ARKIV FÖR MATEMATIK Band 7 nr 27

1.67 13 1 Communiqué le 25 Octobre 1967

Sur les unités dans les corps biquadratiques primitifs du premier rang

Par Trygve Nagell

§ 1. Introduction

1. Représentation de l'unité par une forme binaire biquadratique du premier rang. Le corps biquadratique engendré par une racine de l'équation

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0, \tag{1}$$

aux coefficients a_i rationnels entiers, $a_0 \neq 0$, irréductible dans le domaine rationnel, sera appelé corps du premier rang, lorsque toutes les quatre racines de cette équation sont imaginaires. Dans des travaux antérieurs nous avons établi une classification de ces corps en 14 classes; voir Nagell [1][1], [2], [3] et [4].

Nous désignerons par le symbole $((a_0, a_1, a_2, a_3, a_4))$ la forme binaire biquadratique

$$a_0x^4+a_1x^3y+a_2x^2y^2+a_3xy^3+a_4y^4, \tag{2}$$

où les coefficients a_i sont des entiers rationnels. Le discriminant de cette forme a pour expression

$$4(4\,a_0\,a_4-a_1\,a_3+\tfrac{1}{3}\,a_2^2)^3-\tfrac{1}{3}(24\,a_0\,a_2\,a_4+3\,a_1\,a_2\,a_3-\tfrac{2}{9}\,a_2^3-9\,a_0\,a_3^2-9\,a_1^2\,a_4)^2.$$

Lorsque les corps engendrés par l'équation (1) sont du premier rang, nous dirons que la forme est du *premier rang*. Lorsque les corps appartiennent à la *classe* Z, nous dirons que la forme (2) appartient à la *catégorie* Z. Les formes équivalentes appartiennent à la même catégorie; elles représentent les mêmes nombres entiers, et le nombre de représentations d'un nombre donné est le même.

Dans un travail récent nous nous sommes occupés de la représentation de l'unité par une forme binaire du premier rang lorsque les corps engendrés par la forme admettent au moins un sous-corps quadratique; voir [3]. Nous avons montré comment on peut reconnaître s'il existe des représentations ou non, et comment on peut déterminer toutes les représentations eventuelles. Le nombre de représentations est au plus égal à 8.

Cependant, les méthodes dont nous nous sommes servies dans le travail [3] ne sont pas applicables lorsque la forme appartient à la catégorie 1. La classe 1 est constituée des corps primitifs du premier rang.

[1] Les numéros figurant entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce travail.

Dans le présent travail nous allons traiter la question de la représentation de l'unité par les formes de la catégorie 1. Cependant, pour le moment, nous nous bornons au cas des formes du type

$$((1,\ -p,\ q,\ -r,\ 1)). \tag{3}$$

Un essai (non publié) d'Adolf af Ekenstam afin de montrer qu'une forme de ce type (appartenant à la catégorie 1) admette au plus six représentations de l'unité n'est pas réussi. En effet, sa démonstration repose sur certaines suppositions sous-entendues qui ne sont pas en général réalisées; comparez mon travail [3], p. 481 et p. 512.

Dans ce travail-ci nous allons établir un résultat plus précis sur la forme (3) lorsqu'elle appartient à la catégorie 1. En effet, d'après ce résultat la forme n'admet que les quatre représentations triviales, exception faite d'un petit nombre de cas dans lesquels il y a exactement six représentations de l'unité.

Le problème plus général relatif à la représentation de l'unité par une forme du type

$$((1,\ -p,\ q,\ -r,\ s)),$$

où $s>1$, de la catégorie 1, sera sujet d'un prochain travail.

Nous présentons en outre quelques résultats sur les corps biquadratiques du premier rang appartenant à une classe quelconque; voir les Théorèmes 1 et 2. Dans le Théorème 8 il s'agit de tous les corps biquadratiques sauf les corps primitifs d'un rang >1.

2. **Propriétés générales des unités dans les corps primitifs du premier rang.** Soit **K** un corps biquadratique du premier rang appartenant à la classe 1. Toute unité irrationnelle dans **K** est du quatrième degré, et elle n'est jamais une racine de l'unité. Soit η une unité dans **K**, racine de l'équation à coefficients entiers rationnels

$$f(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 1 = 0. \tag{4}$$

Nous supposons que $|\eta|>1$. Si η', η'' et η''' sont les autres racines de l'équation (4), et si η et η' sont imaginairement conjuguées, nous avons

$$|\eta| = |\eta'| > 1 \text{ et } |\eta''| = |\eta'''| = |\eta|^{-1} < 1.$$

Vu que $f(1)\geq 1$ et $f(-1)\geq 1$ les coefficients dans (4) satisfont aux inégalités suivantes

$$b \geq a + c - 1, \tag{5}$$

$$b \geq -a - c - 1. \tag{5'}$$

Il en résulte par addition

$$b \geq -1. \tag{5''}$$

De la théorie de l'équation biquadratique on obtient le résultat que voici :

La condition nécessaire et suffisante pour que le corps $\mathbf{K}(\eta)$ défini par (4) soit du premier rang est que le discriminant $D(\eta)$ soit positif, et qu'au moins une des conditions suivantes soient remplies :

$$\left.\begin{aligned} &b - \tfrac{3}{8}a^2 \geq 0, \\ &(b - \tfrac{3}{8}a^2)^2 \leq 4 - ac + \tfrac{1}{4}a^2 b - \tfrac{3}{64}a^4. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

D'ailleurs, il est évident qu'on peut remplacer ces inégalités par les suivantes:

$$\left.\begin{aligned} &b-\tfrac{3}{8}c^2\geqslant 0,\\ &(b-\tfrac{3}{8}c^2)^2\leqslant 4-ac+\tfrac{1}{4}bc^2-\tfrac{3}{64}c^4. \end{aligned}\right\} \tag{6'}$$

On démontre sans difficulté le

Lemme 1. *Il n'y a qu'un nombre fini d'unités η ayant les propriétés suivantes : η est du quatrième degré; toutes les quatre unités conjuguées sont imaginaires; on a $1<|\eta|<k$, où k est un nombre positif donné. Toutes ces unités peuvent être déterminées par un nombre fini d'opérations.*

En effet, si η est racine de l'équation (4) les coefficients sont bornés par les inégalités

$$|a|<2k+2,\ |c|<2k+2,\ -1\leqslant b<k^2+5. \tag{7}$$

Supposons maintenant qu'on a

$$\eta=u+vi,\quad \eta'=u-vi,\quad \eta''=z+wi,\quad \eta'''=z-wi,$$

où u, v, z et w sont réels. Ici on peut toujours supposer que v et w sont positifs. Les coefficients a, b et c sont donnés par les relations

$$a=2u+2z,\ b=u^2+v^2+z^2+w^2+4uz,$$

$$c=2z(u^2+v^2)+2u(z^2+w^2).$$

On montre aisément qu'on a $u\neq 0$. En effet, pour $u=0$ on aura

$$\eta=vi,\quad \eta'=-vi.$$

Il en résulte $a=2z$, et vu que $\eta''\eta'''<1$ on aura $\frac{1}{4}a^2+w^2<1$. Il faut donc qu'on ait ou $a=0$ au $a=\pm 1$. Si $a=0$ on obtient $z=0$ et $c=0$. Donc $b=v^2+v^{-2}$, et η est racine de l'équation

$$x^4+(v^2+v^{-2})x^2+1=0.$$

Or, cette équation engendre des corps imprimitifs.

Si $a=1$ on obtient $z=\frac{1}{2}$, $c=v^2$ et $\frac{1}{4}+w^2<1$. Vu que $b=v^2+\frac{1}{4}+w^2$, il en résulterait que la différence $b-c$ serait positive et <1. Contradiction. Donc, on a toujours $u\neq 0$ dans un corps primitif. Par un raisonnement analogue on montre aussi que $z\neq 0$. En effet, soit $z=0$, et remplacons η par l'unité

$$\zeta=(\eta''')^{-1}=iw^{-1}.$$

On aura alors

$$\zeta'=(\eta'')^{-1}=-iw^{-1}$$

et $|\zeta|=|\zeta'|>1$, $|\zeta''|=|\zeta'''|<1$. Or, nous venons de montrer que la partie réelle de ζ ne peut pas s'annuler. Donc $z\neq 0$.

Dans certains cas il est avantageux d'opérer avec une unité où z est positif. Si z est négatif $=-z_1$ on peut alors passer à l'unité $\eta_1=-\eta$.

Pour les calculs numériques il est en général pratique et suffisant de supposer que $a \geqslant 0$.

3. Formes et unités. Considérons maintenant l'équation

$$N(x-y\eta)=x^4-ax^3y+bx^2y^2-cxy^3+y^4=1, \tag{8}$$

où η est l'unité définie dans le numéro précédent. Nous allons chercher les solutions de cette équation en nombres entiers rationnels x et y, en négligeant les quatre solutions triviales avec $xy=0$. Soit ξ l'unité fondamentale dans l'anneau $\mathbf{R}(\eta)$, choisie parmi les quatre possibilités. Nous supposons dans la suite que ξ est racine de l'équation à coefficients entiers

$$x^4-px^3+qx^2-rx+1=0.$$

Supposons de plus que $|\xi|>1$. Désignons par ξ', ξ'' et ξ''' les trois autres racines de cette équation de façon qu'on ait

$$|\xi|=|\xi'|>1, \quad |\xi''|=|\xi'''|=|\xi|^{-1}<1.$$

Pour obtenir que $\xi=u+vi$, u et v réels, soit univoquement déterminée il suffit de supposer que $v>0$.

Vu que ξ est l'unité fondamentale dans l'anneau $\mathbf{R}(\eta)$ nous avons évidemment

$$\pm\eta=\xi^M,$$

où M est un nombre naturel $\geqslant 1$. Il résulte de l'équation (8) que

$$x\mp y\xi^M=\pm\xi^N,$$

où N est un nombre entier rationnel. En choisissant les signes des nombres x et y d'une façon apte nous pouvons écrire cette relation sous la forme

$$x-y\xi^M=\xi^N. \tag{9}$$

Lemme 2. *Dans la relation* (9) *on peut supposer que N est positif.*

Démonstration. Supposons que

$$x-y\xi^M=\xi^{-H},$$

où H est un nombre naturel, et posons $\zeta=\xi^{-1}$. Alors on aura en multipliant par ζ^M,

$$x\zeta^M-y=\zeta^{H+M},$$

où $H+M>M\geqslant 1$. Nous avons $|\zeta|<1$ et $|\zeta''|>1$. Il suffit donc de passer du corps $K(\xi)$ au corps $K(\zeta'')$, en échangeant x par $-y$ et y par $-x$.

Lemme 3. *Dans la relation* (9) *on a ou*

$$|x|=|y|=1$$

ou

$$|x|\leqslant|y|-1. \tag{10}$$

Si $|y|=1$ il faut que $|x|=1$.

Démonstration. Il résulte de (9) qu'on a

$$x-y(\xi'')^M=(\xi'')^N,$$

et donc, vu que $N\geqslant 1$,

$$|x|\leqslant|y(\xi'')^M|+|\xi''|^N<|y|+1,$$

d'où $|x|\leqslant|y|$. Les nombres x et y étant premiers entre eux le signe d'égalité est possible seulement pour $|x|=|y|=1$. Autrement on aura (10).

Lemme 4. *Dans la relation* (9) *on peut supposer que*

$$N>M\geqslant 1. \tag{11}$$

Démonstration. Il est évident que nous pouvons faire abstraction du cas $|x|=|y|=1$. Nous aurons d'abord de (9)

$$|\xi|^N=|x-y\xi^M|\geqslant\|x|-|y\xi^M\||. \tag{12}$$

D'après la relation (10) dans le Lemme 3 nous aurons

$$|y|\cdot|\xi|^M>|y|\geqslant|x|+1.$$

Donc, l'inégalité (12) peut s'écrire

$$|\xi|^N\geqslant|y|\cdot|\xi|^M-|x|,$$

d'où suit, vu que $|y|\geqslant 2$,

$$|\xi|^N-|\xi|^M\geqslant(|y|-1)\,(|\xi|^M-1)>0.$$

Il en résulte que $N>M$, et le Lemme 4 se trouve démontré. Il est évident que $N\geqslant 4$.

Lemme 5. *Dans la relation* (9) *on peut supposer que* $(M, N)=1$.

Démonstration. Supposons que $(M,N)=d>1$, et posons $M=dm$ et $N=dn$, où $(m,n)=1$. Si nous posons $\xi_1=\xi^d$ la relation (9) deviendra

$$x-\xi_1^m y=\xi_1^n.$$

Le nombre ξ_1 est du quatrième degré. En effet, si ξ_1 est rationnel $=\pm 1$ on obtiendra $\xi^d=\pm 1$. Or, cela est impossible vu que ξ n'est pas une racine de l'unité. ξ_1 n'est pas du second degré non plus vu que $\mathbf{K}(\xi)$, étant primitif, ne contient aucun sous-corps quadratique.

Nous nous proposons dans ce qui suivra de déterminer toutes les relations du type (9), où les nombres x, y, M, N et ξ satisfont aux conditions indiquées dans ce numéro, y compris les Lemmes 2, 3, 4 et 5. Ces relations seront appelées *relations propres*, sauf dans le cas de $|x|=|y|=1$.

On obtient toutes les *relations impropres*, où les valeurs négatives sont permises pour M et N, de la manière suivante :

Partant d'une relation propre (9), où $N > M \geqslant 1$, on aura en divisant par ξ^M :

$$-y + x\xi^{-M} = \xi^{N-M}.$$

Si dans (9) $|x| = 1$ on obtient encore la relation

$$x + xy\xi^{M-N} = \xi^{-N}.$$

Enfin, s'il existe pour $\zeta = \xi^{-1}$ une relation propre

$$x - y\zeta^M = \zeta^N,$$

avec $N > M \geqslant 1$, on aura aussi

$$x - y\xi^{-M} = \xi^{-N}.$$

La section suivante sera consacré au cas particulier $|x| = |y| = 1$. Le problème correspondant sera résolu complètement pour tous les corps biquadratiques du premier rang. Dans le **§ 3** nous allons déterminer toutes les solutions de quelques équations du type $f(x, y) = 1$, où $f(x, y)$ désigne certaines formes binaires biquadratiques du premier rang. Dans le **§ 4**, nous considérons les unités à discriminant donné dans les corps biquadratiques. Dans le **§ 5**, il s'agit de quelques conséquences de l'équation (9). Dans le **§ 6**, nous démontrerons que l'exposant M est impair pour $|xy| \geqslant 2$, sauf dans un nombre fini de cas. Le **§ 7** contient des lemmes sur les exposants M et N. Dans le **§ 8**, nous allons établir quelques inégalités pour les coefficients p, q et r, et puis nous montrerons que le cas $M = 1$ est impossible lorsque $|xy| \geqslant 2$. Dans le **§ 9**, il s'agit de quelques inégalités pour certaines fonctions trigonométriques. Enfin, dans le **§ 10**, après avoir traité le cas de $M \geqslant 3$, nous arrivons au théorème principal sur le nombre de représentations de l'unité par un type de formes binaires biquadratiques primitifs du premier rang.

§ 2. Les cas dans lesquels η et $1 - \eta$ sont simultanément des unités

4. Precision d'un résultat antérieur. Dans le travail [2] nous avons établi le résultat suivant :

Théorème 1. *Dans un corps biquadratique du premier rang il n'existe qu'un nombre fini d'unités E et E_1 tels qu'on ait*

$$E + E_1 = 1. \tag{13}$$

Il est possible de reconnaître s'il y a des solutions ou non de cette relation, et les solutions eventuelles peuvent être déterminées par un nombre fini d'opérations.

Si m désigne le nombre de relations du type **(13)**, *sans compter la permutation de E et E_1, on a de plus :*

Dans les corps appartenant aux classes **5**, **7**, **8**, **9** *et* **10** *on a $m = 0$, exception faite des corps particuliers dans les classes* **5**, **7** *et* **9** *qui contiennent le nombre $\sqrt{5}$ et par suite les trois relations $1 + \varepsilon - \varepsilon^2 = 0$, $1 - \varepsilon + \varepsilon^{-1} = 0$ et $1 - \varepsilon^{-1} - \varepsilon^{-2} = 0$; donc $m = 3$ dans ces cas. Dans les corps appartenant aux classes* **11** *et* **12** *on a $m = 1$, correspondant à la relation $1 + \varrho + \varrho^2 = 0$, exception faite du corps $\mathbf{K}(\varrho, \varepsilon)$ où l'on a $m = 4$ correspondant aux relations avec ε et ϱ que nous venons d'indiquer.*

Considérons ensuite les classes **1**, **2**, **3** *et* **4**, *et soit* ξ *l'unité fondamentale dans le corps en question, choisie de façon qu'on ait* $|\xi|>1$. *Alors on a* $m=0$ *dans les corps appartenant à l'une ou l'autre des deux classes* **1** *et* **2**, *pourvu que* $|\xi|\geqslant\sqrt{2}$. *Dans les corps appartenant à la classe* **3** *on a aussi* $m=0$, *pourvu que* $|\xi|\geqslant\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. *Dans les corps appartenant à la classe* **4** *on a* $m=1$, *correspondant à la relation* $1+\varrho+\varrho^2=0$, *pourvu que* $|\xi|\geqslant\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

Dans le corps de la classe **13**, *engendré par le nombre* $e^{\pi i/4}$, *on a* $m=0$.

Dans le corps de la classe **6** *on a* $m=9$; *et les relations sont :*

$$1+\xi^2-\xi\varepsilon=0,\quad 1-\xi\varepsilon^{-1}-\xi^{-1}\varepsilon^{-1}=0,\quad 1+\xi^{-2}-\xi^{-1}\varepsilon=0,$$

$$1-\xi^{-1}-\xi^2\varepsilon^{-1}=0,\quad 1-\xi^2\varepsilon-\xi^{-2}\varepsilon=0,\quad 1-\xi-\xi^{-2}\varepsilon^{-1}=0,$$

$$1+\varepsilon-\varepsilon^2=0,\quad 1-\varepsilon+\varepsilon^{-1}=0,\quad 1-\varepsilon^{-1}-\varepsilon^{-2}=0,$$

où $\xi=e^{\pi i/5}$ *et* $\varepsilon=\frac{1}{2}\,(1+\sqrt{5})$.

Dans le corps de la classe **14** *on a* $m=7$; *et les relations sont :*

$$1+\xi^{-1}-\xi^{-2}\varepsilon=0,\quad 1+\xi-\xi^{-1}\varepsilon=0,\quad 1-\xi\varepsilon^{-1}-\xi^2\varepsilon^{-1}=0,$$

$$1-\xi\varepsilon+\xi^2\varepsilon=0,\quad 1-\xi-\xi^{-1}\varepsilon^{-1}=0,\quad 1-\xi^{-1}+\xi^{-2}\varepsilon^{-1}=0,\ 1+\varrho+\varrho^2=0,$$

où $\xi=e^{\pi i/6}$ *et* $\varepsilon=1+\sqrt{2}$.

Pour la classification des corps biquadratiques de rang 1 voir [2], § 3 ou [3], § 2. Grâce à nos résultats dans le travail [3] nous pouvons maintenant résoudre le problème complètement pour les classes 2, 3 et 4 aussi dans les cas où $|\xi|<\sqrt{2}$ ou $<\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. En effet, nous allons montrer qu'on a le

Théorème 2. *Dans la classe* 2 *on a toujours* $m=0$.

Dans la classe **3** *on a* $m=0$, *exception faite du cas suivant : Si* η *désigne une racine de l'équation*

$$x^4+x^2-2x+1=0 \tag{14}$$

on a dans le corps $\mathbf{K}(\eta)$ $m=3$ *avec les relations suivantes :*

$$\eta+\eta_1=1,\ \eta_1^{-1}-\eta\eta_1^{-1}=1,\ \eta^{-1}-\eta^{-1}\eta_1=1.$$

Le discriminant du corps $K(\eta)$ *est* $=272$.

Dans la classe **4** *on a* $m=1$ *avec la relation* $1+\varrho+\varrho^2=0$, *exception faite des deux cas suivants :*

1°) *Si* η *désigne une racine de l'équation*

$$x^4-2x^3+x+1=0 \tag{15}$$

on a dans le corps $\mathbf{K}(\eta)$ $m=4$ *avec les relations suivantes :*

$$\eta+\eta_1=1,\ \eta^{-1}-\eta^{-1}\eta_1=1,\ \eta_1^{-1}-\eta\eta_1^{-1}=1,\ 1+\varrho+\varrho^2=0.$$

Le discriminant du corps est $=189$.

2°) *Si ξ désigne une racine de l'équation*

$$x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 = 0 \tag{16}$$

on a dans le corps $\mathrm{K}(\xi)$ $m = 10$ *avec les relations suivantes :*

$$\xi + \xi_1 = 1,\quad -\xi + \xi_2 = 1,\quad \xi^{-1} - \xi^{-1}\xi_1 = 1,$$

$$\xi_1^{-1} - \xi\xi_1^{-1} = 1,\quad \xi_2\xi^{-1} - \xi^{-1} = 1,\quad \xi_2^{-1} + \xi\xi_2^{-1} = 1,$$

$$\zeta + \zeta_1 = 1,\quad \zeta^{-1} - \zeta^{-1}\zeta_1 = 1,\quad \zeta_1^{-1} - \zeta\zeta_1^{-1} = 1,\quad 1 + \varrho + \varrho^2 = 0,$$

où $\zeta = -\varrho\xi$ *est racine de l'équation*

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0. \tag{17}$$

Le discriminant du corps est $= 117$.

Démonstration. Soit E une unité, racine de l'équation

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + 1 = 0.$$

Pour que $1 - E$ soit aussi une unité il faut que la forme

$$N(x - Ey) = x^4 - px^3y + qx^2y^2 - rxy^3 + y^4$$

ait (au moins) six représentations de l'unité. Dans la classe 2 il n'y a pas de formes ayant six représentations; voir théorème 5 dans [3]; donc on a dans ce cas $m = 0$.

Dans la classe 3 toute forme ayant six représentations est équivalente à la forme

$$x^4 + v^2x^2y^2 - 2vxy^3 + y^4,$$

où v est un nombre naturel quelconque; comparez théorème 3 dans [3]. Soit E une racine de l'équation

$$x^4 + v^2x^2 - 2vx + 1 = 0.$$

Pour que $1 - E$ soit une unité il faut évidemment que $v = 1$. Cela démontre notre assertion sur la classe 3.

Dans la classe 4 toute forme ayant exactement six représentations est équivalente à une forme du type

$$x^4 + 2tx^3y + (t^2 + h_1)x^2y^2 + h_1txy^3 + y^4,$$

où $h_1 = \pm 1$ et où t est un nombre naturel quelconque, exception faite du cas $t = 2$, $h_1 = +1$; voir théorème 3 dans [3]. Encore, toute forme ayant huit représentations est équivalente à

$$x^4 - x^3y - x^2y^2 + xy^3 + y^4:$$

voir théorème 2 dans [3].

Désignons par η une racine de l'équation

$$x^4+2tx^3+(t^2+h_1)x^2+h_1tx+1=0. \tag{18}$$

Pour que $1-\eta$ soit une unité il faut qu'on ait

$$1+2t+t^2+h_1+h_1t=0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(1+t)\;(1+t+h_1)=0.$$

Supposons d'abord que $t=-1$. Pour $h_1=-1$ on aura alors

$$\eta^4-2\eta^3+\eta+1=0$$

avec le discriminant $D(\eta)=189$.

Pour $t=-1$ et $h_1=+1$ on aura

$$\eta^4-2\eta^3+2\eta^2-\eta+1=0,$$

avec le discriminant $D=117$.

En prenant $1+t+h_1=0$ et $h_1=+1$ on aura $t=-2$, ce qui donnera

$$\eta^4-4\eta^3+5\eta-2\eta+1=0,$$

avec $D=144$; η appartiendra alors à la classe 14.

En prenant $1+t+h_1=0$ et $h_1=-1$ on aura $t=0$, ce qui donnera

$$\eta^4-\eta^2+1=0.$$

Aussi dans ce cas η appartiendra à la classe 14.

Désignons par ξ une racine de l'équation (16) qui a le discriminant $D(\xi)=117$. Les corps engendrés par les équations (17) et (16) sont les mêmes. Il y a une racine η de (17) telle que $\eta=-\varrho^2\xi^2$, où ϱ est une racine de $x^2+x+1=0$. Le nombre 117 représente la valeur *minimum* possible pour les discriminants des corps biquadratiques du premier rang; voir Hasse [6].

Considérons maintenant le corps engendré par η, racine de l'équation (15), et posons $\eta_1=1-\eta$. Alors, il est évident que, dans ce corps, $m=4$, et qu'il n'existe pas d'autres relations que celles données dans le Théorème 2.

En passant au corps engendré par ξ, racine de l'équation (16), on voit que les nombres $\xi_1=1-\xi$ et $\xi_2=1+\xi$ sont des unités. Encore, si $\zeta=-\varrho\xi$ est une racine de l'équation (17) le nombre $\zeta_1=1-\zeta$ est une unité. Donc, on trouvera qu'il existe exactement dix relations, savoir les relations indiquées dans le Théorème 2.

Il reste encore à déterminer toutes les relations du type (13) dans les corps de la classe 1. Nous allons faire cela dans le numéro suivant.

5. Solution complète du problème dans la classe 1.

D'après le numéro 3 il s'agit de la résolution complète de l'équation

$$\pm 1 \pm \xi^M=\xi^N, \tag{19}$$

où $N > M \geqslant 1$ et $(M, N) = 1$, le nombre ξ étant l'unité fondamentale dans l'anneau $\mathbf{R}(\xi^M) = \mathbf{R}(\eta)$, lorsque $1 < |\xi| < \sqrt{2}$. Nous supposons que ξ est racine de l'équation à coefficients entiers rationnels

$$\xi^4 - p\xi^3 + q\xi^2 - r\xi + 1 = 0,$$

où $p \geqslant 0$. D'après le Lemme 1 et les inégalités (5″) et (7) nous aurons alors (pour $k = \sqrt{2}$) :

$$0 \leqslant p \leqslant 4, \ |r| \leqslant 4, \ -1 \leqslant q \leqslant 6. \tag{20}$$

Encore, d'après les inégalités (5) il est évident qu'on a

$$\left.\begin{aligned} q &\geqslant p + r - 1, \\ q &\geqslant -p - r - 1. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

La relation (19) entraîne que l'un ou l'autre des deux nombres $1 - \xi$ et $1 + \xi$ est une unité. En effet, prenons d'abord le cas

$$\pm \xi^M = \xi^N - 1.$$

Le terme à droite est divisible par $\xi - 1$, et ce nombre est donc une unité. Considérons ensuite la relation

$$-1 + \xi^M = \xi^N.$$

Ici le terme à gauche est divisible par $\xi - 1$, et ainsi ce nombre est une unité. Enfin, si nous avons la relation

$$-1 - \xi^M = \xi^N,$$

le nombre $1 + \xi$ est une unité lorsque M est impair. Si M est pair, N est impair d'après le Lemme 5; alors $1 + \xi$ est un diviseur de $1 + \xi^N$ et par conséquent une unité. Donc, si nous posons

$$f(x, y) = x^4 - px^3y + qx^2y^2 - rxy^3 + y^4,$$

nous avons ou $f(1, 1) = 1$ ou $f(1, -1) = 1$, c'est-à-dire ou

$$q = p + r - 1 \tag{22}$$

ou

$$q = -p - r - 1. \tag{23}$$

Par conséquent, les coefficients p, q et r sont limités par les relations (20), (21), (22) et (23). Les résultats des calculs numériques sont donnés dans le tableau suivant, où nous indiquons le discriminant D du corps ainsi que la classe. Nég. signifie que D est négatif.

On observe que dans ce tableau un corps primitif (classe 1) ne paraît que pour le discriminant $D = 229$. On montre aisément qu'il s'agit dans tous les six cas du même corps, ou plutôt du même quadruplet de corps.

Tableau

p	r	q	D	Classe	p	r	q	D	Classe
0	0	-1	144	14	2	-3	0	nég.	
0	± 1	0	229	1	2	-4	1	nég.	
0	± 2	1	272	3	2	-1	0	272	3
0	± 3	2	117	4	3	0	2	117	4
0	± 4	3	nég.		3	1	3	229	1
1	0	0	229	1	3	2	4	125	6
1	1	1	125	6	3	3	5	117	4
1	2	2	117	4	3	4	6	229	1
1	3	3	229	1	3	-1	1	nég.	
1	4	4	nég.		3	-2	0	nég.	
1	-1	-1	117	4	3	-3	-1	nég.	
1	-2	0	189	4	3	-4	0	nég.	
1	-3	1	nég.		4	0	3	nég.	
1	-4	2	nég.		4	1	4	nég.	
2	0	1	272	3	4	2	5	144	14
2	1	2	117	4	4	3	6	229	1
2	2	3	0		4	-1	2	nég.	
2	3	4	125	6	4	-2	1	nég.	
2	4	5	144	14	4	-3	0	nég.	
2	-2	-1	0		4	-4	-1	nég.	

On en obtiendra le résultat suivant :

Théorème 3. *Dans la classe 1 on a $m=0$, exception faite du cas suivant : Si η désigne une racine de l'équation*

$$x^4-x+1=0 \tag{24}$$

on a dans le corps $\mathbf{K}(\eta)$ $m=3$ avec les relations suivantes :

$$\eta-\eta^4=1, \quad \eta^{-1}+\eta^3=1, \quad \eta^{-3}-\eta^{-4}=1.$$

Le discriminant du corps est $=229$.

Pour achever la démonstration il suffit d'observer les faits suivants : L'équation

$$x^4-x^3+1=0$$

a la racine η^{-1}, lorsque η est une racine de (24). L'équation

$$x^4-3x^3+3x^2-x+1=0$$

a la racine $(\eta-1)\eta^{-1}=\eta^3$. L'équation

$$x^4-x^3+3x^2-3x+1=0$$

admet la racine $\eta(\eta-1)^{-1}=\eta^{-3}$. L'équation

$$x^4-4x^3+6x^2-3x+1=0$$

possède la racine $1-\eta=-\eta^4$; et l'équation

$$x^4-3x^3+6x^2-4x+1=0$$

a la racine $(1-\eta)^{-1}=-\eta^{-4}$. Toutes les équations ont le discriminant 229, qui est la valeur *minimum* des discriminants dans les corps biquadratiques primitifs.

On vérifie aisément que les formes

$$((1,0,0,-1,1)),\quad ((1,-1,3,-3,1)) \text{ et } ((1,-3,6,-4,1))$$

sont équivalentes. Nous allons préciser ce fait dans le chapitre suivant (Théorème 5).

§ 3. Sur quelques formes particulières

6. On démontre aisément le

Lemme 6. *Les corps engendrés par l'équation*

$$x^4+qx^2-x+1=0, \tag{25}$$

où q est un entier rationnel $\geqslant 0$, ont le rang 1 et ils sont primitifs.

En effet, il est évident que l'équation (25) n'admet aucune racine réelle. Pour montrer qu'il n'y a pas de sous-corps quadratique il suffit de constater que la résolvante cubique

$$z^3+2qz^2+(q^2-4)z-1=0$$

n'a pas de racine rationnelle; comparez [1], p. 349.

Théorème 4. *Il y a exactement 6 solutions de l'équation*

$$x^4-xy^3+y^4=1 \tag{26}$$

en nombres entiers rationnels x et y, savoir $x=0$, $y=\pm 1$; $y=0$, $x=\pm 1$; $x=y=\pm 1$.

Si q est un entier rationnel $\geqslant 1$, l'équation

$$f(x,y)\equiv x^4+qx^2y^2-xy^3+y^4=1 \tag{27}$$

n'admet pas d'autres solutions en nombres entiers rationnels x et y que $x=0$, $y=\pm 1$; $y=0$, $x=\pm 1$. Cela est aussi vrai pour l'équation

$$g(x,y)\equiv x^4+2qx^3y+(2+q^2)x^2y^2+(2q-1)xy^3+y^4=1, \tag{28}$$

sauf si $q=2$, dans quel cas il y a aussi les solutions $x=-y=\pm 1$.

Démonstration. Pour établir ce résultat sur les équations (26) et (27) il suffit évidemment de supposer que x et y sont tous les deux >1. Si $x>y$ on a $f(x,y)>qx^2y^2+y^4>1$; si $x<y$ on a $f(x,y)>x^4+qx^2y^2>1$. Cela démontre le théorème pour l'équation (27). Pour l'équation (26) on a seulement à mettre $q=0$.

L'équation (28) peut s'écrire

$$g(x,y)\equiv (x^2+qxy+y^2)^2-xy^3=1.$$

Pour $q=2$ seulement on a la possibilité $x=-y=\pm 1$. Donc, comme tout à l'heure il suffit de supposer que x et y sont >1. Si $x>y$ on a $g(x,y)>x^4-xy^3>1$; si $x<y$ on a $g(x,y)>y^4-xy^3>1$. Ainsi le Théorème 4 se trouve démontré.

Nous allons y ajouter les deux résultats suivants :

Théorème 5. *Il y a exactement* 6 *solutions de l'équation*

$$f(x, y) \equiv (x^2+3xy+y^2)^2 - xy(3x+y)^2 = 1 \tag{29}$$

en nombres entiers rationnels x et y, savoir $x=0$, $y=\pm 1$; $y=0$, $x=\pm 1$; $x=\pm 1$, $y=\mp 3$.

Théorème 6. *Il y a exactement* 6 *solutions de l'équation*

$$g(x, y) \equiv (x^2+3xy+y^2)^2 - xy(2x+y)^2 = 1 \tag{30}$$

en nombres entiers rationnels x et y, savoir $x=0$, $y=\pm 1$; $y=0$ $x=\pm 1$; $x=\pm 1$, $y=\mp 2$.

Démonstration. Considérons d'abord l'équation (29). Si $xy(3x+y) \neq 0$ il suffit évidemment de supposer que x et y sont tous les deux $\geqslant 1$. Alors on a pour toutes ces valeurs de x et y

$$f(x, y) = (x^2 - \tfrac{3}{2}\, xy)^2 + \tfrac{11}{4}\, x^2 y^2 + 5\, xy^3 + y^4 > 1.$$

Considérons ensuite l'équation (30). Si $xy(2x+y) \neq 0$ il suffit évidemment de supposer que x et y sont tous les deux $\geqslant 1$. Alors on a

$$g(x, y) = x^4 + 2x^3y + 7x^2y^2 + 5xy^3 + y^4 > 1.$$

Cela démontre les deux théorèmes.

Désignons par $\xi = u+vi$, u et v réels et $v>0$, une racine de l'équation $x^4 - x + 1 = 0$ telle que $|\xi| > 1$. On montre aisément que ξ est l'unité fondamentale de l'anneau $\mathbf{R}(\xi)$ et même du corps $\mathbf{K}(\xi)$. Alors le théorème sur l'équation (26) dit que la relation

$$x - y\xi = \xi^N$$

ne peut subsister que pour $x=1$, $y=0$, $N=0$; $x=0$, $y=-1$, $N=1$; $x=-1$, $y=-1$, $N=4$.

Désignons ensuite par η une racine de l'équation

$$x^4 + qx^2 - x + 1 = 0$$

telle que $|\eta| > 1$. Alors le théorème sur l'équation (27) dit que la relation

$$x - y\eta = \eta^H,$$

où H est rationnel, pas nécessairement entier, n'est possible que pour $x=1$, $y=0$, $H=0$; $x=0$, $y=-1$, $H=1$.

Le théorème sur l'equation (28) dit que la relation

$$x - y\eta^2 = \eta^{H_1},$$

où H_1 est rationnel, pas nécessairement entier, n'est possible que pour $x=1$, $y=0$, $H_1=0$; $x=0$, $y=-1$, $H_1=2$; et si $q=2$, on a $x=1$, $y=-1$, $H_1=\tfrac{1}{4}$.

On vérifie aisément que l'équation

$$(x^2+3x+1)^2 - x(3x+1)^2 = 0$$

admet la racine $\eta = \xi^6$, où ξ désigne la racine de l'équation $x^4 - x + 1 = 0$ définie tout à l'heure. Alors le Théorème **5** dit que la relation

$$x - y\xi^6 = \xi^N$$

ne peut subsister que dans les cas suivants : $x=1, y=0, N=0$; $x=0, y=-1, N=6$; $x=-1$, $x=3$, $N=13$.

Désignons par $\zeta = u + vi$, u et v rationnels et $v > 0$, une racine de l'équation

$$x^4 + x^2 + x + 1 = 0$$

telle que $|\zeta| > 1$. Alors $\zeta_1 = \zeta^2$ est racine de l'équation

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0,$$

et le nombre $\eta = \zeta_1^2$ est racine de l'équation

$$(x^2 + 3x + 1)^2 - x(2x+1)^2 = 0.$$

Alors on montre aisément que le nombre ζ est l'unité fondamentale du corps $\mathbf{K}(\zeta)$ et aussi des anneaux $\mathbf{R}(\zeta^2)$ et $\mathbf{R}(\eta) = \mathbf{R}(\zeta^4)$. Donc, le Théorème **6** dit que la relation

$$x - y\zeta^4 = \zeta^N$$

ne peut subsister que dans les cas suivants : $x=1$, $y=0$, $N=0$; $x=0$, $y=-1$, $N=4$; $x=-1$, $y=2$, $N=7$.

On a $D(\zeta) = D(\zeta^2) = D(\zeta^4) = 257$.

Nous finissons cette section avec un résultat sur l'équivalence des formes.

Théorème 7. *Les formes suivantes sont les seules formes du type* $((1, b, c, d, 1))$ *qui sont équivalentes avec la forme* $((1, 0, 0, -1, 1))$:

$((1, 1, 3, 3, 1))$, $((1, -1, 3, -3, 1))$, $((1, -3, 6, -4, 1))$, $((1, 3, 6, 4, 1))$ *et* $((1, 0, 0, 1, 1))$.

Remarque. Les formes $((1, b, c, d, 1))$ et $((1, d, c, b, 1))$ sont considérées d'être identiques.

Démonstration. Par une transformation unimodulaire

$$x = eu + fv, \; y = gu + hv,$$

avec $eh - fg = \pm 1$, la forme

$$x^4 - xy^3 + y^4$$

sera transformée en la forme

$$(e^4 - eg^3 + g^4)u^4 + bu^3v + cu^2v^2 + duv^3 + (f^4 - fh^3 + h^4)v^4,$$

où b, c et d sont des formes biquadratiques en e, f, g, et h. Nous aurons alors les conditions

$$e^4 - eg^3 + g^4 = f^4 - fh^3 + h^4 = 1.$$

Grâce au Théorème 4 sur l'équation (26) nous pouvons déterminer toutes les solutions en nombres entiers rationnels de ce système, combiné avec la condition $eh - fg = \pm 1$. Le calcul donnera les formes indiquées dans le Théorème **5**.

§ 4. Remarques sur les unités dans un corps biquadratique quelconque

7. Unités ayant le même discriminant

D'un résultat que j'ai établi sur les discriminants des nombres algébriques du quatrième degré (voir le théorème 4 dans [7]) on obtient le corollaire suivant :

Théorème 8. *Désignons par* Φ *le domaine consistant de toutes les unités du quatrième degré, exception faite des unités engendrant des corps primitifs d'un rang* > 1. *Soit* D *le discriminant d'un nombre de* Φ. *Alors, il n'y a qu'un nombre fini d'unités dans* Φ *ayant le discriminant* D.

La méthode de démonstration du théorème 4 dans [7] donne en outre un algorithme pour déterminer toutes les possibilités lorsque D est donné, sauf dans le cas d'un corps primitif du premier rang. Dans ce cas d'exception la méthode repose sur un résultat général de Chabauty dont la démonstration ne rend pas un tel algorithme; voir [9]. Dans ce travail-ci ce sont les corps primitifs du premier rang qui font nôtre sujet principal. Donc, si η est une unité (irrationnelle) dans un tel corps il nous manque de méthode générale pour déterminer toutes les puissances de η qui possèdent le même discrimant que η.

Exemples numériques. Lorsque ξ est une racine de $x^4 - x + 1 = 0$, on a

$$D(\xi) = D(\xi^2) = D(\xi^3) = D(\xi^4) = D(\xi^6) = D(\xi^7) = 229.$$

Pour les exposants 2, 3 et 4 cela est déjà vérifié par les relations

$$\xi^4 = \xi - 1 \quad \text{et} \quad \xi^3 = 1 - \xi^{-1}.$$

Pour les exposants 6 et 7 cela se voit pa les relations

$$\xi^{13} = -1 - 3\xi^6 \quad \text{et} \quad \xi^{-13} = -1 - 3\xi^{-7},$$

qui peuvent s'écrire

$$\xi = -(\xi^{-6})^2 - 3(\xi^{-6}) \quad \text{et} \quad \xi = -(\xi^7)^2 - 3(\xi^7).$$

Je ne sais pas s'il existe des exposants $m > 7$ tels qu'on ait

$$D(\xi^m) = D(\xi).$$

La puissance ξ^5 n'a pas le discriminant 229.

Lorsque ζ est une racine de l'équation $x^4 + x^2 + x + 1 = 0$, on a

$$D(\zeta) = D(\zeta^2) = D(\zeta^3) = D(\zeta^4) = 257.$$

Cela est vérifié par les relations

$$\zeta^7 = -1 - 2\zeta^4 \quad \text{et} \quad \zeta^{-7} = -1 - 2\zeta^{-3}$$

qui peuvent s'écrire

$$\zeta^{-1} = -(\zeta^{-4})^2 - 2(\zeta^{-4}) \quad \text{et} \quad \zeta^{-1} = -(\zeta^3)^2 - 2(\zeta^3).$$

Soit **K** un corps biquadratique primitif du premier rang engendré par l'unité η. Supposons qu'on ait

$$D(\eta^m) = D(\eta), \tag{38}$$

où m est un nombre naturel; et soit d un diviseur de m. Alors, il est évident qu'on a aussi

$$D(\eta^d) = D(\eta). \tag{38'}$$

En effet, la relation (38) signifie que le nombre

$$\frac{\eta^m - \eta'^m}{\eta - \eta'},$$

où η' est un nombre conjugué à η, est une unité dans le corps $\mathbf{K}(\eta, \eta')$. Alors, le nombre

$$\frac{\eta^d - \eta'^d}{\eta - \eta'}$$

est aussi une unité dans le même corps.

La relation (38) entraîne que les anneaux $\mathbf{R}(\eta)$ et $\mathbf{R}(\eta^m)$ sont identiques; inversement, si les anneaux sont identiques la relation (38) subsiste; comparez [5], Théorème 15.

8. Les cas dans lesquels les unités ε et ε^2 ont le même discriminant. Désignons par ε une racine de l'équation

$$x^4 + qx^2 - x + 1 = 0,$$

où $q \geqslant 0$. D'après le Lemme **6** le corps $\mathbf{K}(\varepsilon)$ est primitif et du premier rang. Le nombre ε^2 est racine de l'équation

$$x^4 + 2qx^3 + (2+q^2)x^2 + (2q-1)x + 1 = 0;$$

comparez le Théorème **4**, formule (28). Vu que

$$\varepsilon = 1 + q\varepsilon^2 + \varepsilon^4$$

il est évident que ε et ε^2 engendrent le méme anneau. On a donc $D(\varepsilon) = D(\varepsilon^2)$.

Nous allons déterminer toutes les unités ε d'un corps biquadratique primitif du premier rang telles que $D(\varepsilon) = D(\varepsilon^2)$. Soit ε racine de l'équation

$$\varepsilon^4 = p\varepsilon^3 - q\varepsilon^2 + r\varepsilon - 1.$$

Il en résulte

$$\varepsilon^{-2} = r^2 - q + (p - qr)\varepsilon + (pr-1)\varepsilon^2 - r\varepsilon^3.$$

Une base de l'anneau $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$ est constituée par les nombres 1, ε^2, ε^4 et ε^{-2}. Donc, si $\mathbf{R}(\varepsilon) = \mathbf{R}(\varepsilon^2)$ on a

$$\varepsilon = a + b\varepsilon^2 + c\varepsilon^4 + d\varepsilon^{-2},$$

où a, b, c et d sont des nombres entiers rationnels. Il en résulte que le système suivant d'équations doit subsister

$$cp-dr=0, \quad b-cq+dpr-d=0,$$

$$cr+dp-dqr=1, \quad a-c-dq+r^2d=0.$$

Si $p=0$ on aura $d=0$; $p=r=0$ donnerait des corps imprimitifs. Par suite on obtient $cr=1$ et $c=\pm 1$, $r=\pm 1$, $b=\pm q$, $a=\pm 1$. Alors, on tombera sur l'équation $x^4+qx^2\mp x+1=0$. Si $r=0$ on aura l'équation inverse.

Supposons maintenant que $pr \neq 0$. On aura alors $d=\pm p$, $c=\pm r$, vu qu'on a évidemment $(c, d)=1$. Donc, le système d'équations, après l'élimination de d, sera

$$\pm b = qr-p^2r+p, \ \pm(a-c)=pr^2-pq, \ \pm 1 = p^2+r^2-pqr.$$

Dans le § 6 nous allons traiter la dernière de ces équations. Nous allons y montrer l'impossibilité de cette équation pour $pr \neq 0$, sauf dans les cas suivants :

$$p=\pm 1,\ q=3,\ r=\pm 3; \quad p=\pm 1,\ q=3,\ r=\pm 2;$$

$$p=\pm 3,\ q=3,\ r=\pm 1; \quad p=\pm 2,\ q=3,\ r=\pm 1.$$

Le résultat peut être formulé sous la forme suivante :

Théorème 9. *Soit ε une unité (irrationelle) dans un corps biquadratique primitif du premier rang. Alors, si l'on a $D(\varepsilon)=D(\varepsilon^2)$, ε est racine de l'une des équations suivantes :*

$$x^4+qx^2\mp x+1=0, \text{ avec } q \geqslant 0,$$

$$x^4\mp x^3+3x^2\mp 3x+1=0,$$

$$x^4\mp x^3+3x^2\mp 2x+1=0,$$

ou de l'une des équations inverses de celles-ci.

9. Les unités $x-y\eta$ où $|x|=|y|=1$.

Rappelons quelques résultats obtenus dans les § 2 et § 3 sur les unités η (irrationnelles) dans les corps biquadratiques primitifs du premier rang. D'après le Théorème 3 nous avons le résultat :

Si η et $1\pm\eta$ sont en même temps des unités il faut que η soit racine d'une des équations suivantes

$$x^4\mp x+1=0, \quad x^4\mp x^3+1=0, \quad x^4\mp 3x^3+3x^2\mp x+1=0,$$

$$x^4\mp x^3+3x^2\mp 3x+1=0, \quad x^4\mp 4x^3+6x^2\mp 3x+1=0, \text{ ou}$$

$$x^4\mp 3x^3+6x^2\mp 4x+1=0.$$

Désignons par ε une racine de l'équation $x^4-x+1=0$. Alors, les racines de ces équations, suivant l'ordre indiqué, ont les valeurs

$$\pm\varepsilon,\ \pm\varepsilon^{-1},\ \pm\varepsilon^{3},\ \pm\varepsilon^{-3},\ \mp\varepsilon^{4},\ \mp\varepsilon^{-4}.$$

Dans tous ces cas le discriminant de η a la valeur 229.

D'après le Théorème 4 l'équation

$$N(x-y\eta)=1,$$

où $\eta=\pm\varepsilon^h$, $h=\pm1,\ \pm3,\ \pm4$, admet exactement les 6 solutions entières suivantes : $x=0$, $y=\pm1$; $x=\pm1$, $y=0$; $x=y=\pm1$ (lorsque $1-\eta$ est une unité) ou $x=-y=\pm1$ (lorsque $1+\eta$ est une unité). *Seulement pour ces valeurs de η l'équation en question peut avoir des solutions avec $|x|=|y|=1$.*

D'après le Théorème 7 les formes

$$N(x-y\eta)$$

sont équivalentes à la forme

$$F_1=N(x-y\varepsilon)$$

seulement pour les valeurs $\eta=\pm\varepsilon^h$, $h=\pm1,\ \pm3,\ \pm4$. Toutes ces formes ont le discriminant 229, ce qui est aussi le cas pour les trois formes

$$F_2=N(x-y\varepsilon^2),\quad F_6=N(x-y\varepsilon^6),\quad F_7=N(x-y\varepsilon^7).$$

Tout de même, aucune de celles-ci n'est équivalente à F_1. On vérifie aisément que F_6 et F_7 sont équivalentes entre elles, tandis que F_2 n'est pas équivalente à F_6.

Cependant, on voit immédiatement que tous les anneaux $\mathbf{R}(\varepsilon)$, $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$, $\mathbf{R}(\varepsilon^3)$, $\mathbf{R}(\varepsilon^4)$, $\mathbf{R}(\varepsilon^6)$ et $\mathbf{R}(^7)$ coincident; comparez le numéro 7.

Dans ce qui suivra il suffit de considérer les unités $x-y\eta$ où $|y|\geqslant 2$.

§ 5. Les unités de la forme $x-y\eta$ pour $|y|>1$

10. Conséquences de l'equation (9). Soient η et ξ définies comme dans le numéro 3, et considérons de nouveau l'équation (9) :

$$x-y\eta=x-y\xi^M=\xi^N. \tag{39}$$

D'après les Lemmes 2, 3, 4 et 5 dans le même numéro nous pouvons supposer que, dans cette équation, l'exposant N est positif et $>M\geqslant 1$, et de plus que N et M sont premiers entre eux.

Vu que ξ est l'unité fondamentale dans l'anneau $\mathbf{R}(\eta)=\mathbf{R}(\xi^M)$, il est évident que ξ et ξ^M ont le même discriminant : $D(\xi^M)=D(\xi)$. Il en résulte que tous les nombres

$$\frac{(\xi^{(i)})^m-(\xi^{(j)})^m}{\xi^{(i)}-\xi^{(j)}}, \tag{40}$$

où $\xi^{(i)}$ et $\xi^{(j)}$ signifient des conjugués distincts de ξ, *sont des unités.* Soit C un diviseur de M. Alors il est évident que tous les nombres

$$\frac{(\xi^{(i)})^C-(\xi^{(j)})^C}{\xi^{(i)}-\xi^{(j)}} \tag{40'}$$

sont aussi des unités. On a donc $D(\xi^C)=D(\xi)$, et par suite on obtient $\mathbf{R}(\xi^C)=\mathbf{R}(\xi)$.

Une conséquence du Théorème 8 est alors que l'équation (39) n'est possible que pour un nombre limité de valeurs de M, lorsque ξ est donnée.

En désignant, comme plus haut, par ξ'' et ξ''' les conjugués de ξ pour lesquels $|\xi''|=|\xi'''|<1$, nous obtenons de (39) les relations

$$x-y(\xi'')^M=x-y\eta''=(\xi'')^N,\ x-y(\xi''')^M=x-y\eta'''=(\xi''')^N.$$

En éliminant x nous aurons

$$-y=\frac{(\xi'')^N-(\xi''')^N}{(\xi'')^M-(\xi''')^M}=\frac{(\eta'')^H-(\eta''')^H}{\eta''-\eta'''}, \tag{41}$$

où $H=N/M$. Posons maintenant

$$\eta''=z+wi=|\eta''|e^{\beta i},$$

où z et w sont réels, et où β est un angle réel. D'après le numéro 2 le nombre z est $\neq 0$. Si M est impair on peut toujours supposer que z est positif. En effet, si $z<0$ on peut remplacer η par $\zeta=-\eta$, donc η'' par $\zeta''=-\eta''$. La condition pour que $\zeta''=-\eta''=-(\xi'')^M$ soit une M-ième puissance dans le corps est remplie lorsque M est impair. Donc, dans les cas où M est impair, il suffit de considérer les unités η telles que z (dans η'') soit positif. Aussi le nombre w peut être supposé positif; en effet, si w est négatif on peut échanger η'' et η'''. Par conséquent, si M est impair il suffit de considérer les unités η telles que, dans

$$\eta''=|\eta''|e^{\beta i},$$

l'angle β soit situé dans le premier quadrant.

De la relation (41) on obtient évidemment

$$-y=|\eta''|^{H-1}\cdot\frac{\sin H\beta}{\sin\beta}. \tag{42}$$

§ 6. Le cas particulier où M est pair

11. Considérons l'équation

$$x-y\eta=x-y\xi^M=\xi^N. \tag{43}$$

où M est pair $=2T$, et N impair, $N>M\geqslant 2$; supposons que $|xy|\geqslant 2$. Alors, l'équation (41) peut s'écrire

$$-y\cdot\frac{(\xi'')^T-(\xi''')^T}{\xi''-\xi'''}\cdot[(\xi'')^T+(\xi''')^T]=\frac{(\xi'')^N-(\xi''')^N}{\xi''-\xi'''}.$$

D'après le numéro 10 le nombre

$$\frac{(\xi'')^M-(\xi''')^M}{\xi''-\xi'''}$$

est une unité. Par conséquent, le nombre

$$(\xi'')^T+(\xi''')^T$$

l'est aussi. Posons $\xi^T=\pm\beta$ et supposons que β est racine de l'équation

$$x^4-Px^3+Qx^2-Rx+1=0. \tag{44}$$

β peut être choisi de façon que $P\geqslant 0$. Alors tous les nombres conjugués $\beta^{(i)}+\beta^{(j)}$, pour $i\neq j$, sont des unités, et par suite le produit

$$(\beta+\beta')\ (\beta+\beta'')\ (\beta+\beta''')=P\beta^2+R$$

est aussi une unité. Par conséquent, en prenant la norme, on obtient

$$N(P\beta^2+R)=(P^2+R^2-PQR)^2=1.$$

Donc, l'équation (43) entraîne que les coefficients P, Q et R satisfassent à la relation

$$P^2+R^2-PQR=\pm 1. \tag{45}$$

Dans le numéro suivant nous allons déterminer toutes les solutions de (45) et par suite toutes les solutions de (43) pourvu que $|xy|\geqslant 2$.

On doit observer que ξ, racine de l'équation

$$x^4-px^3+qx^2-rx+1=0,$$

est l'unité fondamentale dans l'anneau

$$\mathbf{R}(\xi)=\mathbf{R}(\eta)=\mathbf{R}(\xi^M)=\mathbf{R}(\xi^T)=\mathbf{R}(\beta).$$

Vu que $|\xi|>1$ on a $|\beta|>1$.

12. D'après le numéro 5 les inégalités suivantes doivent être satisfaites :

$$Q\geqslant P+R-1,\quad Q\geqslant -P-R-1,\quad P\geqslant 0,\quad Q\geqslant -1. \tag{46}$$

Premier cas : $-1\leqslant Q\leqslant 0$.

Pour $Q=-1$ on aura, d'après (45), les possibilités $P=0$, $R=\pm 1$; $P=1$, $R=0$; $P=1$, $R=-1$. Seulement la dernière possibilité satisfait aux conditions (46). Dans ce cas l'équation (44) aura la forme $x^4-x^3-x^2+x+1=0$; les corps appartiennent donc à la classe 4 (discriminant $=117$).

Pour $Q=0$ on aura les possibilités : $P=0$, $R=\pm 1$ et $P=1$, $R=0$ qui donnent les équations $x^4-x+1=0$, $x^4+x+1=0$ et $x^4-x^3+1=0$. Celles-ci engendrent les mêmes corps de la classe 1 et possèdent le discriminant 229, et il suffit d'en prendre la première. Donc, $\beta=\pm\xi^T$ est une racine de l'équation $x^4-x+1=0$. Alors on a $T=1$ et $\eta=\xi^2$. Le nombre ξ^2 est une racine de l'équation $x^4+2x^2-x+1=0$. Or, il résulte du Théorème 4 que l'équation

$$N(x-y\eta)=N(x-y\xi^2)=x^4+2x^2y^2-xy^3+y^4=1$$

n'admet que les quatre solutions $x=0$, $y=\pm1$ et $x=\pm1$, $y=0$.

Deuxième cas : $Q\geqslant1$, $0\leqslant P\leqslant1$.

Pour $P=0$ on aura $R=\pm1$, et β est racine d'une des équations

$$x^4+Qx^2\pm x+1=0. \tag{47}$$

Il suffit de prendre le signe supérieur. Alors on vérifie aisément que le nombre $\eta=\beta^2$ est racine de l'équation

$$(z^2+Qz+1)^2=z.$$

Or, il résulte du Théorème 4 que l'équation

$$N(x-y\eta)=(x^2+qxy+y^2)^2-xy^3=1 \tag{48}$$

n'admet que les quatre solutions $x=0$, $y=\pm1$ et $x=\pm1$, $y=0$. Pour $P=1$ et $R=0$ on aura la même forme que dans (48).

Pour $P=1$ et $|R|\geqslant1$ on obtient la relation

$$R^2-QR=\pm1-1. \tag{49}$$

Ici le signe supérieur donnera $R=Q$ et par suite l'équation

$$x^4-x^3+Qx^2-Qx+1=0, \tag{50}$$

dont le discriminant a la valeur

$$D=229-4Q^5+8Q^4+56Q^3-116Q^2-48Q. \tag{51}$$

Pour $Q=1$ on aura le corps engendré par $e^{2\pi i/5}$, avec le discriminant 125, appartenant à la classe 6. Pour $Q=2$ les corps seront de la classe 4 avec le discriminant 117. Pour $Q=3$ on aura l'équation

$$x^4-x^3+3x^2-3x+1=0,$$

au discriminant 229, que nous avons rencontrée dans les numéros 5 et 6. Donc $\beta=\zeta^3$, où ζ est une racine de l'équation $x^4-x^3+1=0$. D'après le Théorème 5 l'équation

$$N(x-y\eta)=N(x-y\zeta^6)=(x^2+3xy+y^2)^2-xy(x+3y)^2=1$$

n'admet que les six solutions suivantes en nombres entiers rationnels x et y : $x=0$,

$y = \pm 1$; $y = 0$, $x = \pm 1$; $x = \pm 3$, $y = \mp 1$. Cela donne la solution suivante de nôtre problème (43) :

$$-3 - \zeta^6 = \zeta^{-7},$$

où l'exposant N est négatif $= -7$. Cependant, cette relation est impropre.

Pour $Q \geqslant 4$ le discriminant (51) deviendra négatif, et les corps seront d'un rang > 1.

En prenant le signe inférieur dans (49) nous aurons $R^2 - RQ = -2$, d'où résultera ou $R = 1$, $Q = 3$ ou $R = 2$, $Q = 3$. Dans le premier cas l'équation sera

$$x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0,$$

qui engendre des corps appartenant à la classe 4 (sous-corps $\mathbf{K}(\sqrt{-3})$). Dans le second cas l'équation sera

$$x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0. \tag{52}$$

Celle-ci définit des corps primitifs du premier rang au discriminant $D = 257$. D'après le numéro **6** nous savons que l'équation (52) admet la racine $-\varepsilon^2$, où le nombre ε est une racine de l'équation

$$x^4 + x^3 + x^2 + 1 = 0.$$

Donc, on aurait $\beta = -\varepsilon^2$ et $\eta = \varepsilon^4$. D'après le Théorème **6** nous savons que l'équation

$$N(x - y\eta) = N(x - y\varepsilon^4) = (x^2 + 3xy + y^2)^2 - xy(x + 2y)^2 = 1$$

n'admet que les six solutions suivantes en nombres entiers rationnels x et y : $x = 0$, $y = \pm 1$; $y = 0$, $x = \pm 1$; $x = \mp 2$, $y = \pm 1$. Cela donne la solution suivante de nôtre problème (43):

$$-2 - \varepsilon^4 = \varepsilon^{-3},$$

où l'exposant N est négatif $= -3$. Cependant cette relation est impropre.

Troisième cas : $Q \geqslant 1$, $P \geqslant 2$.

Dans ce cas R est nécessairement positif. Vu que $Q \geqslant P + R - 1$ on obtient de l'équation (45) l'inégalité

$$\mp 1 = PQR - P^2 - R^2 \geqslant P^2(R-1) + R^2(P-1) - PR.$$

Si $R \geqslant 2$ on aura donc

$$\mp 1 \geqslant P^2 + R^2 - PR \geqslant PR,$$

ce que est impossible. Soit ensuite $R = 1$. Alors an aura

$$P^2 - PQ = \pm 1 - 1. \tag{53}$$

Le signe supérieur donnera $P(P - Q) = 0$, et par suite $P = Q$. Ainsi l'équation (44) aura la forme

$$x^4 - Qx^3 + Qx^2 - x + 1 = 0,$$

dont les racines sont les inverses de l'équation (50), que nous venons de traiter. La seule valeur possible est évidemment $Q=3$. Dans ce cas β est racine de l'équation

$$x^4-3x^3+3x^2-x+1=0.$$

Nous avons donc $\beta=\xi^3$, où ξ est une racine de l'équation $x^4-x+1=0$. D'après le Théorème 5, l'équation

$$N(x-y\eta)=N(x-y\xi^6)=(x^2+3xy+y^2)^2-xy(3x+y)^2=1$$

n'admet que les six solutions suivantes en nombres entiers rationnels x et y : $x=0$, $y=\pm 1$; $x=\pm 1$, $y=0$; $x=\mp 1$, $y=\pm 3$. Cela donne la solution suivante de nôtre problème (43) :

$$-1-3\xi^6=\xi^{13}.$$

Si nous prenons dans (53) le signe inférieur nous aurons $P^2-PQ=-2$, et par suite $P=2$, $Q=3$. Donc β est racine de l'équation

$$x^4-2x^3+3x^2-x+1=0.$$

Il en résulte que $\beta=-\zeta^2$, où ζ est une racine de l'équation

$$x^4+x^2+x+1=0.$$

D'après le Théorème 6, l'équation

$$N(x-y\eta)=N(x-y\zeta^4)=(x^2+3xy+y^2)^2-xy(2x+y)^2=1$$

n'admet que les six solutions suivantes en nombres entiers rationnels x et y : $x=0$, $y=\pm 1$; $x=\pm 1$, $y=0$; $x=\mp 1$, $y=\pm 2$. Cela donne la solution suivante de nôtre problème (43) :

$$-1-2\zeta^4=\zeta^7.$$

Par conséquent, nous avons établi le

Théorème 10. *Les seules solutions de l'équation*

$$x-y\xi^M=\xi^N,$$

en nombres entiers rationnels x et y, pour $|xy|\geqslant 2$, lorsque ξ est une unité dans un corps biquadratique primitif du premier rang, et lorsque M et N sont des nombres naturels $M<N$, M pair, sont données par les relations propres

$$\pm(1+2\zeta^4)=\zeta^7,$$

où ζ satisfait à l'équation $x^4+x^2\mp x+1=0$, et

$$\pm(1+3\xi^6)=\xi^{13}$$

où ξ satisfait à l'équation $x^4\pm x+1=0$.

On peut y ajouter les relations impropres

$$\pm(2+\zeta^{-4})=\zeta^3 \quad et \quad \pm(3+\xi^{-6})=\xi^7$$

et encore les relations qu'on obtient en remplaçant partout ζ par ζ^{-1} et ξ par ξ^{-1}.

§ 7. Lemmes sur les exposants M et N pour $|y|>1$

13. Il est évident qu'on a, dans (39), $N \geqslant 4$. A l'aide des inégalités (5), (5') et (6) on vérifie que $N=4$ est possible seulement lorsque ξ est racine d'une des équations

$$x^4 \mp x+1=0 \text{ ou } x^4 \mp x^3+1=0.$$

Nous allons montrer que les cas $N=5$ et $N=6$ sont impossibles pour les corps primitifs. Soit ξ une racine de l'équation

$$\xi^4=p\xi^3-q\xi^2+r\xi-1. \tag{54}$$

En multipliant par ξ on obtient

$$\xi^5=(p^2-q)\xi^3+(r-pq)\xi^2+(pr-1)\xi-p. \tag{55}$$

et encore, en multipliant de nouveau par ξ,

$$\xi^6=(p^3-2pq+r)\,\xi^3+(q^2-pq^2+pr-1)\,\xi^2+(p^2r-qr-p)\,\xi+q-p^2. \tag{56}$$

D'après le numéro précédent M ne peut pas être pair. Donc, pour $N=5$ on a seulement les deux possibilités $M=1$ et $M=3$. Pour $N=6$ il n'y a que les possibilités $M=1$ et $M=5$, vu que $(M, N)=1$.

Si $N=5$ et $M=1$ on obtient de (55) $p^2=q$ et $r=pq$, donc $r=p^3$, et ξ est racine de l'équation

$$\xi^4=p\xi^3-p^2\xi^2+p^3\xi-1.$$

Pour $p=0$ et pour $|p|=1$ les corps engendrés par cette équation ne sont pas primitifs, et pour $|p|\geqslant 2$ ceux-ci sont d'un rang >1.

Si $N=5$ et $M=3$ l'équation (39) peut s'écrire

$$x\,\xi^{-1}-y\xi^2=\xi^4,$$

et vu que
$$\xi^{-1}=p\xi^2-q\xi+r-\xi^3,$$

on en obtient

$$x[p\xi^2-q\xi+r-\xi^3]-y\xi^2=p\xi^3-q\xi^2+r\xi-1.$$

Cela conduit au système d'égalités

$$x=-p, \quad xp-y=-q, \quad qx=-r, \quad xr=-1.$$

Il en résulte $pq=r$, $pr=1$, et par suite $p=1$, $r=1$, $q=1$, $x=-1$, $y=0$, ce qui est impossible.

Si $N=6$ et $M=1$ on obtient de (56)

$$p^3-2pq+r=0, \quad q^2-qp^2+pr-1=0.$$

En y éliminant r on aura

$$q^2+qp^2-p^4=1,$$

d'où l'on obtient

$$q = -\tfrac{1}{2}p^2 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5p^4+4}.$$

Or, on peut montrer que le nombre $5p^4+4$ est un carré seulement pour $p=0$ et $p=\pm 1$; pour la démonstration voir la Remarque à la fin de ce numéro. On voit aisément que les valeurs $p=0$ et $p=\pm 1$ conduisent à des corps imprimitifs.

Si $N=6$ et $M=5$ l'équation (39) peut s'écrire

$$x\xi^{-2} - y\,\xi^3 = \xi^4,$$

et vu que $$\xi^{-2} = r^2 - q + (p-qr)\xi + (pr-1)\xi^2 - r\xi^3,$$

il en résulte

$$x[r^2-q+(p-qr)\xi+(pr-1)\xi^2-r\xi^3] - y\xi^3 = p\xi^3 - q\xi^2 + r\xi - 1.$$

On en aura le système d'égalités :

$$xr + y = -p,\ xpr - x = -q,\ x(p-qr) = r,\ x(r^2-q) = -1.$$

Si $x=1$ on obtient le système

$$pr-1 = -q,\ \ p-qr = r,\ r^2-q = -1.$$

Or, de là on aura $q=-2$, valeur impossible. Si $x=-1$ on obtient le système

$$pr-1 = q,\ p-qr = -r,\ r^2-q = 1.$$

Or, de là on aura $q=2$ et $r^2=3$, ce qui est aussi impossible.

De ce qui précède il résulte le

Lemme 7. *Dans la relation* (39) *on a* $N \geqslant 7$, *lorsque* $|y| \geqslant 2$.

Remarque. Pour montrer que l'équation

$$5x^4 + 4 = y^2 \tag{57}$$

n'admet aucune solution en nombres naturels x et y hors $x=1$, $y=3$, nous considérons d'abord le cas de x impair. Dans ce cas on aura nécessairement

$$y \pm 2 = a^4, \quad y \mp 2 = 5b^4,$$

où a et b sont des nombres naturels impairs tels que $ab=x$. Il en résulte

$$a^4 - 5b^4 = \pm 4,$$

où il faut prendre le signe inférieur (congruence modulo 16). On aura donc

$$a^4 + 4 = (a^2+2a+2)\ (a^2-2a+2) = 5b^4$$

et par suite

$$(a \mp 1)^2 + 1 = c^4, \ (a \pm 1)^2 + 1 = 5d^4,$$

où c et d sont des nombres naturels impairs tels que $cd = b$. Or, d'après Fermat la première de ces équations est possible seulement pour $a \mp 1 = 0$ et $c = 1$. On en obtient $x = 1$ et $y = 3$.

Considérons ensuite le cas de x pair. Alors l'équation (57) peut s'écrire

$$20 \left(\frac{x}{2}\right)^4 + 1 = \left(\frac{y}{2}\right)^2.$$

Il en résulte le système

$$\tfrac{1}{2} y \pm 1 = 2a^4, \ \tfrac{1}{2} y \mp 1 = 10b^4,$$

d'où en éliminant y

$$a^4 - 5b^4 = \pm 1,$$

où a et b sont des nombres naturels tels que $2ab = x$. Or, d'après un résultat de Tartakowski cette équation est satisfaite seulement par $b = 0$; voir [9] et aussi Ljunggren [10].

14. Nous avons aussi besoin du lemme suivant :

Lemme 8. *Dans la relation* (39), *avec* $|y| \geqslant 2$, *on ne peut pas avoir en même temps* $N = 7$ *et* $M = 1$.

Démonstration. Pour $N = 7$ et $M = 1$ la relation (39) peut s'écrire

$$x\xi^{-1} - y = \xi^6.$$

En appliquant la formule (56) nous obtenons

$$x[p\xi^2 - q\xi + r - \xi^3] - y = (p^3 - 2pq + r)\xi^3 + (q^2 - qp^2 + pr - 1)\xi^2 + (p^2r - qr - p)\xi + q - p^2.$$

On en aura le systeme d'égalités

$$-x = p^3 - 2pq + r, \ px = q^2 - qp^2 + pr - 1,$$

$$-qx = p^2r - qr - p, \ xr - y = q - p^2.$$

En éliminant x on obtient le système

$$-qp^3 + 2pq^2 - 2qr + p^2r - p = 0, \tag{58}$$

$$p^4 - 3p^2q + 2pr + q^2 - 1 = 0. \tag{59}$$

$p = 0$ entraîne $r = 0$ et $q^2 = 1$, ce qui est impossible. En éliminant r entre les deux équations (58) et (59) on aura

$$p^6 - 3p^4q + 3p^2q^2 - p^2 + p + 2q - 2q^3 = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(p^2-2q)\,(p^4-p^2q+q^2)=p^2-p-2q.$$

Nous pouvons supposer que $p\geqslant 1$. Alors, nous aurons l'inégalité

$$p^4-p^2q+q^2<1,$$

ce qui est évidemment impossible. Le Lemme 9 se trouve ainsi démontré.

§ 8. Lemmes sur les coefficients p, q et r. Le cas de $M=1$

15. Inégalités. Soit η une unité dans un corps biquadratique, racine de l'équation irréductible

$$x^4-px^3+qx^2-rx+1=0. \tag{60}$$

Lemme 9. *Si dans* (**60**) $p=r$, *le corps engendré par* η *est imprimitif. Même chose si* $p=-r$.

Démonstration. Soit $p=r$ et posons $y=\eta+\eta^{-1}$. Alors y est racine de l'équation

$$y^2-py+q-2=0.$$

Donc, y engendre un sous-corps quadratique.

Soit ensuite $p=-r$ et posons $y=\eta-\eta^{-1}$. Alors y est racine de l'équation

$$y^2-py+q+2=0.$$

Donc, y engendre un sous-corps quadratique.

Nous pouvons y ajouter le

Lemme 10. *Soit* η *une unité, racine de l'équation, telle que le corps* $\mathbf{K}(\eta)$ *soit primitif et du prmier rang. Nous supposons que l'équation*

$$x^4-px^3y+qx^2y^2-rxy^3+y^4=1 \tag{61}$$

n'admet aucune solution en nombres entiers rationnels x *et* y, *tels que* $|x|=|y|=1$. *Alors on a les inégalités*

$$q\geqslant p+r,\quad q\geqslant -p-r,\quad q\geqslant 1. \tag{62}$$

Encore, si les coefficients satisfont à l'inégalité

$$4q>p^2+r^2,$$

l'équation (**61**) *n'admet aucune solution en nombres entiers rationnels* x *et* y, *sauf pour* $xy=0$.

Démonstration. D'après les suppositions faites sur (61) on a $N(1-\eta)\geqslant 2$ et $N(1+\eta)\geqslant 2$, donc $q\geqslant p+r$ et $q\geqslant -p-r$. Il en résulte $q\geqslant 0$. Or, on ne peut pas avoir $q=0$, vu que, d'après le Lemme 9, $p+r\neq 0$.

Pour démontrer la seconde partie du lemme observons que la forme $N(x-y\eta)$ peut s'écrire

$$(x^2 - \tfrac{1}{2}\,pxy)^2 + (y^2 - \tfrac{1}{2}\,rxy)^2 + (q - \tfrac{1}{4}\,p^2 - \tfrac{1}{4}\,r^2)\,x^2\,y^2. \tag{63}$$

Supposons maintenant que

$$4q \geqslant p^2 + r^2.$$

Le signe d'égalité est impossible vu que le corps $\mathbf{K}(\eta)$ ne contient pas le nombre $\sqrt{-1} = i$. D'après les suppositions faites sur (61) nous avons $x^2y^2 \geqslant 4$. Si l'expression (63) est $=1$ il faut donc que

$$x^2 - \tfrac{1}{2}\,pxy = y^2 - \tfrac{1}{2}\,rxy = 0,$$

ce qui est évidemment impossible.

Cela démontre le Lemme **10**.

On en conclut : *Si l'équation* (61) *admet une solution en nombres entiers rationnels x et y tels que $|xy| \geqslant 2$, il faut que*

$$4q \leqslant p^2 + r^2 - 1. \tag{64}$$

Le discriminant de l'équation (60) et de l'unité η a pour expression

$$\left.\begin{aligned} 16\,q^4 - 4\,q^3\,(p^2 + r^2) + 144\,q\,(p^2 + r^2) + 18\,pqr\,(p^2 + r^2) - 128\,q^2 - 27\,(p^4 + r^4) \\ + p^2\,r^2\,(q^2 - 6) - 80\,prq^2 - 4\,pr\,(p^2\,r^2 + 48) + 256. \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

16. Le cas de M=1. Pour $M=1$ l'équation (39) devient

$$x - y\xi = \xi^N. \tag{66}$$

Comme plus haut nous supposons que $|\xi| > 1$ et que ξ'' et ξ''' soient des conjugués de ξ tels que $|\xi''| = |\xi'''| = |\xi|^{-1} < 1$. Les cas $|x| = |y| = 1$ étant, d'après le numéro 9, complètement résolus nous pouvons supposer que $|y| \geqslant 2$. De l'équation (66) on obtient

$$-y = \frac{(\xi'')^N - (\xi''')^N}{\xi'' - \xi'''} = (\xi'')^{N-1} + (\xi'')^{N-2}\,\xi''' + \ldots + (\xi''')^{N-1}.$$

Il en résulte

$$|y| < |\xi''|^{N-1} N, \tag{67}$$

et vu que $|y| \geqslant 2$,

$$|\xi|^{N-1} < \tfrac{1}{2} N.$$

D'après les Lemmes 7 et 8 nous pouvons supposer que $N \geqslant 8$. Alors, on montre aisément que la fonction de N

$$\sqrt[N-1]{\tfrac{1}{2}\,N},$$

pour N nombre natural $\geqslant 8$, a sa plus grande valeur pour $N=8$. Donc

$$|\xi| < \sqrt[7]{4} < 1.22.$$

Donc, si ξ est racine de l'équation

$$x^4 - px^3 + qx - rx + 1 = 0,$$

où p peut être supposé $\geqslant 0$, on aura pour les coefficients les inégalités suivantes (Lemme 1) :

$$0 \leqslant p \leqslant 4, \ |r| \leqslant 4, \ -1 \leqslant q \leqslant 6. \tag{68}$$

D'après les Lemmes 9 et 10 nous aurons aussi les inégalités

$$q \geqslant 1, \ p \pm r \neq 0, \ -q \leqslant p + r \leqslant q, \ 4q + 1 \leqslant p^2 + r^2. \tag{69}$$

Lorsque ces inégalités sont satisfaites nous allons montrer que l'équation

$$x^4 - px^3y + qx^2y^2 - rxy^3 + y^4 = 1$$

n'admet aucune solution en nombres entiers rationnels pour $|xy| \geqslant 2$. Pour la démonstration il est évident qu'il suffit de supposer encore que

$$p > |r|. \tag{69'}$$

Nous distinguons 6 cas selon la valeur de q.

Premier cas: $q=6$.

En tenant compte des inégalités (68), (69) et (69') on trouvera que la seule possibilité est donnée par $p=4$ et $r=-3$. Donc, nous aurons à examiner la forme

$$F(x, y) = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 + 3xy^3 + y^4 = (x-y)^4 + 7xy^3.$$

On voit immédiatement que $F(x, y) > 1$ lorsque x et y sont positifs tous les deux. Soit ensuite y négatif et x positif. Alors on aura évidemment

$$F(x, y) = (y^2 - \tfrac{3}{2}x|y|)^2 + x^4 + \tfrac{15}{4}x^2y^2 + 4x^3|y| > 1.$$

Par suite, la forme en question ne peut pas représenter l'unité pour $xy \neq 0$.

Second cas : $q=5$.

En employant les inégalités plus haut on trouvera que la seule possibilité est donnée par $p=4$, $r=-3$. Donc, nous aurons à examiner la forme

$$F(x, y) = x^4 - 4x^3y + 5x^2y^2 + 3xy^3 + y^4.$$

Celle-ci peut s'écrire

$$F(x, y) = (x^2 - 2xy - \tfrac{3}{4}y^2)^2 + \tfrac{5}{2}x^2y^2 + \tfrac{7}{16}y^4,$$

et il est évident qu'on a toujours $F(x, y) > 1$ lorsque $xy \neq 0$.

Troisème cas : $q=4$.

En observant les inégalités plus haut on trouvera qu'il y a trois possibilités, à savoir $p=4$, $r=-3$; $p=4$, $r=-2$; $p=4$, $r=-1$.

Lorsque $p=4$ et $r=-3$ nous aurons la forme

$$F(x,y)=x^4-4x^3y+4x^2y^2+3xy^3+y^4.$$

Celle-ci peut s'écrire $\qquad (x^2-2xy-\frac{3}{4}y^2)^2+\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{7}{16}y^4,$

et il est évident qu'on a $F(x,y)>1$, lorsque $xy \neq 0$.

Soit ensuite $p=4$ et $r=-2$. Alors, la forme peut s'écrire

$$(x^2-2xy-\tfrac{1}{2}y^2)^2+x^2y^2+\tfrac{3}{4}y^4.$$

Il en résulte que la forme ne peut pas représenter l'unité pour $xy \neq 0$.

Considérons enfin le cas de $p=4$ et $r=-1$. Alors, la forme peut s'écrire

$$(x^2-2xy-\tfrac{1}{4}y^2)^2+\tfrac{1}{4}x^2y^2+\tfrac{15}{16}y^4.$$

Donc, elle ne peut pas représenter l'unité pour $xy \neq 0$.

Quatriéme cas : $q=3$.

Dans ce cas nous aurons les quatre possibilités suivantes : $p=4$, $r=-3$; $p=4$. $r=-2$; $p=4$, $r=-1$; $p=3$, $r=-2$. Cela correspond aux quatre formes que voici :

$$F(x,y)=x^4-4x^3y+3x^2y^2+3xy^3+y^4, \tag{70}$$

$$F(x,y)=x^4-4x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4, \tag{71}$$

$$F(x,y)=x^4-4x^3y+3x^2y^2+xy^3+y^4, \tag{72}$$

$$F(x,y)=x^4-3x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4. \tag{73}$$

Examinons d'abord la forme (72). Celle-ci a le rang >1. En effet, on a $F(2,1)=-1$.

Examinons ensuite la forme (71). Celle-ci peut s'écrire

$$(x^2-2xy-\tfrac{1}{2}y^2)^2+\tfrac{3}{4}y^4.$$

Il en résulte que la forme est imprimitive. En effet, les corps correspondants contiennent le nombre $\sqrt{-3}$.

Considérons maintenant la forme (70). Celle-ci peut s'écrire

$$(x^2-2xy-\tfrac{3}{4}y^2)^2+\tfrac{1}{2}x^2y^2+\tfrac{7}{16}y^4.$$

On en conclut que la forme ne peut pas représenter l'unité pour $xy \neq 0$.

Considérons enfin la forme (73). Celle-ci peut s'écrire

$$(x^2-\tfrac{3}{2}xy-\tfrac{2}{3}y^2)^2+\tfrac{25}{12}x^2y^2+\tfrac{5}{9}y^4,$$

et il en résulte que la forme ne peut représenter l'unité que pour $xy=0$.

Cinquième cas : $q=2$.

En tenant compte des inégalités on trouvera que les quatre possibilités sont données par : $p=4$, $r=-3$; $p=4$, $r=-2$; $p=3$, $r=-2$; $p=3$, $r=-1$. Les formes qui y correspondent sont

$$F(x, y)=x^4-4x^3y+2x^2y^2+3xy^3+y^4, \tag{74}$$

$$F(x, y)=x^4-4x^3y+2x^2y^2+2xy^3+y^4, \tag{75}$$

$$F(x, y)=x^4-3x^3y+2x^2y^2+2xy^3+y^4, \tag{76}$$

$$F(x, y)=x^4-3x^3y+2x^2y^2+xy^3+y^4. \tag{77}$$

La forme (74) est de rang >1. On a en effet $F(2,1)=-1$. Il en est de même pour la forme (75), vu que $F(2,1)=-3$.

Considérons ensuite la forme (76). Elle peut s'écrire

$$(x^2-\tfrac{3}{2}xy-\tfrac{2}{3}y^2)^2+\tfrac{13}{12}x^2y^2+\tfrac{5}{9}y^4,$$

d'ou l'on conclut que la forme ne peut pas représenter l'unité pour $xy\neq 0$.

Considérons enfin la forme (77). Elle peut s'écrire

$$(x^2-\tfrac{3}{2}xy-\tfrac{1}{3}y^2)^2+\tfrac{5}{12}x^2y^2+\tfrac{8}{9}y^4,$$

qui montre que la forme ne peut pas représenter l'unité pour $xy\neq 0$.

Sixième cas : $q=1$.

Dans ce cas on aura les trois possibilités suivantes : $p=4$, $r=-3$; $p=3$, $r=-2$; $p=2$, $r=-1$. Les formes qui y correspondent sont

$$F(x, y)=x^4-4x^3y+x^2y^2+3xy^3+y^4, \tag{78}$$

$$F(x, y)=x^4-3x^3y+x^2y^2+2xy^3+y^4, \tag{79}$$

$$F(x, y)=x^4-2x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4. \tag{80}$$

La forme (78) est de rang >1, vu que $F(2,1)=-5$.

La forme (79) peut s'écrire

$$(x^2-\tfrac{3}{2}xy-\tfrac{2}{3}y^2)^2+\tfrac{1}{12}x^2y^2+\tfrac{5}{9}y^4.$$

On en conclut que la forme ne peut pas représenter l'unité pour $xy\neq 0$.

La forme (80) peut s'écrire

$$(x^2-xy-\tfrac{1}{2}y^2)^2+x^2y^2+\tfrac{3}{4}y^4.$$

Cela montre que la forme ne peut pas représenter l'unité pour $xy\neq 0$.

Par conséquent, nous avons établi le résultat suivant :

Théorème 11. *Soit ξ une unité dans un corps biquadratique primitif du premier rang. Alors, l'équation*

$$x-y\xi=\xi^N$$

ne possède aucune solution en nombres entiers rationnels N, x et y, pour $|xy|\geqslant 2$.

§ 9. Lemmes sur quelques fonctions trigonométriques

17. Il nous faut d'abord le résultat suivant :

Lemme 11. *Si* $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ *on a*

$$\varphi>\sin\,\varphi>\frac{2}{\pi}\,\varphi. \tag{81}$$

Si $0<\varphi<\dfrac{\pi}{6}$ *on a*

$$\varphi>\sin\,\varphi>\frac{3}{\pi}\,\varphi. \tag{82}$$

La démonstration est évidemment triviale.

Nous allons ensuite établir la proposition que voici.

Lemme 12. *Soit donné le nombre réel* $H>1$. *Si* $0<\varphi<\frac{1}{2}\pi$ *on a*

$$\frac{|\sin\,H\varphi|}{\sin\,\varphi}<\frac{\pi}{2}\,H. \tag{83}$$

Si $0<\varphi<\dfrac{\pi}{6}$ *on a*

$$\frac{|\sin\,H\varphi|}{\sin\,\varphi}<\frac{\pi}{3}\,H. \tag{84}$$

Démonstration. Vu que $H>1$ on peut supposer que $|\sin H\,\varphi|>\sin\varphi$. Il faut distinguer deux cas.

Premier cas.

$$H\varphi=\psi+\pi k,\ 0<\psi\leqslant\frac{\pi}{2}, \tag{85}$$

k étant un nombre entier $\geqslant 0$.

Pour $k=0$ nous avons $\psi=H\varphi$. Donc, en vertu de (81) nous aurons l'inégalité

$$\frac{|\sin\,H\varphi|}{\sin\,\varphi}=\frac{\sin\,\psi}{\sin\,\varphi}<\frac{\psi}{2\varphi/\pi}=\frac{H\varphi}{2\varphi/\pi}=\frac{\pi}{2}\,H.$$

Dans le cas où $0<\varphi<\frac{1}{6}\pi$ il est évident que la limite supérieure sera, en vertu de (82), égale à $\frac{1}{3}\pi H$.

Pour $k>0$ nous obtenons de (85), en observant que $\sin\psi>\sin\varphi$ et par suite que $\psi>\varphi$:

$$\varphi>\frac{\pi k}{H}+\frac{\pi k}{H(H-1)}=\frac{\pi k}{H-1}\geqslant\frac{\pi}{H-1}.$$

Il en résulte, en tenant compte de (81),

$$\frac{|\sin H\varphi|}{\sin \varphi}=\frac{\sin \psi}{\sin \varphi}<\frac{1}{\sin (\pi/(H-1))}<\frac{\pi}{2\pi(H-1)}=\frac{1}{2}(H-1).$$

Dans le cas où $0<\varphi<\pi/6$ on aura évidemment, en vertu de (82), la limite supérieure $\frac{1}{3}(H-1)$.

Second cas.

$$H\varphi=-\psi+\pi k,\ 0<\psi<\frac{\pi}{2}, \tag{86}$$

où k est un nombre entier $\geqslant 1$.

Vu que $\psi<\frac{1}{2}\pi$ on obtiendra de (86)

$$\varphi>-\frac{\pi}{2H}+\frac{\pi k}{H}=\frac{(2k-1)\pi}{2H}\geqslant\frac{\pi}{2H}.$$

En vertu de (81) on aura donc

$$\frac{|\sin H\varphi|}{\sin \varphi}=\frac{\sin \psi}{\sin \varphi}<\frac{1}{\sin (\pi/2H)}<\frac{1}{(2/\pi)\cdot(\pi/2H)}=H.$$

Dans le cas où $0<\varphi<\frac{1}{6}\pi$, cette limite sera en vertu de (82), remplacée par $\frac{2}{3}H$.

§ 10. Le cas de M impair $\geqslant 3$. Le théorème principal

18. Limite supérieure de $|\eta|$. Soient η et ξ définies comme dans le numéro **10**, et considérons de nouveau l'équation (39)

$$x-y\eta=x-y\xi^M=\xi^N.$$

D'après les lemmes 2, 3, 4 et 5 nous pouvons supposer que $N>M$ et que N et M sont premiers entre eux. Nous supposons que $|y|\geqslant 2$. Il nous reste d'examiner le cas de M impair $\geqslant 3$. D'après (42) dans le numéro **10** nous avons

$$-y=|\eta''|^{H-1}\cdot\frac{\sin H\beta}{\sin \beta}, \tag{87}$$

où $H=N/M$, et où β est un angle situé dans le premier quadrant. Supposons maintenant que $\beta\geqslant\frac{1}{6}\pi$. Alors on obtient de la formule (87) l'inégalité

$$|y|<\left|\frac{\sin H\beta}{\sin \beta}\right|\leqslant\frac{|\sin H\beta|}{\sin \frac{1}{6}\pi}\leqslant 2,$$

ce qui est impossible vu que $|y|\geqslant 2$. Par conséquent, nous pouvons supposer que

$$0<\beta<\tfrac{1}{6}\pi.$$

Donc, en appliquant le Lemme 12 à l'équation (87) nous obtenons l'inégalité

$$|y| < \frac{\pi}{3} H \cdot |\eta''|^{H-1} < \frac{\pi}{3} H,$$

pourvu que M soit impair. Il en résulte, vu que $|y| \geqslant 2$,

$$H > \frac{6}{\pi}, \tag{88}$$

$$|\eta|^{H-1} < \frac{\pi}{6} H. \tag{89}$$

19. On vérifie aisément que la fonction de H, pour $H > 6/\pi$,

$$F(H) = \sqrt[H-1]{\frac{\pi}{6} H},$$

atteint son *maximum* pour une valeur de H entre 4 et 4,2. La valeur *maximum* de $F(H)$ est évidemment $< 1{,}3$. Donc, il résulte de (89) que

$$|\eta| < 1{,}3.$$

Si η est racine de l'équation

$$x^4 - Px^3 + Qx^2 - Rx + 1 = 0,$$

nous aurons donc pour les coefficients les inégalités

$$|P| \leqslant 4, \ |R| \leqslant 4, \ -1 \leqslant Q \leqslant 6. \tag{90}$$

Il suffit d'ailleurs pour les calculs numériques de supposer $0 \leqslant P \leqslant 4$. D'après les numéros **15** et **16** il est évident que les inégalités suivantes doivent aussi être satisfaites

$$Q \geqslant 1, \ P \pm R \neq 0, \ -Q \leqslant P + R \leqslant Q, \tag{91}$$

$$4Q + 1 \leqslant P^2 + R^2. \tag{92}$$

On peut même supposer que

$$P > |R|. \tag{93}$$

Or, nous avons montré dans le numéro **16** que l'équation

$$x^4 - Px^3y + Qx^2y^2 - Rxy^3 + y^4 = 1$$

n'admet aucune solution en nombres entiers rationnels x et y avec $|xy| \geqslant 2$, si les coefficients satisfont aux inégalités (90), (91), (92) et (93).

20. En résumant tous les résultats obtenus nous pouvons énoncer le théorème principal que voici :

Théorème 12. *Soit η une unité (irrationnelle) dans un corps biquadratique primitif du premier rang. Alors, l'équation*

$$N(x-y\eta)=1 \tag{94}$$

n'admet pas d'autres solutions en nombres entiers rationnels x et y que les quatre solutions triviales avec $xy=0$, exception faite des cas suivants où il y a exactement six solutions :

1°) $$x^4 \mp xy^3 + y^4 = N(x \mp \varepsilon y) = 1,$$

où ε est racine de l'équation $\quad x^4 - x + 1 = 0.$

Les solutions non-triviales sont $x=\pm y=1$ et $x=\pm y=-1$. On a $D(\varepsilon)=229$.

2°) $$x^4 \mp 3x^3y + 3x^2y^2 \mp xy^3 + y^4 = N(x \mp \varepsilon^3 y) = 1,$$

où ε est le même nombre que dans le cas précédent. Les solutions non-triviales sont $x=\pm y=1$ et $x=\pm y=-1$. On a $D(\varepsilon^3)=229$.

3°) $$x^4 \pm 4x^3y + 6x^2y^2 \pm 3xy^3 + y^4 = N(x \mp \varepsilon^4 y) = 1,$$

où ε est le même nombre que ci-dessus. Les solutions non-triviales sont $x=\mp y=1$ et $x=\mp y=-1$. On a $D(\varepsilon^4)=229$.

4°) $$x^4 \mp 3x^3y + 5x^2y^2 \pm 5xy^3 + y^4 = N(x \mp \varepsilon^6 y) = 1,$$

où ε signifie le même nombre que ci-dessus. Les solutions nontriviales sont $x=\pm 1$, $y=\mp 3$ et $x=\pm 1$, $y=\pm 3$. On a $D(\varepsilon^6)=229$.

5°) $$x^4 \pm 2x^3y + 7x^2y^2 \pm 5xy^3 + y^4 = N(x \mp \zeta y) = 1,$$

où ζ signifie une racine de l'équation

$$x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 5x + 1 = 0.$$

Les solutions non-triviales sont $x=\pm 1$, $y=\mp 2$ et $x=\pm 1$, $y=\pm 2$. On a $D(\zeta)=257$.

21. Si $F(x, y)$ est une forme binaire biquadratique du premier rang on peut toujours reconnaître si celle-ci est équivalente à une forme du type

$$((1,\ -p,\ q,\ -r,\ 1))$$

ou non; comparez [3], p. 512. Dans un prochain travail nous allons étudier le cas où $F(x, y)$ est équivalente à une forme de la catégorie 1 du type

$$((1,\ -p,\ q,\ -r,\ s)),$$

où $s>1$. Dans un travail antérieur nous avons traité le cas où $F(x, y)$ est d'une catégorie différente de la première; voir [3].

En comparant le présent travail avec le travail [3] on aura l'impression très nette que l'existence d'un sous-corps (irrationnel) du corps biquadratique en question facilite les recherches. Il semble que les corps primitifs, et les formes binaires y appartenant, présentent les plus grandes difficultés.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

1. NAGELL, T., Sur quelques questions dans la théorie des corps biquadratiques, Arkiv för matematik, Bd. 4, nr. 26, Stockholm 1961.
2. NAGELL, T., Sur une propriété des unités d'un corps algébrique, Arkiv för matematik, Bd. 5, nr. 25, Stockholm 1964.
3. NAGELL, T., Sur les représentations de l'unité par les formes binaires biquadratiques du premier rang, Arkiv för matematik, Bd. 5, nr. 33, Stockholm 1965.
4. NAGELL, T., Sur quelques propriétés arithmétiques des formes binaires à coefficients entiers, Arkiv för matematik, Bd. 7, nr. 17, Stockholm 1967.
5. NAGELL, T., Contributions à la théorie des modules et des anneaux algébriques, Arkiv för matematik, Bd. 6, nr. 9, Stockholm 1965.
6. HASSE, H., Zahlentheorie, Berlin 1949.
7. NAGELL, T., Sur les discriminants des nombres algébriques, Arkiv för matematik, Bd. 7, nr. 19, Stockholm 1967.
8. CHABAUTY, C., Sur certaines équations diophantiques ternaires, Comptes rendus, Acad. Sci., t. 202, Paris 1936, p. 2117–2219.
9. TARTAKOWSKI, V., Auflösung der Gleichung $x^4 - \varrho y^4 = 1$, Bull. Acad. Sci. de l'U.R.S.S., Moscow 1926.
10. LJUNGGREN, W., Über die Lösung einiger unbestimmten Gleichungen vierten Grades, Oslo Vid. Akad. Avhdl. I, 1934, Nr. 14.

Tryckt den 8 april 1968

Uppsala 1968. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB