\frac{1}{2} I$ gilt. [Dabei sind λ_n die Wurzeln von $F(z) = 0$.] Die Menge heisst gut, weil man die Vollständigkeit von $\{\exp(i\lambda_n x)\}$ gern erhalten möchte.

Nach dem Beweis des Hilfssatzes 6 haben wir das schöne Ergebnis: *Jede schlechte Menge ist gut.* Daraus folgt:

Satz 4. *Sei λ_n eine reelle Folge mit $\lambda_1 > 0$, $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant c > 0$. Sei $|\lambda_n - Dn| \leqslant H(n)$, wo $H(u)$ als wachsend, $u^{-1}H(u)$ als abnehmend, $H(u) < u$, und*

$$\int_1^\infty \frac{H(u)}{u^2} \log \frac{u}{H(u)} \, du < \infty$$

angenommen wird. Dann ist $I_a = 2\pi D$ und $E_a \geqslant 0$ für die Wurzelmenge $\{\mu_n\}$ der Gleichung

$$\prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) = a, \quad a \neq 0.$$

Aus der Konvergenz des Integrals folgt $H(u) = o(u)$, daher $\Lambda(u) \sim Du$, und daher ist Typ $F = \pi D$. Ferner ist die Menge $\{\lambda_n\}$ wegen des Satzes von Levinson [4] schlecht, und $F(x) \in K$ folgt aus einer Abschätzung in [8].

Eine ähnliche Aussage ist auch für ungerade Funktionen gültig. Sei $\Lambda(u)$ die Anzahl der λ_n zwischen 0 und u, als negativ für negatives u angesehen, und sei

$$\Lambda^\circ(x) = x \int_{|x|}^\infty \frac{\Lambda(u) + \Lambda(-u)}{u^2} \, du.$$

Ist $\Lambda^\circ(x) \in K$, so ist auch $F(x) \in K$, unter der Voraussetzung

$$|\Lambda(u) - Du| \leqslant H(u),$$

H wie in Satz 4 (siehe [9]). Daher können wir wieder den Satz von Levinson anwenden und zeigen, dass $\{\exp(i\mu_n x)\}$ auf einem Intervall der Länge $2\pi D$ vollständig ist.

Aussagen wie Satz 4 scheinen uns deswegen wertvoll, weil sie zeigen, dass Satz 1 auf eine nicht zu kleine Funktionenklasse $\{F\}$ wirklich anwendbar ist.

9. Die invariante Anzahlfunktion

Die Anzahl $N(\lambda_n)$ ist gegen Verschiebung und Spiegelung, aber nicht gegen Drehung invariant. Zum Beispiel gilt $I = 2\pi$ für die Menge $\{\lambda_n\} = \{n\}$, jedoch $I = \infty$ für die Menge $\{\lambda_n\} = \{ni\}$. Jetzt wird eine neue Anzahlfunktion $\tilde{N}(\lambda_n)$ definiert, derart, dass zwei kongruente Mengen immer dieselbe Anzahl haben.

Man denke sich nämlich, dass die reelle Achse in der komplexen Ebene um den Nullpunkt durch einen Winkel θ gedreht wird (Abb. 2). Man bildet die Anzahl

$$N_\theta(\lambda_n) = I_\theta \infty + E_\theta,$$

wo $I_\theta = \tilde{I}$ und $E_\theta = \tilde{E}$ die frühere Bedeutung haben, allerdings in Bezug auf die neue Achse. Da stets

$$I_\theta = I_{\theta+\pi} \quad \text{und} \quad E_\theta = E_{\theta+\pi}$$

gelten, können wir $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ voraussetzen. Dann besteht:

Hilfssatz 7. *Bei einer gegebenen komplexen Menge $\{\lambda_n\}$ ist entweder $I_\theta = 0$ für jeden Wert von θ, oder $I_\theta = \infty$ für jeden Wert, oder aber $0 < I_\theta < \infty$ für genau einen Wert, θ_0.*

O. B. d. A. können wir voraussetzen, dass $0 < I_\theta < \infty$ für $\theta = 0$ und $\theta = \phi$ gilt, $0 < \phi < \pi$. Die Zahlen λ_n sind dann unter den Nullstellen einer ganzen Funktion $F(z)$ von exponentiellem Typus enthalten, die auf der reellen Achse beschränkt ist. Das Entsprechende gilt auch für $\lambda_n e^{-i\theta}$, mit einer anderen Funktion, $G(z)$. Daraus folgt bekanntlich [1]

$$\sum \frac{|\sin \theta_n|}{|\lambda_n|} < \infty, \quad \sum \frac{|\sin(\theta_n - \phi)|}{|\lambda_n|} < \infty, \quad \lambda_n = |\lambda_n| e^{i\theta_n},$$

und wir schliessen auf $\sum |\lambda_n|^{-1} < \infty$. Für reelle λ_n hat Schwartz bewiesen, dass $I = 0$ aus der Konvergenz dieser Reihe folgt [11]. Mit Hilfe einer anderen Methode als in [11] kann dasselbe auch für komplexe λ_n gezeigt werden [10]. Wir erhalten daher $I_\theta = 0$ für jedes θ, und das ergibt den Hilfssatz.

Die neue Anzahlfunktion ist nun durch

$$\tilde{N}(\lambda_n) = \tilde{I} \infty + \tilde{E} \quad (\tilde{I} = I_\theta,\ \tilde{E} = E_\theta,\ \theta = \theta_0)$$

erklärt, mit $\tilde{I} = 0$ bzw. $\tilde{I} = \infty$ falls θ_0 nicht existiert. Diese Funktion ist gegen alle starren Bewegungen invariant; zwei kongruente Mengen haben immer dasselbe $\tilde{N}$ auch dann, wenn $\tilde{I} = 0$, $\tilde{I} = \infty$ und $|\tilde{E}| = \infty$ erlaubt ist.

Für die Gleichung $e^z = a \neq 0$ ist $I_a = \infty$, wenn die Achse nicht gedreht wird, aber $\tilde{N}_a(\lambda_n) = 1\infty + 0$ entsteht aus der hier angegebenen Methode. Die Funktion e^z ist

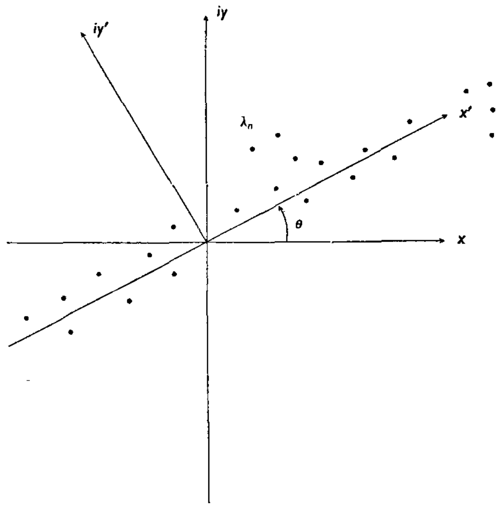

Abb. 2

nicht in K. Für $F \in K$ ist $\theta = 0$ immer der passende Winkel, wie bisher in dieser Arbeit. Dasselbe gilt, wenn nur $\limsup |x|^{-1} \log |F(x)| \leqslant 0$ ist (vergl. Satz 3).

Es gilt auch:

Hilfssatz 8. *Sei $F(z)$ eine ganze Funktion der Ordnung <2. Seien*

$$\tilde{N}(\lambda_n) = \tilde{I}_a \infty + \tilde{E}_a \quad bzw. \quad \tilde{N}(\mu_n) = \tilde{I}_b \infty + \tilde{E}_b$$

die invarianten Anzahlen für die Nullstellenmengen der Gleichung $F(z) = a$ bzw. $F(z) = b$, wobei $\tilde{I}_a$ zu θ_a und $\tilde{I}_b$ zu θ_b gehört, und $|\tilde{E}_a|$ und $|\tilde{E}_b|$ endlich sind. Dann ist $\theta_a = \theta_b$.

O. B. d. A. sei $\theta_a = 0$, $\theta_b = \phi$ mit $0 \leqslant \phi < \pi$, und man setze $k = e^{-i\phi}$. Bis auf einen Polynomfaktor gilt dann

$$e^{-Az}[F(z) - a] = \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{izt} f(t)dt, \quad f \in L^2,$$

$$e^{-Bz}[F(z) - b] = \int_{-\beta}^{\beta} e^{ikzt} g(t)dt, \quad g \in L^2,$$

worin A und B passende komplexe Konstanten sind und $2\alpha = I_a$, $2\beta = I_b$ ist. Es ist unmöglich, dass f in der Nähe von $-\alpha$ oder α fast überall verschwindet, denn dann könnte man ein neues A wählen und ein kleineres α finden. Das Entsprechende gilt auch für g. Daher ist die Phragmen–Lindelöfsche Funktion für das erste Integral gleich der Funktion für $\sin \alpha z$, und entsprechend für das zweite Integral. Das zeigt, dass die zwei Ausdrücke

$$e^{Az} \sin \alpha z \quad \text{und} \quad e^{Bz} \sin \beta k z$$

dieselbe Phragmen–Lindelöfsche Funktion, etwa $h(\theta)$, in einem Intervall grösserer Länge als π besitzen. Durch Betrachtung von $h(\theta)$ und $h(\pi + \theta)$ erhalten wir den erwünschten Schluss, $k = 1$.

Zusammenfassend haben wir folgenden:

Satz 5. *Die Sätze 1 bis 3 bleiben auch dann gültig, wenn statt N die invariante Anzahlfunktion $\tilde{N}$ benutzt wird.*

Wegen des Satzes 5 haben wir es für besser gehalten, den Leser nicht gleich am Anfang mit Abb. 2 zu belästigen.

10. Schlussbemerkungen

Wie schon erwähnt wurde, hängt $E = E^p$ von p ab. Während f die üblichen Funktionenklassen von der Klasse $L = L^1$ bis zur Klasse der absolutstetigen Funktionen durchläuft, so vermehrt sich E im allgemeinen um 1. Die Formel

$$\tilde{N}(\lambda_n) = I\infty + \tilde{E}, \quad \text{mit} \quad \tilde{E} = \sup_{1 \leqslant p \leqslant \infty}(E^p + p^{-1} - 1),$$

führt daher zu einer vernünftigen Anzahlfunktion. Diese ist viel genauer als die früher eingeführte; man hat etwa $\tilde{N}(\lambda_n) = 2\infty + 1{,}0012$, usw. Die Theorie unterscheidet sich jedoch nur im kleinen von der bisher entwickelten.

Interessanter wäre es, die Voraussetzung $|E| < \infty$ wegzulassen. Wieviele Werte kann I_a annehmen, wenn nichts über E vorausgesetzt wird? Ich weiss es nicht.

Sämtliche Ergebnisse (ausschliesslich derjenigen in § 9) sind im Frühjahrssemester 1961 in Los Angeles, später auch in Hamburg und Giessen vorgetragen worden. Hilfssätze 2 und 4 sind ohne Beweis in [9] gegeben; vergl. auch [7].

Department of Mathematics, University of California, Los Angeles, Cal., USA

SCHRIFTENVERZEICHNIS

1. Boas, R. P., Entire Functions, Academic Press Inc. (1954).
2. Kahane, J. P., Sur la totalité des suites d'exponentielles imaginaires. Annales de l'Inst. Fourier (Grenoble), t. VIII fascicule *1*, pp. 273–275 (1959).
3. Koosis, P., Sur la totalité des systèmes d'exponentielles imaginaires. Comptes Rendus, t. *250*, pp. 2102–2103 (1960).
4. Levinson, N., Gap and Density Theorems. Am. Math. Soc. Coll., Pub. *25* (1940).
5. Paley, R. E. A. C. und Wiener, N., Fourier Transforms in the Complex Domain. Am. Math. Soc. Coll., Pub. *19* (1934).
6. Plancherel, M. und Pólya, C., Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples. Comm. Math. Helv. *9*, pp. 224–248 (1936–37), *10*, pp. 110–163 (1936–38).
7. Redheffer, R. M., On a Theorem of Plancherel and Pólya. Pacific Jl. Math. *3*, pp. 823–935 (1953).
8. —— On Even Entire Functions with Zeros Having a Density. Trans. Am. Math. Soc. *77*, pp. 32–61 (1954).
9. —— Ganze Funktionen und Vollständigkeit. Öst. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl. pp. 1–4 (1957).
10. —— Estimates for Entire Functions (to appear).
11. Schwartz, L., Etude des sommes d'exponentielles. Hermann, Paris, 2nd Ed. (1959).

Tryckt den 28 mars 1967

Uppsala 1967. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB