1.69 14 1 Communicated 12 November 1969 by OTTO FROSTMAN

Sur une équation intégrale singulière

Par KARL DAGERHOLM

Considérons l'équation intégrale

$$\phi(x)\log x + \int_0^1 (y-x)^{-1}\phi(y)\,dy = 0, \tag{1}$$

où $0<x<1$ et $\log x$ est réel. L'équation (1) contient la fonction inconnue $\phi(x)$ sous le signe d'une intégrale divergente, entendue comme valeur principale de Cauchy. Quant à la solution de l'équation intégrale

$$a(x)\,u(x) - \lambda\int_{-1}^{+1}(y-x)^{-1}u(y)\,dy = f(x), \tag{2}$$

les fonctions $a(x)$ et $f(x)$ satisfaisant à des conditions différentes, on peut étudier par example T. Carleman [1], S. G. Mihlin [4], N. J. Muskhelishvili [5] et F. G. Tricomi [6]. Cependant le cas où $a(x)$ possède un point critique logarithmique ne paraît pas étudié.

Dans cet article je vais examiner l'existence d'une solution $\phi(x)$ de l'équation (1). Supposons que $\phi(x)$ soit de la forme

$$\phi(x) = \sum_{q=1}^{\infty} x_q x^{q-1},$$

où la série $\sum_{q=1}^{\infty} q^{-1}x_q$ converge. (3)

Donc $\phi(x)$ est intégrable sur $[0,1]$. On peut démontrer le théorème suivant.

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que* (1) *admette une solution* $\phi(x)\not\equiv 0$, *satisfaisant à la condition* (3), *est que le système d'équations*

$$\sum_{q=1}^{\infty}{}'(p-q)^{-1}x_q = 0 \quad (q = 1,2,\ldots), \tag{4}$$

ait une solution $x=(x_1,x_2,\ldots)\neq 0$ *qui rend les séries de* (4) *convergentes.*

On a pour $0<x<1$

$$\int_0^1 (y-x)^{-1}(\phi(y)-\phi(x))\,dy = \int_0^1 (y-x)^{-1}\phi(y)\,dy - \phi(x)\log(1-x)/x). \tag{5}$$

Donc l'équation (1) est équivalente à l'équation suivante

$$\phi(x)\log(1-x) + \int_0^1 (y-x)^{-1}(\phi(y)-\phi(x))\,dy = 0. \tag{6}$$

Introduisons maintenant l'expression intégrale

$$\phi(x)\log(1-x)+\int_0^r (y-x)^{-1}(\phi(y)\ -\phi(x))\,dy, \tag{7}$$

où la fonction $\phi(x)$ satisfait à la condition (3) et r désigne un nombre réel positif satisfaisant à l'inégalité $r<1$.

Pour $|x|<1$ on peut écrire l'expression (7)

$$-\sum_{p=1}^{\infty} x_p\, x^{p-1}\cdot\sum_{p=1}^{\infty} p^{-1}x^p+\sum_{p=1}^{\infty} x_p \int_0^r (y-x)^{-1}(y^{p-1}-x^{p-1})\,dy. \tag{8}$$

On a

$$\int_0^r (y-x)^{-1}(y^{p-1}-x^{p-1})\,dy=\sum_{n=0}^{p-2}(p-1-n)^{-1}xnr^{p-1-n}; \tag{9}$$

donc l'expression (8) peut s'écrire

$$\sum_{p=1}^{\infty} x^{p-1}\left(-\sum_{q=1}^{p-1}(p-q)^{-1}x_q+\sum_{q=1}^{\infty} q^{-1}x_{p+q}\,r^q\right). \tag{10}$$

D'après la condition (3) on trouve

$$\lim_{r\to 1}\sum_{q=1}^{\infty} q^{-1}x_{p+q}\,r^q=\sum_{q=1}^{\infty} q^{-1}x_{p+q}. \tag{11}$$

Pour $r\to 1$ l'intégrale dans (7) se transforme en l'intégrale du membre gauche dans (5). Donc une solution $\phi(x)=\sum_{q=1}^{\infty}x_q x^{q-1}$ de l'équation (6), où $\sum_{q=1}^{\infty}q^{-1}x_q$ converge doit satisfaire au système (4).

D'autre part, considérons une solution $x=(x_1,x_2,\ldots)\neq 0$ du système (4), la condition de la convergence (3) étant satisfaite. Cette suite des nombres x_q détermine une fonction $\phi(x)=\sum_{q=1}^{\infty}x_q\,x^{q-1}$. Comme les calculs précédentes sont reversibles, cette fonction $\phi(x)$ est une solution indépendante de l'équation (6).

De ce qui précède on obtient le théorème mentionné.

On peut aussi obtenir la relation entre l'équation intégrale (6) et le système d'équations (4) en posant $a=b^{-1}=1$ dans l'équation (6') dans [2]. Par quelques calculs on obtient le résultat en question.

Dans l'article [3] j'ai étudié le système (4) et j'ai obtenu le théorème suivant.

Théorème. *Le système* (4) *possède une et seulement une solution indépendante* $x=(x_1,x_2,\ldots)\neq 0$ *qui rend les séries de* (4) *convergentes.*

Dans l'étude de [3] j'ai posé

$$\psi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,s^n,\text{où}\,c_n=(-1)^n x_n\quad(n=1,2,\ldots).$$

$x=(x_1,x_2,\ldots)$ présente une solution du système (4). J'ai obtenu

$$\phi(s)=\frac{\psi(-s)}{s}=-\frac{e^{g(-s)}}{\sqrt{1-s^2}}.$$

Ici $g(s)=u+iv$ est la fonction analytique dans $|s|<1$, dont la partie réelle satisfait à la condition

$$u(e^{i\theta}) = \frac{1}{2}\log\frac{1}{|\theta|}, \quad -\pi<\theta<\pi$$

et dont la partie imaginaire s'annule sur le segment $(-1,1)$. Si l'on pose

$$g(s) = \frac{1}{2}\log\frac{1}{1-s}+k(s),$$

il s'ensuit

$$\psi(s) = \frac{1}{\sqrt{2}(1-s)}e^{k(1)}+\frac{1}{1-s}\left(\frac{s}{\sqrt{1+s}}e^{k(s)}-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{k(1)}\right),$$

oú $k(e^{i\theta}) = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-e^{i\theta}}{\theta}\right|$.

Voir [3], page 599.

Conclusion. *L'équation* (1) *possède une et seulement une solution indépendante* $\phi(x)=\sum_{q=1}^{\infty}x_q x^{q-1}$, *où la série* $\sum_{q=1}^{\infty}q^{-1}x_q$ *converge.*

Probablement on peut généraliser le résultat obtenu.

En publiant le présent article je veux exprimer à M. Otto Frostman, Professeur à l'Université de Stockholm, mes sentiments reconnaissants pour les critiques amicales et les fecondes entretiens dont j'ai profité au fil des années.

BIBLIOGRAPHIE

1. Carleman, T., Sur la résolution de certaines équations intégrales. Arkiv för matematik, astronomi och fysik *16*, no. 26 (1922).
2. Dagerholm, K., Sur un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Arkiv för matematik *6*, no. 7 (1965).
3. Dagerholm, K., Sur un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. II. Arkiv för matematik 7, no. 45 (1968).
4. Mihlin, S. G., Singular integral equations. (Translations. Series one, volume 10. Functional Analysis and Measure Theory. American Mathematical Society, Rhode Island, 1962.)
5. Muskhelishvili, N. I., Singular integral equations. (Second edition, Moscow, 1946. Translation. Groningen, 1953.)
6. Tricomi, F. G., Integral equations. New York, 1957.

Tryckt den 21 april 1970

Uppsala 1970. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB