Espaces fonctionnels de Banach-Méthode discrète d'interpolation

Christiane Gapaillard et Claude Merucci

Nous étudions dans cet article des espaces de moyennes définis par une méthode discrète d'interpolation. Après avoir démontré leur coïncidence, dans le cas général, avec les espaces $(A_0, A_1)_{\varrho; J}$ et $(A_0, A_1)_{\varrho; K}$ de C. Bennett ([3]), nous obtenons simplement les théorèmes de dualité en utilisant la méthode de [2] et aussi les arguments de [7]. Nous remercions le rapporteur dont les conseils nous ont permis en particulier de simplifier nos démonstrations.

1. Introduction

(a) *Normes invariantes par réarrangement*

Soit $\mathscr{M}^+$ (resp. $\mathscr{M}$) l'ensemble des fonctions positives (resp. complexes) et mesurables au sens de Lebesgue sur $\mathbf{R}^+$. On notera f^* le réarrangement décroissant de $|f|$ $(f \in \mathscr{M})$ ([6]).

Une norme invariante par réarrangement (norme i. r.) est une fonctionnelle ϱ de $\mathscr{M}^+$ dans $[0, +\infty]$ qui, pour $f, f_n, g \in \mathscr{M}^+$ et pour $t, \lambda > 0$, vérifie les propriétés suivantes ([3], [9]):

$$\varrho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad \text{p.p.}; \quad \varrho(\lambda f) = \lambda \varrho(f); \quad \varrho(f+g) \leqq \varrho(g) + \varrho(g) \tag{1.1}$$

$$f \leqq g \quad \text{p.p.} \quad \Rightarrow \varrho(f) \leqq \varrho(g) \tag{1.2}$$

$$\varrho(f) = \varrho(f^*) \tag{1.3}$$

$$\varrho(\chi_{[0,t[}) < +\infty; \int_0^t f(s)\, ds \leqq c(t) \varrho(f) \tag{1.4}$$

$$f_n \uparrow f \quad \text{p.p.} \quad \Rightarrow \varrho(f_n) \uparrow \varrho(f) \tag{1.5}$$

L'espace, invariant par réarrangement, L^ϱ est l'ensemble des (classes de) fonctions de $\mathscr{M}$ telles que $\varrho(f) = \varrho(|f|) < +\infty$. C'est un espace de Banach pour la norme $\|f\| = \varrho(f)$.

On peut, à partir de ϱ, construire une norme i. r. ϱ', appelée norme associée à ϱ. Elle est définie par

$$\varrho'(g) = \sup\left\{\int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)\,dt,\ \varrho(f) \leqq 1\right\} \quad (g \in \mathcal{M}). \tag{1.6}$$

La norme associée à ϱ', c'est-à-dire $\varrho''=(\varrho')'$, coïncide avec ϱ ([9]). Il est facile d'en déduire l'inégalité de Hölder

$$\int_0^{+\infty} |f(t)g(t)|\,dt \leqq \int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)\,dt \leqq \varrho(f)\varrho'(g). \tag{1.7}$$

Une norme i. r. est absolument continue si, pour $f_n \in L^\varrho$, elle vérifie

$$f_n \downarrow 0 \quad \text{p.p.} \quad \Rightarrow \varrho(f_n) \downarrow 0 \tag{1.8}$$

(b) *Couples compatibles d'espaces de Banach*

Un couple (A_0, A_1) d'espaces de Banach est dit compatible si chacun d'eux est plongé continûment dans un même espace vectoriel topologique séparé $\mathcal{A}$ (on note $A_i \subseteqq \mathcal{A}$). Dans ce cas on peut considérer $A_0 \cap A_1$ et $A_0 + A_1$ qui, normés de façon évidente, sont des espaces de Banach.

On dit qu'un espace de Banach A est intermédiaire entre A_0 et A_1 si la double injection continue $A_0 \cap A_1 \subseteqq A \subseteqq A_0 + A_1$ a lieu. Par exemple, le couple (L^1, L^∞) étant compatible, si ϱ est une norme i.r., L^ϱ est intermédiaire entre L^1 et L^∞.

Un couple compatible (A_0, A_1) est dit conjugué si $A_0 \cap A_1$ est dense dans A_0 et dans A_1. Puisque les duals A_i' sont plongés continûment dans $(A_0 \cap A_1)'$, (A_0', A_1') est un couple compatible. Si (A_0, A_1) est un couple conjugué, nous avons les isomorphismes isométriques suivants ([1]):

$$(A_0 \cap A_1)' \cong A_0' + A_1'; \quad (A_0 + A_1)' \cong A_0' \cap A_1' \tag{1.9}$$

(c) *Indices d'une norme i.r.*

Pour chaque $s > 0$, on définit l'opérateur E_s sur $L^1 + L^\infty$ par $(E_s f)(t) = f(st)$ $(0 < t < +\infty)$. Alors E_s est un opérateur continu de L^ϱ sur lui-même. Sa norme $h(s) = h_\varrho(s)$ est sous-multiplicative. Boyd ([4]) définit alors les indices α et β de ϱ par:

$$\alpha = \inf_{0<s<1} \frac{-\operatorname{Log} h(s)}{\operatorname{Log} s}; \quad \beta = \sup_{1<s<+\infty} \frac{-\operatorname{Log} h(s)}{\operatorname{Log} s}. \tag{1.10}$$

Les indices satisfont à $0 \leqq \beta \leqq \alpha \leqq 1$.

(d) *Fonctionnelles J et K de Peetre et espaces d'interpolation*

Si (A_0, A_1) est un couple compatible ces fonctionnelles sont définies pour $t>0$ par:

$$J(t,f) = J(t,f;\ A_0, A_1) = \max(\|f\|_0, t\|f\|_1) \quad \text{pour} \quad f\in A_0\cap A_1$$

$$K(t,f) = K(t,f;\ A_0, A_1) = \inf\{\|f_0\|_0+t\|f_1\|_1;\ f=f_0+f_1,\ f_i\in A_i\} \quad \text{pour} \quad f\in A_0+A_1$$

Si ϱ est une norme i.r. on définit les espaces suivants:

$(A_0, A_1)_{\varrho;J}=\left\{a;\ a\in A_0+A_1,\ a=\int_0^{+\infty} u(t)\,\frac{dt}{t}\right.$ dans A_0+A_1, u fortement mesurables à valeurs dans $A_0\cap A_1$, $\left.\int_0^{+\infty}\|u(t)\|_{A_0+A_1}\frac{dt}{t}<+\infty,\ \varrho\big(t^{-1}J(t,u(t))\big)<+\infty\right\}$

$$(A_0, A_1)_{\varrho;K}=\left\{a;\ a\in A_0+A_1,\ \varrho\big(t^{-1}K(t,a)\big)<+\infty\right\}.$$

Ce sont des espaces normés par:

$\|a\|_{\varrho;J}=\inf\left\{\varrho\big(t^{-1}J(t,u(t))\big),\ a=\int_0^{+\infty}u(t)\,\frac{dt}{t}\right.$, l'intégrale étant absolument convergente dans $\left.A_0+A_1\right\}$

$$\|a\|_{\varrho;K}=\varrho\big(t^{-1}K(t,a)\big).$$

On a alors les propriétés suivantes:

- $(A_0, A_1)_{\varrho;K}$ est un espace de Banach tel que $(A_0, A_1)_{\varrho;K}\subseteqq A_0+A_1$,
- $A_0\cap A_1\subseteqq(A_0, A_1)_{\varrho;J}$.
- Soit $\chi^{**}(t)=\min(1, t^{-1})$; alors si $\varrho(\chi^{**})<+\infty$, $(A_0, A_1)_{\varrho;K}$ est intermédiaire entre A_0 et A_1. Si $\varrho'(\chi^{**})<+\infty$, $(A_0, A_1)_{\varrho;J}$ est un espace de Banach intermédiaire entre A_0 et A_1.

(e) *Espaces $l^\varrho((A_n)_n)$*

Soit ϱ une norme i.r. et $(A_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une suite d'espaces de Banach. Pour permettre de donner une définition discrète aux espaces d'interpolation précédents, considérons:

$$l^\varrho((A_n)_n)=\{a=(a_n)_{n\in\mathbf{Z}};\ a_n\in A_n,\ \forall n\in\mathbf{Z};\ \varrho(\mathfrak{a})<+\infty\}$$

où
$$\mathfrak{a}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\|a_n\|_{A_n}I_n \quad \text{et} \quad I_n=\chi_{[e^n, e^{n+1}[}.$$

$l^\varrho((A_n)_n)$ est un espace de Banach pour la norme $\|a\|=\varrho(\mathfrak{a})$. Lorsque $A_n=A$, avec égalité des normes, $\forall n\in\mathbf{Z}$, l'espace précédent sera noté $l^\varrho(A)$. Il a été introduit par Peetre dans [8].

2. Espaces d'interpolation. Méthode discrète

Dans toute la suite, nous considérerons une norme i.r. ϱ et un couple compatible (A_0, A_1) d'espaces de Banach. Nous allons définir deux espaces analogues aux espaces de moyennes de [7]. Soient donc

$$s_J(\varrho; A_0, A_1) = \{a;\ a\in A_0+A_1,\ a = \textstyle\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n, \text{ la série étant absolument convergente dans } A_0+A_1,\ a_n\in A_0\cap A_1,\ \forall n\in \mathbf{Z},\ (e^{-n}J(e^n, a_n; A_0, A_1))_{n\in\mathbf{Z}}\in l^\varrho(\mathbf{R})\}$$

$$s_K(\varrho; A_0, A_1) = \{a;\ a\in A_0+A_1,\ (e^{-n}K(e^n, a; A_0, A_1))_{n\in\mathbf{Z}}\in l^\varrho(\mathbf{R})\}.$$

Ce sont des espaces normés par:

$$\|a\|_{s_J} = \inf\{\|(e^{-n}J(e^n, a_n; A_0, A_1))_n\|_{l^\varrho(\mathbf{R})},\ a = \textstyle\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n, \text{ la série étant absolument convergente dans } A_0+A_1\}$$

$$\|a\|_{s_K} = \|(e^{-n}K(e^n, a; A_0, A_1))_n\|_{l^\varrho(\mathbf{R})}.$$

Nous avons alors le

Lemme 2.1. *Soit ϱ une norme i.r.*

i) $\|a\|_{\varrho;K} \sim \|a\|_{s_K(\varrho;A_0,A_1)}$

ii) Si $\beta > 0$, $\|a\|_{\varrho;J} \sim \|a\|_{s_J(\varrho;A_0,A_1)}$.

La démonstration de (i) est évidente. Pour (ii), on procède de la façon suivante: soit $a=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n$ avec $a_n\in A_0\cap A_1$, $\forall n\in\mathbf{Z}$, la série étant absolument convergente dans A_0+A_1 et $(e^{-n}J(e^n, a_n; A_0, A_1))_n\in l^\varrho(\mathbf{R})$. Posons $u=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n I_n$. Il est clair que $a=\int_0^{+\infty} u(t)\frac{dt}{t}$ avec convergence absolue dans A_0+A_1. De plus, si $t\in[e^n, e^{n+1}[$:

$$t^{-1}J(t, u(t); A_0, A_1) \leqq e^{-n}J(e^n, a_n; A_0, A_1).$$

Par suite $\varrho(t^{-1}J(t, u(t); A_0, A_1))\leqq\|(e^{-n}J(e^n, a_n; A_0, A_1))_n\|_{l^\varrho(\mathbf{R})}<+\infty$. Réciproquement, soit $a=\int_0^{+\infty} u(t)\frac{dt}{t}\in(A_0, A_1)_{\varrho;J}$. Posons $a_n=\int_{e^{n+1}}^{e^{n+2}} u(t)\frac{dt}{t}$. Alors $a=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n$ absolument dans A_0+A_1. De plus, si $t\in[e^n, e^{n+1}[$, $J(e^{-n}, a_n; A_1, A_0)\leqq e^2\int_t^{+\infty} s^{-1}J(s, u(s); A_0, A_1)\frac{ds}{s}$. Comme d'après [4] et [5], si $\beta>0$, on a:

$$\varrho\left(\int_t^{+\infty} s^{-1}J(s, u(s); A_0, A_1)\frac{ds}{s}\right)\leqq C'\varrho(t^{-1}J(t, u(t); A_0, A_1))$$

où C' est une constante >0, il vient:

$$\|a\|_{s_J(\varrho;A_0,A_1)}\leqq C''\|a\|_{\varrho;J}.$$

Proposition 2.2.

i) $(A_0, A_1)_{\varrho;K} = s_K(\varrho; A_0, A_1)$ *avec équivalence des normes.*

ii) $s_J(\varrho; A_0, A_1) \subseteqq (A_0, A_1)_{\varrho;J}$ *et, si* $\beta > 0$, $s_J(\varrho; A_0, A_1) = (A_0, A_1)_{\varrho;J}$ *svec équivalence des normes.*

C'est une conséquence immédiate du lemme 2.1.

Proposition 2.3.

i) $A_0 \cap A_1 \subseteqq s_J(\varrho; A_0, A_1)$, $s_K(\varrho; A_0, A_1) \subseteqq A_0 + A_1$.

ii) *Si* $\varrho'(\chi^{**}) < +\infty$, $s_J(\varrho; A_0, A_1)$ *est un espace de Banach intermédiaire entre* A_0 *et* A_1. *Si* $\varrho(\chi^{**}) < +\infty$, $s_K(\varrho; A_0, A_1)$ *est un espace de Banach intermédiaire entre* A_0 *et* A_1.

Pour la démonstration, on utilise la proposition 2.2 et les résultats de [3].

Signalons le lemme suivant dont nous aurons besoin dans la suite.

Lemme 2.4. *Supposons* $\varrho'(\chi^{**}) < +\infty$. *Alors si* $\big(e^{-n} J(e^n, a_n; A_0, A_1)\big)_{n \in \mathbf{Z}} \in l^\varrho(\mathbf{R})$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n$ *converge absolument dans* $A_0 + A_1$ *et* $a = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \in s_J(\varrho; A_0, A_1)$. *Si, de plus,* ϱ *est absolument continue, la série précédente converge dans* $s_J(\varrho; A_0, A_1)$.

3. Théorèmes de dualité

Nous utiliserons d'une part la méthode de [2] par l'intermédiaire des formules (3.7) et (3.8) ci-dessous, et d'autre part la méthode de [7] pour l'obtention des théorèmes de dualité.

Lemme 3.1. — *Soient* $(A_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ *une suite d'espaces de Banach et* ϱ *une norme i.r. absolument continue. Alors le dual de* $l^\varrho\big((A_n)_n\big)$ *est isométriquement isomorphe à* $l^{\varrho'}\big((A'_n)_n\big)$.

Pour simplifier l'écriture, nous ferons la démonstration dans le cas où $A_n = A$, $\forall n \in \mathbf{Z}$, avec même norme, ce qui n'est en rien restrictif.

A tout $(a'_n)_{n \in \mathbf{Z}} \in l^{\varrho'}(A')$ on peut associer une forme linéaire continue L sur $l^\varrho(A)$ par

$$L\big((a_n)\big) = (e-1) \sum_{-\infty}^{+\infty} e^n \langle a'_n, a_n \rangle. \tag{3.1}$$

En effet, si

$$\mathfrak{a}' = \sum_{-\infty}^{+\infty} \|a'_n\|_{A'} I_n \quad \text{et} \quad \mathfrak{a} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \|a_n\|_A I_n$$

on a, d'après l'inégalité de Hölder,

$$\int_0^{+\infty} \mathfrak{a}(t)\mathfrak{a}'(t)\, dt \leqq \varrho(\mathfrak{a})\varrho'(\mathfrak{a}') < +\infty$$

et comme

$$\int_0^{+\infty} \mathfrak{a}(t)\mathfrak{a}'(t)\, dt = (e-1) \sum_{-\infty}^{+\infty} e^n \|a_n\|_A \|a'_n\|_{A'}$$

on en déduit

$$\|L\|_{(l^\varrho(A))'} \leqq \|(a_n')\|_{l^{\varrho'}(A')}. \tag{3.2}$$

Montrons maintenant que par (3.1) nous obtenons toutes les formes linéaires continues sur $l^\varrho(A)$.

Soient $L\in\big(l^\varrho(A)\big)'$ et $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}\in l^\varrho(A)$. Posons

$$\mathfrak{a} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \|a_n\|_A I_n \quad \text{et} \quad \mathfrak{a}_{N,M} = \sum_{-M}^{N} \|a_n\|_A I_n.$$

On a $\mathfrak{a}-\mathfrak{a}_{N,M}\downarrow 0$ partout si $N, M\to+\infty$ et puisque ϱ est absolument continue

$$\varrho(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}_{N,M})\downarrow 0 \tag{3.3}$$

Notons $(a_n^{N,M})_{n\in\mathbf{Z}}$ la suite de points de A telle que

$$a_n^{N,M} = a_n \quad \text{si} \quad -M\leqq n\leqq N$$

$$a_n^{N,M} = 0 \quad \text{ailleurs.}$$

Par suite

$$\big|L\big((a_n)-(a_n^{N,M})\big)\big| \leqq \|L\|_{(l^\varrho(A))'}\,\varrho(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}_{N,M})$$

et d'après (3.3)

$$L\big((a_n)\big) = \lim_{\substack{N\to+\infty\\ M\to+\infty}} L\big((a_n^{N,M})\big). \tag{3.4}$$

Considérons l'application δ^n de A dans $l^\varrho(A)$ définie par $\delta^n(a)=(\dots 0, \dots 0, a, 0, \dots)$ où n est le rang de a dans la suite. Il est clair que δ^n est continue sur A. Alors

$$a_n' = \frac{e^{-n}}{e-1} L\circ\delta^n\in A'$$

et comme

$$L\big((a_n^{N,M})\big) = L\big(\textstyle\sum_{-M}^{+N} \delta^n(a_n)\big)$$

il vient d'après (3.4)

$$L\big((a_n)\big) = (e-1)\sum_{-\infty}^{+\infty} e^n\langle a_n', a_n\rangle.$$

Il reste à prouver que

$$\mathfrak{a}' = \sum_{-\infty}^{+\infty} \|a_n'\|_{A'} I_n\in L^{\varrho'}$$

et que

$$\|(a_n')\|_{l^{\varrho'}(A')} = \varrho'(\mathfrak{a}') \leqq \|L\|.$$

Etant donné $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}\in l^\varrho(A)$, pour tout $n\in\mathbf{Z}$ et pour tout $\varepsilon_n>0$ il est possible de choisir $\tilde{a}_n\in A$ tel que $\|\tilde{a}_n\|_A=\|a_n\|_A$, $\langle a_n', \tilde{a}_n\rangle\geqq 0$ et $\|a_n\|_A\|a_n'\|_{A'}\leqq\varepsilon_n+\langle\tilde{a}_n, a_n'\rangle$. Ainsi

$$\int_0^{+\infty} \mathfrak{a}(t)\mathfrak{a}'(t)\,dt = (e-1)\sum_{-\infty}^{+\infty} e^n\|a_n'\|_{A'}\|a_n\|_A \leqq (e-1)\sum_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_n e^n + L\big((\tilde{a}_n)\big)$$

$$\leqq (e-1)\sum_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_n e^n + \|L\|\,\varrho(\mathfrak{a}).$$

Si maintenant on choisit

$$\varepsilon_n e^n = \frac{\varepsilon}{2^{|n|}}$$

et si on fait tendre ε vers 0, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \mathfrak{a}(t)\mathfrak{a}'(t)\,dt \leqq \|L\|\varrho(\mathfrak{a}). \tag{3.5}$$

Considérons l'application linéaire T:

$$g \mapsto \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-n}}{e-1}\Big(\int_{e^n}^{e^{n+1}} g(t)\,dt\Big) I_n$$

définie sur l'ensemble des fonctions localement intégrables sur $]0, +\infty[$.

Si $g\in L^\infty$, alors $Tg\in L^\infty$ et $\|Tg\|_{L^\infty}\leqq\|g\|_{L^\infty}$. Si $g\in L^1$, alors $Tg\in L^1$ et $\|Tg\|_{L^1}\leqq\|g\|_{L^1}$. Par suite d'après le théorème de Calderón ([6]), si $g\in L^\varrho$, alors $Tg\in L^\varrho$ et $\varrho(Tg)\leqq\varrho(g)$.

Prenons $g\in L^\varrho$ et $g\geqq 0$ et posons

$$a_n = \frac{e^{-n}}{e-1}\Big(\int_{e^n}^{e^{n+1}} g(t)\,dt\Big)\alpha_n$$

où $\alpha_n\in A$ et $\|\alpha_n\|_A=1$.

Ainsi

$$T(g) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-n}}{e-1}\Big(\int_{e^n}^{e^{n+1}} g(t)\,dt\Big) I_n = \sum_{-\infty}^{+\infty} \|a_n\|_A I_n = \mathfrak{a}$$

et

$$\varrho(Tg) = \varrho(\mathfrak{a}) \leqq \varrho(g) \tag{3.6}$$

Il est facile de voir que

$$\int_0^{+\infty} g(t)\mathfrak{a}'(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \mathfrak{a}(t)\mathfrak{a}'(t)\,dt$$

donc d'après (3.5) et (3.6)

$$\int_0^{+\infty} g(t)\mathfrak{a}'(t)\,dt \geqq \|L\|\varrho(g).$$

Si maintenant, g étant toujours dans L^ϱ est de signe quelconque, on a évidem ment

$$\int_0^{+\infty} |g(t)|\mathfrak{a}'(t)\,dt \geqq \|L\|\varrho(|g|) = \|L\|\varrho(g)$$

ce qui prouve que $\mathfrak{a}'\in L^{\varrho'}$ et que $\varrho'(\mathfrak{a}')\leqq\|L\|$.

Cette dernière inégalité jointe à (3.2) termine la démonstration.

Pour les théorèmes de dualité, nous supposerons que (A_0, A_1) est un couple conjugué; ainsi (A_1', A_0') est un couple compatible et nous pouvons définir

$s_J(\varrho'; A_1', A_0')$ et $s_K(\varrho'; A_1', A_0')$. D'après [2] nous avons aussi:

$$K(t, a'; A_0', A_1') = \sup_{a \in A_0 \cap A_1} \frac{|\langle a', a\rangle|}{J(t^{-1}, a; A_0, A_1)} \quad \text{si} \quad a' \in A_0' + A_1' \tag{3.7}$$

$$J(t, a'; A_0', A_1') = \sup_{a \in A_0 + A_1} \frac{|\langle a', a\rangle|}{K(t^{-1}, a; A_0, A_1)} \quad \text{si} \quad a' \in A_0' \cap A_1'. \tag{3.8}$$

Si $\varrho(\chi^{**}) < +\infty$, on notera, compte-tenu de la proposition 2.3, $s_K(\varrho; A_0, A)_1$ l'adhérence de $A_0 \cap A_1$ dans $s_K(\varrho; A_0, A_1)$. On définit de même, lorsque $\varrho'(\chi^{**} < +\infty$, $s_K(\varrho', A_1', A_0')^\circ$.

Théorème 3.2. — *Soient (A_0, A_1) un couple conjugué et ϱ une norme i.r. absolument continue telle que $\varrho'(\chi^{**}) < +\infty$. Alors:*

$$s_K(\varrho'; A_1', A_0')^\circ \subseteqq [s_J(\varrho; A_0, A_1)]' \subseteqq s_K(\varrho'; A_1', A_0').$$

Soit $a' \in A_1' \cap A_0' \subset s_K(\varrho'; A_1', A_0')$. Si $a \in s_J(\varrho; A_0, A_1)$, $a = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n$ dans $A_0 + A_1$ avec $(e^{-n} J(e^n, a_n; A_0, A_1))_n \in l^\varrho(\mathbf{R})$. Nous avons alors, puisque $A_1' \cap A_0' = (A_0 + A_1)'$ et grâce à (3.7):

$$\begin{aligned} |\langle a', a\rangle| &\leqq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\langle a', a_n\rangle| \leqq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K(e^{-n}, a'; A_0', A_1') J(e^n, a_n; A_0, A_1) \\ &\leqq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n} K(e^n, a'; A_1', A_0') J(e^n, a_n; A_0, A_1) \\ &\leqq \left\|(e^{-n} K(e^n, a'; A_1', A_0'))_n\right\|_{l^{\varrho'}(\mathbf{R})} \left\|(e^{-n} J(e^n, a_n; A_0, A_1))_n\right\|_{l^\varrho(\mathbf{R})} \\ &\leqq \|a'\|_{s_K(\varrho'; A_1', A_0')} \left\|(e^{-n} J(e^n, a_n; A_0, A_1))_n\right\|_{l^\varrho(\mathbf{R})}. \end{aligned}$$

Et par suite:

$$|\langle a', a\rangle| \leqq \|a'\|_{s_K(\varrho'; A_1', A_0')} \|a\|_{s_J(\varrho; A_0, A_1)}. \tag{3.9}$$

Ainsi, l'application identique de $A_1' \cap A_0'$ (muni de la norme de $s_K(\varrho'; A_1', A_0')$) dans $[s_J(\varrho; A_0, A_1)]'$ est continue et se prolonge de façon unique en une application continue de même norme de $s_K(\varrho'; A_1', A_0')^\circ$ dans $[s_J(\varrho; A_0, A_1)]'$.

Soit $a' \in [s_J(\varrho; A_0, A_1)]'$. Alors $a' \in (A_0 \cap A_1)' = A_0' + A_1'$. Par suite, $\varepsilon > 0$ étant donné, pour chaque $n \in \mathbf{Z}$, (3.7) nous montre qu'on peut trouver $b_n \in A_0 \cap A_1$, $b_n \neq 0$, tel que:

$$e^n K(e^{-n}, a'; A_0', A_1') - \varepsilon \min(1, e^n) \leqq [e^{-n} J(e^n, b_n; A_0, A_1)]^{-1} \langle a', b_n\rangle.$$

Donnons-nous une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ dans $l^\varrho(\mathbf{R})$ de nombres réels $\geqq 0$ et posons

$$a_\alpha = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [e^{-n} J(e^n, b_n; A_0, A_1)]^{-1} \alpha_n b_n. \tag{3.10}$$

D'après le lemme 2.4, la série (3.10) converge dans $s_J(\varrho; A_0, A_1)$ et $\|a_\alpha\|_{s_J(\varrho; A_0, A_1)} \leqq \|(\alpha_n)_n\|_{l^\varrho(\mathbf{R})}$.

Par suite:

$$|\langle a', a_\alpha\rangle| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [e^{-n}J(e^n, b_n; A_0, A_1)]^{-1}\alpha_n\langle a', b_n\rangle$$
$$\geqq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n[e^n K(e^{-n}, a'; A_0', A_1') - \varepsilon \min(1, e^n)]$$

et

$$|\langle a', a_\alpha\rangle| \leqq \|a'\|_{[s_J(\varrho; A_0, A_1)]'} \|a_\alpha\|_{s_J(\varrho; A_0, A_1)}$$
$$\leqq \|a'\|_{[s_J(\varrho; A_0, A_1)]'} \|(\alpha_n)_n\|_{l^\varrho(\mathbf{R})}.$$

En utilisant le fait que ε est arbitraire et que $(\min(1, e^{-n}))_n \in l^{\varrho'}(\mathbf{R})(\varrho'(\chi^{**}) < +\infty)$, on aboutit à:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n K(e^n, a'; A_1', A_0') \leqq \|a'\|_{[s_J(\varrho; A_0, A_1)]'} \|(\alpha_n)_n\|_{l^\varrho(\mathbf{R})}.$$

Cela prouve d'après le lemme 3.1 que $(e^{-n}K(e^n, a'; A_1', A_0'))_{n\in\mathbf{Z}} \in l^{\varrho'}(\mathbf{R})$ et par suite $a' \in s_K(\varrho'; A_1', A_0')$. L'injection continue est conséquence des inégalités.

Théorème 3.3. *Soient (A_0, A_1) un couple conjugué et ϱ une norme i.r. absolument continue telle que $\varrho(\chi^{**}) < +\infty$. Alors $[s_K(\varrho; A_0, A_1)^\circ]' = s_J(\varrho'; A_1', A_0')$, les normes étant équivalentes.*

Soit $a' \in s_J(\varrho'; A_1', A_0')$. Alors $a' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n'$ avec $(e^{-n}J(e^n, a_n'; A_1', A_0'))_n \in l^{\varrho'}(\mathbf{R})$, la série convergeant absolument dans $A_0' + A_1' = (A_0 \cap A_1)'$. Par suite, si $a \in A_0 \cap A_1$ et en utilisant (3.8):

$$|\langle a', a\rangle| \leqq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\langle a_n', a\rangle| \leqq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n}J(e^n, a_n'; A_1', A_0')K(e^n, a; A_0, A_1).$$

Et d'après le lemme 3.1:

$$|\langle a', a\rangle| \leqq \left\|(e^{-n}J(e^n, a_n'; A_1', A_0'))_n\right\|_{l^{\varrho'}(\mathbf{R})} \left\|(e^{-n}K(e^n, a; A_0, A_1))_n\right\|_{l^\varrho(\mathbf{R})}$$
$$\leqq \left\|(e^{-n}J(e^n, a_n'; A_1', A_0'))_n\right\|_{l^{\varrho'}(\mathbf{R})} \|a\|_{s_K(\varrho; A_0, A_1)}.$$

Soit

$$|\langle a', a\rangle| \leqq \|a'\|_{s_J(\varrho'; A_1', A_0')} \|a\|_{s_K(\varrho; A_0, A_1)}.$$

Donc a' se prolonge de façon unique en un élément $\tilde{a}'$ de $[s_K(\varrho; A_0, A_1)^\circ]'$ et:

$$\|\tilde{a}'\|_{[s_K(\varrho; A_0, A_1)^\circ]'} \leqq \|a'\|_{s_J(\varrho'; A_1', A_0')}.$$

Pour montrer l'inclusion inverse, on introduit l'espace B_n qui est $A_0 + A_1$ muni de la norme $\|a\|_{B_n} = e^{-n}K(e^n, a; A_0, A_1)$. La formule (3.8) montre que B_n' est $A_0' \cap A_1'$ muni de la norme $\|a'\|_{B_n'} = e^n J(e^{-n}, a'; A_0', A_1')$.

Soit donc $a' \in [s_K(\varrho; A_0, A_1)^\circ]'$. En remarquant que, par l'intermédiaire de l'injection canonique $a \mapsto (\ldots a, a, a, \ldots)$, on peut identifier $s_K(\varrho; A_0, A_1)$ à un sous-espace de $l^\varrho((B_n)_n)$, on prolonge a', en utilisant le théorème de Hahn-Banach, à $l^\varrho((B_n)_n)$ sans changement de norme. Par suite, d'après le lemme 3.1, $a' \in l^{\varrho'}((B_n')_n)$, c'est-à-dire qu'il existe $(b_n')_{n\in\mathbf{Z}} \in l^{\varrho'}((B_n')_n)$ telle que:

$$\langle a', a\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^n\langle b_n', a\rangle \quad \forall a \in s_K(\varrho; A_0, A_1). \tag{3.11}$$

Posons $a'_n = e^n b'_n$. Puisque $(b'_n)_{n\in Z} \in l^{\varrho'}((B'_n)_n)$, $(e^{-n}J(e^n, a'_n; A'_1, A'_0))_n \in l^{\varrho'}(\mathbf{R})$. Puisque $\varrho''(\chi^{**}) = \varrho(\chi^{**}) < +\infty$, le lemme 2.4 nous permet de conclure que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a'_n$ converge absolument dans $A'_0 + A'_1$. (3.11) donne alors:

$$\langle a', a\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle a'_n, a\rangle = \langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a'_n, a\rangle \quad \forall a \in A_0 \cap A_1.$$

Donc $a' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a'_n$ et appartient à $s_J(\varrho'; A'_1, A'_0)$ avec:

$$\|a'\|_{s_J(\varrho'; A'_1, A'_0)} \leqq \|a'\|_{[s_K(\varrho; A_0, A_1)^\circ]'}.$$

Corollaire 3.4. *Soient* (A_0, A_1) *un couple conjugué et* ϱ *une norme i.r. absolument continue. Si* $0 < \beta \leqq \alpha < 1$:

$$(A_0, A_1)'_{\varrho; J} = (A_0, A_1)'_{\varrho; K} = (A'_1, A'_0)_{\varrho'; J} = (A'_1, A'_0)_{\varrho'; K}$$

les normes étant équivalentes.

C'est une conséquence immédiate du théorème 3.2 ou du théorème 3.3, du lemme 2.1, ainsi que des résultats de [3].

Références

1. Aronszajn, N., Gagliardo, E., Interpolation spaces and interpolation methods, *Ann. Mat. Pura Appl.* **68** (1965), 51—118.
2. Bergh, J., Löfström, J., *Interpolation spaces. An introduction.* Springer-Verlag (1976).
3. Bennet, C., Banach function spaces and interpolation methods, I. The abstract theory, *J. Functional Analysis* **17** (1974), 409—440.
4. Boyd, D. W., Indices of function spaces and their relationship to interpolation, *Canad. J. Math.* **21** (1969), 1245—1254.
5. Boyd, D. W., The Hilbert transform on rearrangement-invariant spaces, *Canad. J. Math.* **19** (1967), 599—616.
6. Calderón, A. P., Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkiewicz, *Studia Math.* **26** (1966), 273—299.
7. Lions, J. L., Peetre, J., Sur une classe d'espaces d'interpolation, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **19** (1964), 5—68.
8. Peetre, J., *A theory of interpolation of normed spaces*, Lecture notes, Brasilia (1963).
9. Luxemburg, W. A. J., Zaanen, A. C., Notes on Banach function spaces, I—V, *Indag. Math.* **25** (1963).

Received November 29, 1976;
n revised form, July 11, 1977.

Christiane Gapaillard et
Claude Merucci
Université de Nantes
Institut de Mathématiques et
d'Informatique
B.P. 1044
F—44 037 Nantes Cedex
France