Sur la séparation vraie de cônes convexes

J. Bair et J. Gwinner

Summary. In this note, we generalize two theorems of Klee [9] and a result of Bair-Jongmans [7] about the true separation of two convex cones; afterwards, we introduce the notion of true separation for $n(n \geqq 2)$ convex sets and we extend our three first statements for n convex cones.

Nous nous placerons dans un espace vectoriel réel, éventuellement muni d'une topologie vectorielle (ce qui sera précisé dans chaque énoncé) et adopterons les définitions et notations utilisées dans les ouvrages cités dans la bibliographie. Signalons néanmoins que nous noterons ${}^iA$ l'*internat*, ${}^lA$ l'*enveloppe linéaire* et ${}^mA$ la *marge* de A [5]; de plus, une *cellule convexe* désignera un ensemble convexe d'internat non vide [4], tandis qu'un ensemble *vrai* sera un ensemble non vide et distinct de tout l'espace [3].

La notion de séparation vraie a été introduite dans [7]: deux sous-ensembles A, B d'un espace vectoriel sont *vraiment séparés par un hyperplan* H lorsque A et B sont séparés par H et qu'aucun de ces deux ensembles n'est contenu dans H. Le problème de la séparation vraie de deux convexes se ramène souvent à celui de la séparation vraie de deux cônes de même sommet [7]. Or, Klee [9] a tout d'abord obtenu un résultat intéressant sur la séparation vraie de deux cônes convexes A, B de sommet O dans un espace localement convexe lorsque l'intersection de A et B se réduit à $\{O\}$; cet énoncé a été généralisé dans le cas où $A \cap B$ est un sous-espace vectoriel quelconque, pour autant que l'on restreigne à $\mathbf{R}^n$ l'espace considéré [7; 4.5]: $\mathbf{R}^n$ était en effet le type d'espace le plus général dans lequel le caractère fermé de la différence $A-B$ était assuré; récemment, un critère de fermeture vient d'être donné dans [8], ce qui permet justement de lever cette restriction sur l'espace et d'obtenir ce résultat qui généralise à la fois les énoncés 4.5 de [7] et 2.5 de [9]:

Théorème 1. *Dans un espace localement convexe E, soient A et B deux cônes convexes fermés de sommet O, tels que A soit localement compact et $A \cap B$ un sous-espace vectoriel de E. Il existe une forme linéaire continue f sur E telle que* $f<0$ *sur* $A \setminus (-A)$, $f=0$ *sur* $(A \cap -A) \cup (B \cap -B)$ *et* $f \geqq 0$ *sur* $B \setminus (-B)$.

En reprenant le raisonnement formulé au paragraphe 4.6 de [7], on déduit de ce théorème 1 un critère de séparation vraie pour deux cônes d'un espace localement convexe:

Théorème 2. *Dans un espace localement convexe, soient A et B deux cônes convexes, de même sommet, fermés et localement compacts. Si, au contraire de A et de B, $A \cap B$ est une variété linéaire, alors A et B peuvent être vraiment séparés.*

Dans certains espaces vectoriels topologiques, on peut se permettre de ne plus supposer localement compacts les deux cônes considérés A et B:

Théorème 3. *Dans un espace normé et séparable E, soient A et B deux cônes convexes fermés de sommet O, tels que A soit localement compact et $A \cap B$ un sous-espace vectoriel de E. Il existe une forme linéaire continue f sur E telle que $f<0$ sur $A \setminus (-A)$, $f=0$ sur $(A \cap -A) \cup (B \cap -B)$ et $f>0$ sur $B \setminus (-B)$. En particulier, deux cônes de E, convexes, fermés, de même sommet, dont l'un est localement compact et qui, au contraire de leur intersection, ne sont pas des variétés linéaires, peuvent être vraiment séparés.*

Preuve. Contentons-nous de démontrer la première partie de cet énoncé en modifiant légèrement un raisonnement donné par Klee [9; 2.7, p. 315] et qu'il nous a semblé utile de reprendre pour la bonne compréhension du texte.

Considérons l'ensemble $D=B-A$ qui est fermé en vertu du critère général de fermeture [8; Corollary 3.3]. Dans le dual topologique E' — qui est un espace métrique complet — de E, on peut adapter une argumentation de Koethe [10; 21.3, p. 261] pour montrer que l'ensemble $C=D^{+}=-\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, où X_n est le polaire de $B_n \cup D$ et B_n est la boule centrée sur l'origine et de rayon $\frac{1}{n}$, est séparable pour la topologie faible du dual. L'énoncé 2.6 de Klee [9; p. 315] peut alors être appliqué: il existe $f \in C$ tel que $f(x) \in]\inf_{g \in C} g(x), \sup_{g \in C} g(x)[$ pour tout x de E. Évidemment $\inf_{g \in C} g(x)=0$ pour tout $x \in D$, donc $f \geqq 0$ sur D. Soit x_0 un point de $D \setminus (-D)$: $\{-x_0\}$ peut être fortement séparé de D par un hyperplan, ce qui livre une forme linéaire h appartenant à C telle que $h(x_0)>0$. Ainsi $\sup_{g \in C} g(x_0)>0$, et partant $f>0$ sur $D \setminus (-D)$. Comme $D \cap (-D)=(B-A) \cap (A-B)=(B \cap -B)-(A \cap -A)$, il n'est pas difficile de vérifier que f jouit des propriétés désirées.

Nous nous proposons à présent d'étendre ces résultats au cas d'un nombre fini quelconque $n (n \geqq 2)$ de cônes.

Avant cela, il nous faut définir la notion de séparation vraie de n ensembles. Dans un espace vectoriel réel E quelconque, nous dirons que des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geqq 2)$ sont *vraiment séparés* s'il existe des demi-espaces fermés $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ tels que $A_j \subset \Sigma_j$, mais $A_j \not\subset {}^m\Sigma_j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ et $\bigcap_{j=1}^{n} {}^i\Sigma_j=\emptyset$; si E est un espace vectoriel topologique, nous exigerons de plus que les demi-espaces fermés Σ_j soient fermés pour la topologie vectorielle de l'espace. Si $n=2$, cette définition est bien équivalente à la séparation vraie de deux ensembles par un hyperplan. Notons aussi que la séparation vraie de n ensembles entraîne leur séparation au sens de [3]; d'ailleurs, nous pouvons expliciter les rapports entre la séparation vraie de n ensembles et les divers types de séparation définis et exploités dans [3, 4]:

Théorème 4. *Dans un espace vectoriel réel E de dimension au moins égale à $n-1$, pour des cellules convexes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geqq 2)$, considérons les quatre propositions suivantes:*

(a) *$A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont vraiment séparés;*
(b) *${}^iA_1, {}^iA_2, \ldots, {}^iA_n$ sont strictement séparés;*
(c) *${}^iA_1, {}^iA_2, \ldots, {}^iA_n$ sont séparés au sens de Klee;*
(d) $\bigcap_{j=1}^n {}^iA_j = \emptyset$.

On a les implications que voici: (a)$\Rightarrow$(b)$\Rightarrow$(c)$\Rightarrow$(d). *De plus, ces quatre propositions sont équivalentes lorsque $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des cellules convexes vraies possédant la même enveloppe linéaire.*

Preuve. (a)$\Rightarrow$(b). Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont vraiment séparés, il existe des demi-espaces fermés $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ tels que $A_j \subset \Sigma_j$, $A_j \not\subset {}^m\Sigma_j$ pour $j=1, 2, \ldots, n$, et $\bigcap_{j=1}^n {}^i\Sigma_j = \emptyset$; bien que généralement l'opérateur d'internat ne soit pas isotone [5], les relations $A_j \subset \Sigma_j$ et $A_j \not\subset {}^m\Sigma_j$ entraînent ${}^iA_j \subset {}^i\Sigma_j$ [1; 6.1, p. 219]: les internats des ensembles A_j sont bien strictement séparés. (b)$\Rightarrow$(c). Si ${}^iA_1, {}^iA_2, \ldots, {}^iA_n$ sont strictement séparés, il existe des demi-espaces fermés $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ tels que ${}^iA_j \subset {}^i\Sigma_j$ pour $j=1, 2, \ldots, n$ et $\bigcap_{j=1}^n {}^i\Sigma_j = \Phi$; les ensembles ${}^i\Sigma_1, {}^i\Sigma_2, \ldots, {}^i\Sigma_n$ sont des convexes non vides, proprement ouverts, distincts de E et strictement séparés: ils sont donc séparés au sens de Klee [4; Théorème 1]; les ensembles ${}^iA_1, {}^iA_2, \ldots, {}^iA_n$ le sont a fortiori. (c)$\Rightarrow$(d). C'est évident.

Il nous reste à vérifier l'implication (d)$\Rightarrow$(a) lorsque $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des cellules convexes vraies qui possèdent la même enveloppe linéaire. Quitte à effectuer une translation, nous pouvons supposer que l'origine appartient à ${}^lA_1 = {}^lA_2 = \ldots = {}^lA_n = V$. Dans le sous-espace vectoriel V, l'hypothèse $\bigcap_{j=1}^n {}^iA_j = \emptyset$ entraîne l'existence de demi-espaces fermés $\Sigma_1^*, \Sigma_2^*, \ldots, \Sigma_n^*$ de V tels que $A_j \subset \Sigma_j^*$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ et $\bigcap_{j=1}^n {}^i\Sigma_j^* = \emptyset$ [3; Théorème 1, p. 343]; bien entendu, comme ${}^iA_j$ fait office d'internat propre de A_j dans V, ${}^iA_j \subset {}^i\Sigma_j^*$ pour $j=1, 2, \ldots, n$. Si S désigne un sous-espace vectoriel supplémentaire de V dans E, les ensembles $\Sigma_j = \Sigma_j^* + S$ sont des demi-espaces fermés dans E pour lesquels $A_j \subset \Sigma_j$, $A_j \not\subset {}^m\Sigma_j$ (pour $j=1, 2, \ldots, n$) et $\bigcap_{j=1}^n {}^i\Sigma_j = \emptyset$.

Remarque. La condition $\bigcap_{j=1}^n {}^iA_j = \emptyset$ ne suffit pas pour la séparation vraie des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ainsi qu'en témoignent de nombreux exemples.

Tout comme la séparation forte de plusieurs ensembles [3, 6], la séparation vraie de cellules convexes peut être exprimée de façon analytique en termes de formes linéaires:

Théorème 5. *Dans un espace vectoriel réel E, soient* $A_1, A_2, \dots, A_n$ $(n \geqq 2)$ *des cellules convexes vraies. Les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) $A_1, A_2, \dots, A_n$ *sont vraiment séparés;*

(b) *il existe des formes linéaires non toutes nulles* $f_1, f_2, \dots, f_n$ *sur E et des réels* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *tels que* $\sum_{j=1}^n f_j = 0$, $\sum_{j=1}^n \lambda_j \leqq 0$, $A_j \subset \{x \in E : f_j(x) \leqq \lambda_j\}$ *pour* $j = 1, 2, \dots, n$, *et* $\lambda_j > \inf f_j(A_j) \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ *pour chaque indice j de* $\{1, 2, \dots, n\}$ *tel que* $f_j \neq 0$.

Preuve. (a)$\Rightarrow$(b). Soient $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ les demi-espaces fermés déterminés par la séparation vraie des A_j. Quitte à renuméroter éventuellement les indices, on peut trouver un entier k de $\{1, 2, \dots, n\}$ tel que $\bigcap_{j=1}^k {}^i\Sigma_j = \emptyset$ et $\bigcap_{j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{l\}} {}^i\Sigma_j \neq \emptyset$ pour tout entier l de $\{1, 2, \dots, k\}$. Dans ces conditions, il existe des formes linéaires non nulles $f_1, f_2, \dots, f_k$ sur E et des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ tels que $\sum_{j=1}^k f_j = 0$, $\sum_{j=1}^k \lambda_j \leqq 0$, $\Sigma_j \subset \{x \in E : f_j(x) \leqq \lambda_j\}$ [2; 2.5, p. 286]; partant, $A_j \not\subset {}^m\Sigma_j$ et ${}^i\Sigma_j \subset \{x \in E : f_j(x) < \lambda_j\}$ entraînent $\inf f_j(A_j) < \lambda_j$ pour $j = 1, 2, \dots, k$. Il suffit alors de poser $f_{k+1} = \dots = f_n = 0$ et $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$ pour que la condition (b) soit satisfaite.

(b)$\Rightarrow$(a). Nous pouvons supposer sans restriction que $f_1, f_2, \dots, f_k$ sont des formes linéaires non identiquement nulles, au contraire de $f_{k+1}, f_{k+2}, \dots, f_n$.

Pour $j = 1, 2, \dots, k$, posons $\Sigma_j = \{x \in E : f_j(x) \leqq \lambda_j\}$. Il est clair que chaque Σ_j est un demi-espace fermé qui inclut A_j, mais dont la marge ne contient pas A_j; de plus, on a visiblement $\bigcap_{j=1}^k {}^i\Sigma_j = \emptyset$. Pour $j = k+1, k+2, \dots, n$, considérons un demi-espace fermé qui inclut A_j, mais dont la marge ne contient pas A_j. Nous avons construit de la sorte des demi-espaces fermés $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ tels que $A_j \subset \Sigma_j$, $A_j \not\subset {}^m\Sigma_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ et $\bigcap_{j=1}^n {}^i\Sigma_j = \emptyset$.

Remarques. 1) L'implication (a)$\Rightarrow$(b) est vraie même si $A_1, A_2, \dots, A_n$ ne sont pas convexes ou ont un internat vide. De même, un examen attentif de la seconde partie de la preuve précédente montre que, pour l'implication (b)$\Rightarrow$(a), supposer que A_j est une cellule convexe n'est requis que pour $j = k+1, k+2, \dots, n$; en particulier, (b)$\Rightarrow$(a) est vérifié pour toutes parties non vides $A_1, A_2, \dots, A_n$ de E lorsque les formes linéaires $f_1, f_2, \dots, f_n$ de l'hypothèse ne sont pas identiquement nulles.

2) Dans la condition (b), on peut ne pas avoir $\inf f_j(A_j) < \lambda_j$ pour chaque indice j de $\{1, 2, \dots, n\}$. Par exemple, dans l'espace $E = \mathbf{R}$, soient $A_1 = [-2, 0]$, $A_2 = [-1, 1]$ et $A_3 = [0, 1]$: il est clair que A_1, A_2, A_3 sont vraiment séparés et qu'il existe par conséquent des formes linéaires non toutes nulles f_1, f_2, f_3 sur $\mathbf{R}$ et des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\sum_{j=1}^3 f_j = 0$, $\sum_{j=1}^3 \lambda_j \leqq 0$ et $A_j \subset \{x \in \mathbf{R} : f_j(x) \leqq \lambda_j\}$

pour $j=1, 2, 3$; toutefois, on doit avoir, à un facteur positif près, $f_1 \equiv x$, $f_2 \equiv 0$, $f_3 \equiv -x$, et $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Nous sommes à présent en mesure de donner des critères de séparation vraie pour n cônes convexes; en fait, nous allons étendre nos trois premiers énoncés au cas de n ensembles:

Théorème 6. *Dans un espace localement convexe séparé E, soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geqq 2)$ des cônes convexes fermés de sommet O, tels que A_1 soit localement compact). Si $\bigcap_{j=1}^n A_j$ est un sous-espace vectoriel de E, il existe des formes linéaires continues non toutes nulles $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sur E telles que $\sum_{j=1}^n f_j = 0$, $f_1 > 0$ sur $A_1 \setminus (-A_1)$, $f_1 = 0$ sur $A_1 \cap -A_1$, $f_j \geqq 0$ sur A_j et $f_j = 0$ sur $A_j \cap -A_j$ pour $j = 2, 3, \ldots, n$.*

Preuve. Posons $A = A_1^{n-1} \cap \Delta$, où Δ est la diagonale $\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in E^{n-1}: x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1}\}$ de E^{n-1}, et $B = A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$.

Comme E est séparé, Δ est fermé dans E^{n-1}, donc A est localement compact; de plus, $A \cap B$ est un sous-espace de E^{n-1} puisque $\bigcap_{j=1}^n A_j$ est un sous-espace de E.
En vertu du théorème 1, il existe une forme linéaire f continue sur E^{n-1} telle que $f < 0$ sur $A \setminus (-A)$, $f = 0$ sur $(A \cap -A) \cup (B \cap -B)$ et $f \geqq 0$ sur $B \setminus (-B)$. On peut construire des formes linéaires continues $f_2, f_3, \ldots, f_n$ sur E telles que $f(x) = \sum_{j=2}^n f_j(x_j)$ pour tout point x de la forme $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$; posons alors $f_1 = -\sum_{j=2}^n f_j$. L'égalité $A \cap -A = A_1^{n-1} \cap (-A_1^{n-1}) \cap \Delta$ implique $f_1 > 0$ sur $A_1 \setminus (-A_1)$ et $f_1 = 0$ sur $A_1 \cap -A_1$. De plus, pour tout indice j de $\{2, 3, \ldots, n\}$, $\{O\} \times \ldots \times \{O\} \times (A_j \cap -A_j) \times \{O\} \times \ldots \times \{O\} \subset B \cap -B$ et $\{O\} \times \ldots \times \{O\} \times [A_j \setminus (-A_j)] \times \{O\} \times \ldots \times \{O\} \subset B \setminus (-B)$, ce qui exige $f_j \geqq 0$ sur A_j et $f_j = 0$ sur $A_j \cap -A_j$.

Théorème 7. *Dans un espace localement convexe séparé E, soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geqq 2)$ des cônes convexes fermés, localement compacts et de même sommet. Si, au contraire de chaque A_j, $\bigcap_{j=1}^n A_j$ est une variété linéaire, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont vraiment séparés.*

Preuve. Nous pouvons supposer sans restriction que l'origine est un sommet commun des A_j.
En vertu du théorème précédent, il est possible de construire pour chaque indice j de $\{1, 2, \ldots, n\}$ des formes linéaires non toutes nulles $f_{j1}, f_{j2}, \ldots, f_{jn}$ sur E telles que $f_{jj} > 0$ sur $A_j \setminus (-A_j)$, $f_{jj} = 0$ sur $A_j \cap -A_j$, $f_{jk} \geqq 0$ sur A_k pour $k \neq j$ et $\sum_{k=1}^n f_{jk} = 0$. Posons $f_k = \sum_{j=1}^n f_{jk}$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$: on a bien $f_k > 0$ sur $A_k \setminus (-A_k)$, $f_k = 0$ sur $A_k \cap -A_k$ et $\sum_{k=1}^n f_k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n f_{jk} = 0$, ce qui permet de conclure via le théorème 5 et sa première remarque.

Si, dans la preuve du théorème 6, on fait appel au théorème 3 à la place du théorème 1, on obtient une généralisation intéressante de l'énoncé 2.7 de Klee [9]:

Théorème 8. *Dans un espace normé séparable E, soient* $A_1, A_2, \dots, A_n$ $(n \geqq 2)$ *des cônes convexes fermés de sommet 0, tels que* A_1 *soit localement compact et* $\bigcap_{j=1}^n A_j$ *est un sous-espace vectoriel; il existe des formes linéaires continues* $f_1, f_2, \dots, f_n$ *sur E telles que* $f_j > 0$ *sur* $A_j \setminus (-A_j)$, $f_j = 0$ *sur* $A_j \cap -A_j$ *pour* $j = 1, 2, \dots, n$ *et* $\sum_{j=1}^n f_j = 0$. *En particulier,* $n (n \geqq 2)$ *cônes de E, convexes, fermés, de même sommet, dont l'un est localement compact et qui, au contraire de leur intersection ne sont pas des variétés linéaires, peuvent être vraiment séparés.*

Bibliographie

1. BAIR, J., Nouvelles propriétés des opérateurs algébriques dans un espace vectoriel, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, **40** (1971), 214—223.
2. BAIR, J., Sur la séparation de familles finies d'ensembles convexes, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, **41** (1972), 281—291.
3. BAIR, J., A propos d'un problème de Klee sur la séparation de plusieurs ensembles, *Math. Scand.*, **38** (1976), 341—349.
4. BAIR, J., Divers types de séparation pour plusieurs ensembles convexes, *en voie de publication dans Ark. Mat.*
3. BAIR, J., FOURNEAU, R., *Etude géométrique des espaces vectoriels — une introduction*, Lecture Notes in Math. **489** (1975), Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York.
6. BAIR, J., GWINNER, J., On the strong separation of families of convex sets, *à paraître.*
7. BAIR, J., JONGMANS, F., La séparation vraie dans un espace vectoriel, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* **41** (1972), 163—170.
8. GWINNER, J., Closed images of convex multivalued mappings in linear topological spaces with applications, *J. Math. Anal. Appl.* **60** (1977), 75—86.
9. KLEE, V., Separation properties of convex cones, *Proc. Amer. Math. Soc.* **6** (1955), 313—318.
10. KOETHE, G., *Topologische lineare Räume I*, Springer-Verlag, Berlin (1/2. Auflage 1960/66).

Received May 4, 1977

J. Bair
Institut de Mathématique
Avenue de Tilleuls 15
B — 4000 Liège
Belgium

J. Gwinner
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Mannheim (WH)
D — 6800 Mannheim
Bundesrepublik Deutschland