Divers types de séparation pour plusieurs ensembles convexes

Jacques Bair

1. Introduction En réponse à un problème posé par V. L. Klee, nous analysons les rapports qui existent entre divers types de séparation pour plusieurs ensembles convexes; cette étude nous permet d'étendre la portée d'un critère de séparation exploité par J. Lindenstrauss [8].

Cet article est la suite de [2] où nous avons défini divers types de séparation pour plusieurs ensembles convexes d'un espace vectoriel réel E. Nous ne reviendrons pas sur les motivations qui nous ont amené à considérer ces notions (cf. [2]), mais nous nous contenterons de rappeler les principales définitions qui sont utiles pour le lecteur.

Nous utiliserons la terminologie et les notations qui figurent dans [4]. Nous appellerons *cellule convexe* (resp. *cellule proprement convexe*) tout ensemble convexe dont l'internat (resp. l'internat propre) n'est pas vide. Pour la bonne compréhension du texte, rappelons les définitions des divers types de séparation pour n ensembles ($n \geqq 2$) [2].

Des parties $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'un espace vectoriel E seront *séparées* s'il existe des demi-espaces fermés $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ tels que $\bigcap_{j=1}^{n} {}^i\Sigma_j = \emptyset$ et $A_j \subset \Sigma_j$ pour $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$; elles seront *séparées strictement* si elles sont séparées et si $A_j \subset {}^i\Sigma_j$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$; enfin, elles seront *fortement séparées* si elles sont séparées et si, pour tout indice j de $\{1, 2, \ldots, n\}$, il existe un demi-espace fermé Σ_j', distinct de Σ_j, tel que $A_j \subset \Sigma_j' \subset \Sigma_j$; lorsque l'espace vectoriel E sera topologique, on exigera de plus que tous les demi-espaces fermés considérés soient fermés pour la topologie vectorielle de l'espace.

Enfin, nous dirons, dans un espace vectoriel (éventuellement muni d'une topologie vectorielle) de dimension au moins égale à $n-1$, que n ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont *séparés au sens de Klee* s'il existe un sous-espace vectoriel V (qui doit être fermé lorsqu'on travaille dans un espace vectoriel topologique) de codimension $n-1$ dont aucun translaté ne rencontre tous les A_j ($j = 1, 2, \ldots, n$).

2. Lemme 1. *Dans un espace vectoriel E quelconque, soient* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *des cellules proprement convexes. Si* $\bigcap_{j=1}^{n} {}^iA_j=\emptyset$ *et* $\bigcap_{j\in\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{k\}} {}^iA_j\neq\emptyset$ *pour tout* $k=1, 2, \ldots, n$, *il existe des demi-espaces fermés* Σ_j contenant A_j $(j=1, 2, \ldots n)$ *tels que* $\bigcap_{j=1}^{n} {}^i\Sigma_j=\emptyset$, $\bigcup_{j=1}^{n} \Sigma_j=E$ *et* $\bigcap_{j=1}^{n} \Sigma_j=\complement(\bigcup_{j=1}^{n} {}^i\Sigma_j)$ *est une variété linéaire.*

Comme A_1 et $B_1=\bigcap_{j=2}^{n} A_j$ sont des ensembles convexes dont les internats ${}^iA_1$ et ${}^iB_1=\bigcap_{j=2}^{n} {}^iA_j$ sont non vides et disjoints [4; I.8.1,c, p. 29], ils peuvent être séparés par un hyperplan H_1 [6; 2.1]; il existe donc un demi-espace fermé Σ_1 contenant A_1 et tel que ${}^i\Sigma_1\cap B_1=\emptyset$. En répétant cet argument, on trouve, de proche en proche pour $k=2, 3, \ldots, n$, un demi-espace fermé Σ_k qui contient A_k et dont l'internat est disjoints de B_k, où $B_k=(\bigcap_{j=1}^{k-1} \Sigma_j)\cap(\bigcap_{j=k+1}^{n} A_j)$ pour $k=2, 3, \ldots, n-1$ et $B_n=\bigcap_{j=1}^{n-1} \Sigma_j$. On peut même, s'arranger pour que ${}^m\Sigma_n$ contienne une variété extrême V de B_n [5; 2.4, corollaire 3, p. 178]. Nous allons montrer que les demi-espaces fermés $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ ainsi déterminés répondent à la question.

Il est clair que A_j est inclus dans Σ_j pour $j=1, 2, \ldots, n$ et que $\bigcap_{j=1}^{n} {}^i\Sigma_j=\emptyset$. Vérifions que $\bigcup_{j=1}^{n} \Sigma_j=E$.

Quitte à effectuer une translation, on peut supposer que l'origine appartient à V. Désignons par S un sous-espace supplémentaire de V dans E et par Σ_j' la projection canonique de Σ_j sur S selon V. D'une part, la codimension de V est inférieure ou égale à $n-1$ [5; 2.3, p. 176]; d'autre part, la dimension de S ne peut excéder $n-1$, sinon le théorème de Helly contredirait les propriétés d'intersection relatives aux ensembles Σ_j'. Donc, la dimension de S vaut exactement $n-1$, ce qui prouve que les formes linéaires associées aux demi-espaces fermés $\Sigma_1', \Sigma_2', \ldots, \Sigma_{n-1}'$ de S sont linéairement indépendantes [5; 2.3, p. 176]. En d'autres termes, on peut trouver un système de références dans S pour lequel on a $\Sigma_j'=\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}): x_j\geqq 0\}$ pour $j=1, 2, \ldots, n-1$, ce qui entraîne $\Sigma_n'=\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}): x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}\leqq 0\}$; dès lors, $\bigcup_{j=1}^{n} \Sigma_j'=S$, d'où $\bigcup_{j=1}^{n} \Sigma_j=E$.

Pour démontrer la dernière partie de l'énoncé, on peut reprendre le raisonnement formulé dans [1; 3.8, p. 288].

3. Lemme 2. *Dans un espace vectoriel E quelconque, si* $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ *sont des demi-espaces fermés tels que* $n-1$ *d'entre eux ont toujours une intersection non vide et tels que leur réunion coïncide avec l'un d'entre eux ou avec tout l'espace, alors leur intersection n'est pas vide.*

Par hypothèse, il existe des points (forcément distincts) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que $x_i\in\Sigma_j$ pour $i\neq j$. Dans ces conditions, les ensembles $A_i=\Sigma_i\cap{}^c\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sont des convexes fermés dans le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par les points x_j; de plus, $n-1$ de ces ensembles A_i se rencontrent toujours, tandis que la réunion de tous les A_i est convexe. Un lemme de Klee [6; p. 272] montre que $\bigcap_{j=1}^{n} A_j\neq\emptyset$, d'où $\bigcap_{j=1}^{n} \Sigma_j\neq\emptyset$.

4. Theoreme 1. *Dans un espace vectoriel (resp. espace vectoriel topologique) E de dimension au moins égale à* $n-1$ $(n \geqq 2)$, *soient* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *des ensembles non vides proprement ouverts (resp. ouverts), convexes et distincts de E. Les trois propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont séparés au sens de Klee*;

(ii) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont strictement séparés*;

(iii) $\bigcap_{j=1}^n A_j = \emptyset$.

Il suffit de démontrer l'équivalence des deux conditions extrêmes puisque nous avons établi antérieurement celle des deux dernières [2; Théorème 2].

Bien entendu, (i) implique (iii); pour démontrer la réciproque, nous allons procéder par récurrence et nous contenter de traiter le cas d'un espace non nécessairement muni d'une topologie vectorielle.

Pour $n=2$, le résultat découle du théorème classique de séparation stricte de deux ensembles convexes proprement ouverts par un hyperplan.

Supposons le résultat vrai pour $n-1$ $(n \geqq 3)$ et considérons n ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ non vides proprement ouverts, distincts de E et d'intersection vide.

S'il existe un indice j de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tel que l'intersection des A_k autres que A_j soit vide, l'hypothèse de récurrence permet de conclure à l'existence d'une variété linéaire de codimension $n-2$ dont aucun translaté ne rencontre tous ces A_k; toute variété linéaire de codimension $n-1$ incluse dans la précédente fait l'affaire.

Sinon, il est possible de construire des demi-espaces fermés $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ tels que $A_j \subset \Sigma_j$ pour $j=1, 2, \ldots, n$, $\bigcup_{j=1}^n \Sigma_j = E$, $\bigcap_{j=1}^n {}^i\Sigma_j = \emptyset$ et tels que $V = \bigcap_{j=1}^n \Sigma_j = \complement(\bigcup_{j=1}^n {}^i\Sigma_j)$ soit une variété linéaire (lemme 1). D'après le lemme 2, la variété linéaire V n'est pas vide: elle est donc de codimension au plus égale à $n-1$ [5; 2.2]. Soit V^* une variété linéaire incluse dans V et dont la codimension vaut exactement $n-1$; si un translaté V' de V^* rencontre tous les A_j $(j=1, 2, \ldots, n)$, V' doit être contenu dans V, ce qui contredit l'inclusion de V dans $\complement(\bigcup_{j=1}^n A_j)$.

5. Theoreme 2. *Dans un espace vectoriel (resp. espace localement convexe) E de dimension au moins égale à* $n-1$ $(n \geqq 2)$, *des convexes* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *distincts de E, sont fortement séparés si et seulement s'il existe un convexe absorbant (resp. un voisinage de l'origine) V tels que les ensembles* A_1+V, $A_2+V, \ldots, A_n+V$ *soient séparés au sens de Klee.*

Nous allons encore une fois uniquement considérer le cas d'un espace vectoriel.

On sait que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont fortement séparés si et seulement s'il existe un convexe absorbant U tel que $\bigcap_{j=1}^n (A_j+U) = \emptyset$ [2; Théorème 3] ou encore, quitte à remplacer U par son internat, si et seulement s'il existe un convexe proprement ouvert V contenant l'origine tel que $\bigcap_{j=1}^n (A_j+V) = \emptyset$. Comme, pour chaque indice j de $\{1, 2, \ldots, n\}$, A_j+V est proprement ouvert, convexe et distinct de E, le théorème précédent permet de conclure.

6. Corollaire. *Dans un espace vectoriel (resp. espace localement convexe) E de dimension au moins égale à* $n-1$ $(n \geqq 2)$, *des ensembles convexes* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *fortement séparés sont séparés au sens de Klee.*

Il s'agit d'une banale application du théorème précédent.

Nous rejoignons somme toute le corollaire 1 de [2] en abandonnant toutefois l'hypothèse selon laquelle l'espace considéré est de Banach.

7. Remarques. *a)* Dans les énoncés des théorèmes 1 et 2, ainsi que du corollaire, la version purement algébrique rentre dans la version topologique si l'on fait appel à la topologie naturelle [4; p. 168]; il nous a paru néanmoins intéressant de donner les énoncés sous cette double forme.

b) Le corollaire permet d'obtenir de nouveaux cas de séparation au sens de Klee dans tout espace localement convexe; il suffit en effet de reprendre tous les types de séparation forte obtenus dans [2]. Nous sommes de la sorte en mesure de généraliser un résultat de séparation pour plusieurs ensembles donné par Lindenstrauss [8; Lemma 6, p. 497]; cela constitue un pas supplémentaire vers la résolution du problème posé par Klee et rappelé dans [2].

Remerciements

Nous tenons à remercier le Professeur Klee qui nous a proposé le problème, le Professeur Jongmans qui nous a judicieusement conseillé, ainsi que le rapporteur de cet article qui nous a permis de simplifier considérablement les preuves des deux lemmes.

Bibliographie

1. Bair J., Sur la séparation de familles finies d'ensembles convexes, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, **41** (1972), 281—291.
2. Bair J., A propos d'un problème de Klee sur la séparation de plusieurs ensembles, *Math. Scand.* **38** (1976), 341—349.
3. Bair J., Critères de séparations pour polyèdres convexes, (à paraître dans *J. Geometry*).
4. Bair J., Fourneau R., *Etude géométrique des espaces vectoriels — une introduction*, Lect. Notes in Math., vol. 489, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1975).
5. Bair J., Fourneau R., Caractérisation de polyèdres convexes et systèmes d'inéquations linéaires, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, **45** (1976), 175—182.
6. Klee V., On certain intersection properties of convex sets, *Canad. J. Math.*, **3** (1951), 272—275.
7. Klee V., Separation and support properties of convex sets—a survey, in: *Control theory and the calculus of variations*, (edited by Balakrishnan) Acad. Press., New York (1969).
8. Lindenstrauss J., On the extension of operators with finitedimensional range, *Illinois J. Math.*, **8** (1964), 488—499.

Received July 26, 1976

Jacques Bair
Université de Liège
15, Avenue des Tilleuls
4000 Liège
Belgium