# Extension de fonctions analytiques avec estimation

Eric Amar

## Introduction

Le présent travail s'inspire de l'étude des suite d'interpolation due à L. Carleson [2] et H. Shapiro et A. L. Shields [8]. On veut étudier ce type de phénomène en plusieurs variables.

Soit $\mathbf{B}$ la boule unité de $\mathbf{C}^2$, $S=\partial\mathbf{B}$ la sphère unité munie de la mesure de Lebesgue $d\sigma$. On appelle $H^\infty(\mathbf{B})$ la classe des fonctions analytiques et bornées dans $\mathbf{B}$; on note, pour $0<p<+\infty$, $H^p(\mathbf{B})$ la classe des fonctions analytiques $f$ dans $\mathbf{B}$ telles que $\sup_{r<1}\int_S |f(r\xi)|^p\, d\sigma(\xi)<+\infty$.

B. M. O. $(\mathbf{B})$ se trouve défini par exemple dans [7].

Soit alors $V=\{\mathbf{D}_n, n\in\mathbf{N}\}$ une suite de disques complexes dans $\mathbf{B}$; on se pose le problème suivant: à quelles conditions sur $V$ et sur $f$ analytique sur $V$ a-t-on qu'il existe un prolongement $\tilde{f}$ de $f$ dans $H^p(\mathbf{B})$?

Pour répondre à cette question, soit $D$ un disque complexe dans $\mathbf{B}$, $x$ son centre et soit, pour $\xi\in\mathbf{B}$,

$$\psi_n(\xi)\begin{cases} b_x(\xi) = \dfrac{\bar{x}\cdot\xi-|x|^2}{|x|(1-\bar{x}\cdot\xi)} & \text{où} \quad x=(z,w) \quad \text{et} \quad \xi=(\xi,\eta) \\[2ex] c_x(\xi) = \dfrac{(1-|x|^2)^{1/2}(z\eta-w\xi)}{|x|(1-\bar{x}\cdot\xi)} \end{cases}$$

la transformation conforme de $\mathbf{B}$ dans $\mathbf{B}$ qui envoie $x$ en 0.

On a bien sûr: $D=\{\xi\in\mathbf{B},\ b_x(\xi)=0\}$.

On dira que $V$ est uniformément séparée (U. S.) si:
$\exists\delta>0$, $\exists\varepsilon>0$ t. q. $\prod_{n\neq k}|b_{x_n}(\xi)|\geqq\delta$ dès que $\xi$ vérifie $|b_{x_k}(\xi)|<\varepsilon$.

On dira que $f=\{f_n, n\in\mathbf{N}\}$, une fonction analytique sur $V$ vérifie l'hypothèse $H^p$ si

$$(\mathrm{H}^p)\quad \sum_n (1-|x_n|^2)^2\int_{D_n}|f_n|^p\, d\lambda_n<+\infty$$

où $d\lambda_n$ est la mesure de Lebesgue normalisée sur $D_n$.

De même:

(H$^\infty$) $\sup_n \|f_n\|_\infty < +\infty$.

On a alors le résultat suivant:

**Théorème.** *Soit* $V=\{D_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ *une suite de disques complexes U. S. et* $f=\{f_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ *une fonction analytique sur* $V$*; pour qu'il existe une extension* $\tilde{f}$ *analytique dans* $\mathbf{B}$ *de* $f$ *telle que* $\tilde{f}$ *soit dans* $H^p(B)$ *il faut et il suffit que* $f$ *vérifie l'hypothèse* $(H^p)$. *Si* $f$ *vérifie* $(H^\infty)$ *alors il existe* $\tilde{f}$ *dans* B. M. O. *analytique qui prolonge* $f$ *dans* $\mathbf{B}$.

La méthode utilisée est directement inspirée de la preuve de L. Hörmander [5] du théorème de la couronne de L. Carleson [3], le point délicat étant de montrer qu'une certaine (0, 1) forme est de Carleson dans $B$.

Ce travail a fait l'objet d'une conférence aux « Journées d'Analyse Harmonique et de plusieurs variables complexes » de la Garde—Freinet en juin 1977.

## 1. Estimations de solutions de l'equation $\bar{\partial}_b$

Soit $\omega=\omega_1\,d\bar{\xi}+\omega_2\,d\bar{\eta}$ une (0, 1) forme à coefficients mesures dans $\mathbf{B}$ et telle que $\bar{\partial}\omega=0$; on dira que $u$ vérifie l'équation $\bar{\partial}_b u=\omega$ [6] au sens de la formule de Stokes si:

$$\forall\varphi\in\mathscr{C}^\infty_{(2,1)}(\overline{\mathbf{B}}),\quad \bar{\partial}\varphi=0\quad\text{alors}\quad \int_S u\varphi=\int_B\omega\wedge\varphi \tag{1.1}$$

où $S=\partial\mathbf{B}$, et $\mathscr{C}^\infty_{(2,1)}(\overline{\mathbf{B}})$ désigne les (2, 1) formes à coefficients $\mathscr{C}^\infty$ dans $\overline{\mathbf{B}}$.

Soit $\mu$ une mesure de $\mathbf{B}$, on dit que $\mu$ est de Carleson dans $\mathbf{B}$ si [7]:

$$\exists C>0,\quad \forall x\in S,\quad \forall\varrho>0,\quad |\mu|\{ry\mid y\in S,\ |1-\bar{x}\cdot y|<\varrho,\ 1-r^2<\varrho\}<C\varrho^2. \tag{1.2}$$

On notera $\Lambda^1$ l'ensemble des mesures bornées dans $\mathbf{B}$, $\Lambda^\infty$ l'ensemble des mesures de Carleson dans $\mathbf{B}$ et $\Lambda^p$ l'interpolé réel entre $\Lambda^1$ et $\Lambda^\infty$ i. e. [1]

$$\Lambda^p=(\Lambda^1,\Lambda^\infty)_{\theta,p}\quad \theta=1-\frac{1}{p}.$$

Soit $\mu$ une mesure de Carleson dans $\mathbf{B}$ et $\varphi\in L^p(|\mu|)$ alors on a:

**Lemme 1.1.** *La mesure* $\varphi\cdot\mu$ *est dans* $\Lambda^p$.

Puisque $\varphi\in L^p(|\mu|)$ alors $\varphi$ est dans l'interpolé entre $L^1(|\mu|)$ et $L^\infty(|\mu|)$ [1] d'où le lemme.

Si $\boldsymbol{\omega}$ est une (0, 1) forme dans $\mathbf{B}$, on a:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1\, d\bar{\xi} + \boldsymbol{\omega}_2\, d\bar{\eta}$$

et on pose

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \frac{\eta\boldsymbol{\omega}_1 - \xi\boldsymbol{\omega}_2}{(1-|\zeta|^2)^{1/2}}$$

où $\zeta = (\xi, \eta) \in \mathbf{B}$.

On dira que $\boldsymbol{\omega} \in \Lambda^p_{(0,1)}$ si $\boldsymbol{\omega}_i \in \Lambda^p$, $i=1, 2, 3$. On a alors:

**Théorème 1.1.** *Soit $p \in [1, \infty[$ et soit $\boldsymbol{\omega}$ une (0, 1) forme $\bar{\partial}$ fermée telle que $\boldsymbol{\omega}$ soit dans $\Lambda^p_{(1,0)}$ alors il existe une fonction u dans $L^p(S)$ telle que $\bar{\partial}_b u = \boldsymbol{\omega}$; si $p = +\infty$ alors $u \in BMO$.*

S est muni de la mesure de Lebesgue et rappelons que $BMO(S)$ est l'espace des fonctions de $L^1(S)$ telles que

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q| < +\infty$$

où $Q$ est une pseudo-boule de $S$ i. e. si $x \in S$, $\varrho > 0$;
$Q(x, \varrho) = \{y \in S \mid 1 - \bar{x} \cdot y| < \varrho\}$ et où $f_Q$ désigne la moyenne de $f$ sur $Q$:

$$f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f, \quad \text{avec} \quad |Q| = \text{mesure de } Q.$$

*Preuve.* H. Skoda [6] a construit un opérateur linéaire qui donne $u$ en fonction de $\boldsymbol{\omega}_i$, $i=1, 2, 3$:

$$u = \sum_{i=1}^{3} K_i \boldsymbol{\omega}_i.$$

Il a montré que si $\boldsymbol{\omega}_i$ est dans $\Lambda^1$ alors $K_i\boldsymbol{\omega}_i \in L^1$, donc $u$ aussi.

N. Varopoulos [7] a montré que si $\boldsymbol{\omega}_i \in \Lambda^\infty$ alors $K_i\boldsymbol{\omega}_i$ est dans $BMO(S)$ donc $u$ aussi.

On sait [par ex. 9] que l'interpolé réel entre $L^1$ et $BMO$ est $L^p$ donc si $\boldsymbol{\omega}_i \in \Lambda^p$, les $K_i$ étant linéaires, le théorème d'interpolation des opérateurs nous dit que $K_i\boldsymbol{\omega}_i \in L^p$, donc $u$ aussi, ce qui achève la preuve du théorème. Une étude plus complète des solutions du $\bar{\partial}_b$ données par les noyaux de H. Skoda se trouve dans [10].

## 2. Extension de fonctions analytiques

Soit $x = (z, w) \in \mathbf{B}$ et posons

$$\forall \xi = (\xi, \eta) \in \mathbf{B}, \quad \psi_x(\xi) = \begin{cases} b_x(\xi) = \dfrac{\bar{x} \cdot \xi - |x|^2}{|x|(1 - \bar{x} \cdot \xi)} \\[2ex] c_x(\xi) = \dfrac{(z\eta - w\xi)(1-|x|^2)^{1/2}}{|x|(1 - \bar{x} \cdot \xi)} \end{cases}. \tag{2.1}$$

Ce sont les composantes d'une transformation conforme (T. C.) de $\mathbf{B}$ dans $\mathbf{B}$ telle que $\psi_x(x)=0$.

A $x$ dans $\mathbf{B}$ on associe le disque complexe

$$D_x = \{\xi \in \mathbf{B},\ b_x(\xi) = 0\}; \tag{2.2}$$

réciproquement si $D$ est l'intersection d'une droite complexe et de $\mathbf{B}$ on lui associe le centre $x$ de $D$ et la fonction $b_x$.

Soit $V=\{D_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ une suite de tels disques et $\sigma=\{x_n,\ n\in N\}$ la suite de leur centre, on dit que $V$ est uniformément séparée si il existe $\delta$ et $\varepsilon$ positifs tels que:

$$\forall k\in\mathbf{N},\quad \forall \xi \text{ t. q. } |b_k(\xi)| \leqq \varepsilon \quad \text{alors} \quad \Pi_{n\neq k} |b_n(\xi)| > \delta \tag{2.3}$$

où $b_k=b_{x_k}$.

Soit $f=\{f_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ une fonction analytique sur $V$, i. e. $f_n$ analytique sur $D_n$; on dira que $f\in L^p(V)$ si

$$\sum_n (1-|x_n|^2)^2 \int_{D_n} |f_n|^p \, d\lambda_n < +\infty \tag{2.4}$$

où $\lambda_n$ est la mesure de Lebesgue *normalisée* sur $D_n$.

Enfin on dira que $V$ est d'interpolation $H^p$ si pour toute fonction $f$ dans $L^p(V)$, $f$ analytique sur $V$, il existe une fonction $\tilde{f}$ dans $H^p(\mathbf{B})$ telle que: $\tilde{f}|_V=f$.

On a alors:

**Théorème 2.1.** *Soit* $1\leqq p<+\infty$, *si* $V=\{D_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ *est uniformément séparée alors elle est d'interpolation* $H^p$; *si* $p=+\infty$ *et si* $f\in L^\infty(V)$ *alors il existe* $\tilde{f}$ *dans* $BMO$ *t. q.* $\tilde{f}|_V=f$.

*Preuve.* On aura besoin des lemmes suivants pour résoudre d'abord dans $\mathscr{C}^\infty(B)$.

Soit $V=\{D_n, n\in\mathbf{N}\}$ et soit $\sigma=\{x_n,\ n\in N\}$ la suite des centres des disques $D_n$, par hypothèse $V$ est uniformément séparée avec les constantes $\varepsilon$ et $\delta$; posons $\varepsilon'<\delta$ et

$$E_n = \{\xi\in\mathbf{B},\ |b_n(\xi)| < \varepsilon'\}.$$

On a alors:

**Lemme 2.1.** *Les ensembles* $E_n$ *sont disjoints.*

En effet si $\xi$ est t. q. $|b_k(\xi)|<\varepsilon'$ alors $|b_n(\xi)|\geqq\delta>\varepsilon'$ pour $n\neq k$.

**Lemme 2.2.** *Pour* $1\leqq p<+\infty$. *Soit* $f=\{f_n,\ n\in N\}$ *une fonction analytique dans* $L^p(V)$, *alors, pour tout* $n$ *de* $\mathbf{N}$, $f_n$ *admet une extension analytique* $\tilde{f}_n$ *à* $\mathbf{B}$ *tout entier t. q.*

$$\int_{E_n} |\tilde{f}_n|^p \, dv \leqq \varepsilon'^2 (1-|x_n|^2)^3 \int_{D_n} |f_n|^p \, d\lambda_n \tag{2.5}$$

*oû* $dv$ *est la mesure de Lebesgue sur* $\mathbf{R}^4$.

*Preuve.* Soit $n\in\mathbf{N}$ et $\psi_{x_n}$ la T. C. définie par (2.1); pour $\zeta=(0,\eta)$ alors $\psi_{x_n}^{-1}(\zeta)\in D_n$ et on peut poser:

$\forall\eta\in\mathbf{D}$, $g_n(\eta)=f_n\circ\psi_{x_n}^{-1}(0,\eta)$ prolongeons alors $g_n$ de manière «naturelle» i. e.: $\tilde{g}_n(\xi,\eta)=g_n(\eta)$, $\forall(\xi,\eta)\in\mathbf{B}$ et posons enfin

$$\tilde{f}_n(\zeta)=\tilde{g}_n\circ\psi_{x_n}(\zeta)\quad\forall\zeta\in B.$$

Clairement $\tilde{f}_n$ réalise une extension analytique de $f_n$ à $\mathbf{B}$ tout entier; de plus on a:

$$\int_{E_n}|\tilde{f}_n|^p\,dv=\int_{|\zeta|<\varepsilon'}|g_n(\eta)|^p\,\mathfrak{J}_n^{-1}\,dv(\zeta)\tag{2.6}$$

où $\mathfrak{J}_n$ désigne la Jacobien de la transformation $\psi_{x_n}$. Calculons le

$$K_n(\xi)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial b_n}{\partial\xi} & \dfrac{\partial b_n}{\partial\eta}\\ \dfrac{\partial c_n}{\partial\xi} & \dfrac{\partial c_n}{\partial\eta}\end{pmatrix}=\frac{(1-|x_n|^2)^{1/2}}{|x_n|(1-\bar{x}_n\cdot\zeta)^2}\begin{pmatrix}\bar{z}_n(1-|x_n|^2)^{1/2} & \bar{w}_n(1-|x_n|^2)^{1/2}\\ \eta|x_n|^2-w_n & z_n-\xi|x_n|^2\end{pmatrix}$$

d'où

$$\mathfrak{J}_n(\zeta)=\det|K_n(\zeta)|^2=\frac{(1-|x_n|^2)^3}{|1-\bar{x}_n\cdot\zeta|^6}\tag{2.7}$$

mais si $\zeta\in E_n$ il vient

$$(1-2\varepsilon')(1-|x_n|^2)\leqq|1-\bar{x}_n\cdot\zeta|\leqq(1-|x_n|^2)\tag{2.8}$$

portant dans (4.6) il vient

$$\int_{E_n}|\tilde{f}_n|^p\,dv\leqq(1-|x_n|^2)^3\varepsilon'^2\int_{\mathbf{D}}|g_n(\eta)|^p\,d\lambda(\eta)\tag{2.9}$$

mais on a encore, par définition de $g_n$:

$$\int_{\mathbf{D}}|g_n(\eta)|^p\,d\lambda=\int_{D_n}|f_n|^p\,d\lambda_n\tag{2.10}$$

en effet il vient: $f_n(\zeta)=g_n(c_n(\zeta))$ $\forall\zeta\in D_n$ toutes les mesures étant invariantes par rotation, on peut sopposer que $x_n=(r,0)$ auquel cas il vient:

$$D_n=\{\zeta\in\mathbf{B}\ \ \xi=r,\ |\eta|^2\leqq 1-r^2\}$$

$$c_n(\zeta)=\frac{\eta}{(1-r^2)^{1/2}}\quad\text{si}\quad\zeta\in D_n$$

d'où

$$\int_{D_n}|f_n|^p\,d\lambda_n=\int_{D_n}\left|g_n\left(\frac{\eta}{(1-r^2)^{1/2}}\right)\right|^p d\lambda_n$$

faisons le changement de variable $\eta'=\dfrac{\eta}{(1-r^2)^{1/2}}$ pour obtenir (4.10). Soit alors

$\Phi\in\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}_+)$ t. q.

$$\Phi(x)=\begin{cases}1 & \text{si}\quad 0\leqq x\leqq\dfrac{\varepsilon'^2}{4}\\ 0 & \text{si}\quad x\geqq\varepsilon'^2\end{cases}\qquad\text{et}\quad 0\leqq\Phi\leqq 1. \tag{2.11}$$

Posons alors:

$$F(\zeta)=\sum\nolimits_n \tilde f_n(\zeta)\Phi(|b_n(\zeta)|^2),\quad \xi\in\mathbf{B}. \tag{2.12}$$

Clairement $F\in\mathscr{C}^\infty(\mathbf{B})$ et $F|_V=f$; de plus

**Lemme 2.3.** *Si $f=\{f_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ est dans $L^p(V)$ alors $F$ admet des valeurs au bord de $\mathbf{B}$ dans $L^p(S)$.*

*Preuve.* On a, les $E_n$ étant disjoints:

$$\|F\|_p^p=\int_S|F|^p\,d\sigma=\sum\nolimits_n\int_S|\tilde f_n|^p\Phi^p(|b_n|^2)\,d\sigma$$

d'où

$$\|F\|_p^p\leqq\sum\nolimits_n\int_{(|b_n|<\varepsilon')\cap S}|\tilde f_n|^p\,d\sigma=\sum\nolimits_n\int_{(|\xi|<\varepsilon')\cap S}|g_n(\eta)|^p\mathfrak{J}_n'^{-1}\,d\sigma$$

où $\mathfrak{J}_n'$ est le Jacobien de la T. C. $\psi_{x_n}$ pour le bord $S$ de $\mathbf{B}$; un calcul analogue à (4.7) et (4.8) donne

$$\int_{|b_n|<\varepsilon'}|\tilde f_n|^p\,d\sigma\leqq C(1-|x_n|^2)^2\int_{|\xi|<\varepsilon'}|g_n(\eta)|^p\,d\sigma(\xi)$$

d'où en décomposant la mesure de Lebesgue $\sigma$ sur $S$ il vient:

$$\int_{|b_n|<\varepsilon'}|\tilde f_n|^p\,d\sigma\leqq C(1-|x_n|^2)^2\int_{\mathbf{D}}|g_n(\eta)|^p\,d\lambda(\eta).$$

Utilisant (4.10) on a finalement

$$\int_{|b_n|<\varepsilon'}|\tilde f_n|^p\,d\sigma\leqq C(1-|x_n|^2)^2\int_{D_n}|f_n|^p\,d\lambda_n$$

d'où le lemme.

La fonction $F$ résoud donc le problème dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{B})$, on va la corriger pour qu'elle appartienne à $H^p(\mathbf{B})$.

Posons $\omega=\frac{1}{B}\bar\partial F$ avec $B(\zeta)=\prod_{k\in\mathbf{N}}b_k(\zeta)$ ce produit infini converge dans $H^\infty(\mathbf{B})$ à cause de l'hypothèse d'uniforme séparation.

Posons: $\omega_1=\dfrac{1}{B}\dfrac{\partial F}{\partial\bar\xi},\quad \omega_2=\dfrac{1}{B}\dfrac{\partial F}{\partial\bar\eta},\quad \omega_3=\dfrac{\eta\omega_1-\xi\omega_2}{(1-|\xi|^2)^{1/2}}$

et aussi:

$$\tilde\omega=\frac{1}{B}\bar\partial\left(\sum\nolimits_n\Phi(|b_n|^2)\right)$$

avec les $\tilde\omega_i$ correspondant; on a alors:

**Lemme 2.4.** *Les mesures $\omega_i\,dv$ sont dans $L^p(|\tilde{\omega}_i|\,dv|$, $i=1,2,3$.*

Posons $$\varphi(\zeta) = \sum_n \tilde{f}_n(\zeta)\mathbf{I}_{E_n}(\zeta), \quad \zeta\in\mathbf{B};$$

on a $\omega_i=\varphi\tilde{\omega}_i$.

Calculons, en remarquant que $|B|\geqq\frac{\delta\varepsilon'}{2}$ sur supp $\bar\partial\Phi(|b_n|^2)$, $\forall n$

$$\int_{\mathbf{B}} |\varphi|^p\,d|\omega_1| \leqq \frac{2}{\delta\varepsilon'}\sum_n \int_{E_n} |f_n|^p \frac{\partial\Phi(|b_n|^2)}{\partial\bar\xi}\,dv$$

mais $\frac{\partial\Phi}{\partial\bar\xi}(|b_n|^2) = \Phi'(|b_n|^2)\cdot b_n\left(\frac{\overline{\partial b_n}}{\partial\xi}\right)$

mais sur $E_n$, le calcul du Jacobien (2.7), (2.8) montre que

$$\left|\frac{\partial b_n}{\partial\xi}\right| \leqq \frac{c}{1-|x|_n^2}$$

d'où

$$\int_{\mathbf{B}} |\varphi|^p\,d|\tilde{\omega}_1| \leqq c\frac{1}{\delta\varepsilon'}\sum_n \frac{1}{(1-|x_n|^2)}\int_{E_n} |\tilde{f}_n|^p\,dv$$

et grâce au lemme 2.2, il vient

$$\int_{\mathbf{B}} |\varphi|^p\,d|\tilde{\omega}_1| \leqq C\sum_n (1-|x_n|^2)^2\int_{\mathbf{D}_n} |f_n|^p\,d\lambda_n < +\infty.$$

Il en va de même pour $\omega_2$; voyons $\omega_3$:

on a: $$\frac{1}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\left(\eta\frac{\partial\Phi}{\partial\bar\xi}\right)(|b_n|^2) - \xi\frac{\partial\Phi}{\partial\bar\eta}(|b_n(\zeta)|^2) = \frac{\Phi'(|b_n|^2)}{|x_n|(1-\bar{x}_n\cdot\zeta)^2}$$

d'où

$$C\sum_n \int_{E_n} |\tilde{f}_n|^p \frac{|\Phi'|b_n|^2)|}{1-|x_n|^2}\,\frac{|\eta z_n-\xi w_n|\,dv}{\sqrt{1-|\zeta|^2}} \geqq \int_{\mathbf{B}} |\varphi|^p\,d|\omega_3|.$$

Calculons terme à terme le membre de gauche et supposons que $x_n=(r,0)$, il vient alors par changement de variable

$$(2.11)\quad \frac{1}{(1-r^2)^3}\int_{E_n} |\tilde{f}_n|^p \frac{|\eta|}{\sqrt{1-|\zeta|^2}}\,dv(\xi) \leqq C\int_{|\zeta|<\varepsilon'} |g_n(\eta')|^p \frac{|\eta'|}{\sqrt{1-|\zeta'|^2}}\,dv(\zeta')$$

en effet, on a:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \frac{\xi - r}{1 - r\xi} \\ \eta' &= \frac{\sqrt{1-r^2}\,\eta}{1 - r\xi} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{\xi' + r}{1 + r\xi'} \\ \eta &= \frac{1 - r^2\eta'}{1 + r\xi'} \end{aligned}\right.$$

d'où
$$1 - |\zeta|^2 = (1 - r^2)\frac{(1 - |\xi'|^2)}{|1 + r\xi'|^2}$$

donc
$$\frac{\eta}{\sqrt{1 - |\zeta|^2}} = \frac{\eta'}{\sqrt{1 - |\zeta'|^2}} \cdot \frac{|1 + r\xi'|}{1 + r\xi'}$$

de plus le jacobien est majoré par $C(1-r^2)^3$ par (2.7) d'où (2.12). On a alors

$$\int |g_n(\eta)|^p |\eta| \left\{\int_{|\zeta| < \varepsilon,\, |\zeta|^2 \leqq 1 - |\eta|^2} d\lambda(\zeta)\right\} d\lambda(\eta)$$
$$\leqq \int_{\mathbf{D}} |g_n(\eta)|^p \, d\lambda(\eta) \sqrt{1 - |\eta|^2} \leqq \int_{\mathbf{D}} |g_n(\eta)|^p \, d\lambda(\eta)$$

et donc par (2.10)

$$\int_{E_n} |\tilde{f}_n|^p \frac{|\eta|}{\sqrt{1 - |\zeta|^2}} \, dv \leqq C(1 - |x_n|^2)^3 \int_{D_n} |f_n|^p \, d\lambda_n$$

d'où enfin:

$$\int_{\mathbf{B}} |\varphi|^p \, d|\tilde{\omega}_3| \leqq C\|\Phi'\|_\infty \sum_n (1 - |x_n|^2)^2 \int_{D_n} |f_n|^p \, d\lambda_n < +\infty.$$

On veut maintenant résoudre le problème $\bar{\partial}_b u = \omega = \frac{1}{B}\bar{\partial} F$ avec $u \in L^p(S)$. On a alors:

**Proposition 2.1.** *La forme* $\tilde{\omega}$ *est dans* $\Lambda^\infty_{(0,1)}$.

La preuve sera donnée au paragraphe suivant.

Puisque $\tilde{\omega} \in \Lambda^\infty_{(0,1)}$ et que, grâce aux lemmes 2.4 et 1.1 on a que $\omega \in \Lambda^p_{(0,1)}$; on peut résoudre grâce aux estimations du Théorème 1.1 et on a que $u \in L^p(S)$ avec $\bar{\partial}_b u = \omega$.

Posons alors: $G = F - BU$ où $U$ est l'extension de $u$ dans $\mathbf{B}$ [6 appendice II], on sait qu'alors $\bar{\partial} G = \bar{\partial} F - B\bar{\partial} U = 0$ et $G|_V = F|_V = f$.

De plus $U$ tend vers $u$ au sens des limites radiales donc $G \in H^p(\mathbf{B})$ et résoud le problème posé, ce qui achève la preuve du théorème 2.1, car $F - Bu$ est valeur au bord au sens de Stokes de $F - Bu$ et est dans $L^p(S)$.

**Théorème 2.2.** *Si* $V = \{D_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ *est uniformément séparée et si* $f$ *est dans* $H^p(\mathbf{B})$ *alors* $f|_V$ *est dans* $L^p(V)$.

Ce théorème prouve que, $V$ étant U. S., le théorème 2.1 est le meilleur possible.

*Preuve.* Ella sera conséquence de la

**Proposition 2.2.** *Si $V$ est uniformément séparée, la mesure d'intégration sur $V$ est de Carleson dans* **B**.

La démonstration de cette proposition est également reportée au paragraphe suivant; puisque la mesure d'intégration sur $V$ est de Carleson, on peut appliquer le théorème de L. Carleson [3—4]

$$\forall f \in H^p(\mathbf{B}), \quad \int_{\mathbf{B}} |f|^p \, d\mu \leqq C \int_S |f|^p \, d\sigma$$

explicitons $$\mu: \int_{\mathbf{B}} |f|^p \, d\mu = \sum_n (1-|x_n|^2)^2 \int_{D_n} |f|^p \, d\lambda_n$$

d'où le théorème 2.2.

## 3. Preuves

Pour prouver les propositions 1 et 2 nous aurons besoin de la proposition suivante, les notations étant celles du § 2.

**Proposition 3.1.** *La suite $\sigma = \{x_n, n \in \mathbf{N}\}$ est telle que la mesure $\nu = \sum_n (1-|x_n|^2)^2 \delta_{x_n}$ est de Carleson dans* **B**.

*Preuve.* Posons $i \in \mathbf{N}$, $e_i(\zeta) = \dfrac{1-|x_i|^2}{(1-\bar{x}_i \cdot \xi)^2}$, les $e_i$ sont les noyaux de Cauchy normalisés dans $H^2(\mathbf{B})$; on va évaluer $|\langle e_i, e_j \rangle|$, le produit scalaire étant celui de $H^2(\mathbf{B})$: $\langle e_i, e_j \rangle = \dfrac{(1-|x_i|^2)(1-|x_j|^2)}{(1-\bar{x}_i x_j)^2}$ car ces noyaux sont reproduisants d'autre part on a:

$$1-|b_i(x_j)|^2 = \frac{|x_i|^2 |1-\bar{x}_i x_j|^2 - \big||x_i|^2 - \bar{x}_i \cdot x_j\big|^2}{|x_i|^2 |1-\bar{x}_i x_j|^2}$$

développons: $$1-|b_i(x_j)|^2 = \frac{(1-|x_i|^2)(|x_i|^2 - |\bar{x}_i \cdot x_j|^2)}{|x_i|^2 (1-\bar{x}_i \cdot x_j|^2)}$$

mais l'inégalité de Schwartz implique:

$$|\bar{x}_i x_j|^2 \leqq |x_i|^2 |x_j|^2 \quad \text{d'où}$$

$$1-|b_i(x_j)|^2 \geqq \frac{(1-|x_i|^2)(1-|x_j|^2)}{|1-\bar{x}_i x_j|^2} = |\langle e_i, e_j \rangle|.$$

Le produit infini vérifiant: $\prod_{j \neq i} |b_i(x_j)|^2 \geqq \delta^2 \ \forall j \in \mathbf{N}$, on en déduit:

$$\sup_j \sum_i |\langle e_i, e_j \rangle| = C < +\infty.$$

La matrice $A=\{\langle e_i, e_j\rangle\}$ est alors bornée sur $l^2$ [8] en effet, supposons $i, j \leqq \mathbf{N}$ pour rester en dimension finie, $A_{\mathbf{N}}$ est hermitienne et soit $\lambda$ une de ses valeurs propres, il vient, avec $x_i=(x_i)$ le vecteur propre correspondant:

$$\sum_i \langle e_i, e_j\rangle x_i = \lambda x_j$$

d'où

$$|\lambda|\,|x_j| \leqq \sum_{i=1}^N |\langle e_i, e_j\rangle|\,|x_i| \quad j = 1, 2, \ldots, N$$

soit alors $j$ t. q.

$$|x_j| \geqq |x_i|, \quad i = 1, 2, \ldots, N;$$

il vient:

$$|\lambda| \leqq \sum_{i=1}^N \langle e_i, e_j\rangle \frac{|x_i|}{|x_j|} \leqq C.$$

Cela valant pour toutes les valeurs propres, on en déduit que $A$ est bornée par $C$.

Remarquons que $A$ est positive et soit $a=\{a_i,\ i\in\mathbf{N}\}$ un élément de $l^2(\mathbf{N})$; posons $h=\sum_{i=1}^N a_i e_i$ et $A^{1/2}$ la racine carrée positive de $A$; on a $\|A^{1/2}\| \leqq C^{1/2}$ de plus:

$$\|h\|_2^2 = \langle h, h\rangle_{H^2(\mathbf{B})} = \sum a_i \bar{a}_j \langle e_i, e_j\rangle| = \langle Aa, a\rangle_{l^2(N)}$$

soit encore:

$$\|h\|_2^2 = \|A^{1/2} a\|_{l^2}^2$$

de même:

$$\|Aa\|_{l^2}^2 = \langle Aa, Aa\rangle_{l^2} = \sum_j \left(\sum_{i,k} a_i \bar{a}_k \langle e_i, e_j\rangle \langle\overline{e_k, e_j}\rangle\right.$$

$$\|Aa\|_{l^2}^2 = \sum_j |\langle h, e_j\rangle_{H^2}|^2$$

d'où:

$$\sum_j |\langle h, e_j\rangle_{H^2}|^2 \leqq C\|h\|_{H^2}^2 \quad \text{car} \quad \|Aa\|_{l^2}^2 \leqq C\|A^{1/2}a\|_{l^2}^2.$$

Soit alors $h$ une fonction quelconque de $H^2(\mathbf{B})$ on en déduit encore, par projection sur l'espace engendré par $\{e_i,\ i\in\mathbf{N}\}$

$$\sum_j |\langle h, e_j\rangle|^2 \leqq C\|h\|_{H^2}^2.$$

Utilisant, comme dans [11 chap III], le fait que les noyaux de Cauchy sont reproduisants il vient:

$$\forall h\in H^2(\mathbf{B}), \quad \sum_j (1-|x_j|^2)^2 |h(x_j)|^2 \leqq C\|h\|_{H^2}^2$$

et ceci implique, grâce à [4], que le mesure $\nu=\sum_j (1-|x_j|^2)^2 \delta x_j$ est de Carleson dans $\mathbf{B}$.

**Remarque.** On montre dans [11] de façon très générale que l'on a si $x$ et $y$ sont deux points du spectre d'une algébre d'opérateurs et si $e_x$ et $e_y$ sont les noyaux de « Cauchy » correspondants [11] que:

$$|\langle e_x, e_y\rangle|^2 \leqq 1-d^2(x, y)$$

où $d(x, y)$ est la distance de Gleason de $x$ et $y$; ici on a:

$$d^2(x, y) = |b_x(y)|^2 + |c_x(y)|^2 \quad \text{si} \quad x, y \in \mathbf{B}$$

donc

$$|\langle e_{x_i}, e_{x_j}\rangle|^2 \leqq 1 - |b_i(x_j)|^2 \quad \text{a fortiori}$$

d'où

$$\sup_i \sum_j |\langle e_{x_i}, e_{x_j}\rangle|^2 < +\infty$$

mais alors A. M. Mantero [12] a montré que dans le cas de la boule de $\mathbf{C}^n$, cela entraîne que la mesure $\nu$ est de Carleson, ce qui fournit une autre preuve à la proposition

**Corollaire.** *Si* $\{\zeta_n, n \in \mathbf{N}\}$ *et une suite de* $\mathbf{B}$ *telle que* $d(x_n, \zeta_n) < \alpha < 1$, *alors la mesure* $\tilde{\nu} = \sum_n (1 - |\zeta_n|^2 \delta_{\zeta_n}$ *est encore de Carleson dans* $\mathbf{B}$.

*Preuve.* On a aisément que: $(1 - |\zeta_n|^2) \leqq \gamma(1 - |x_n|^2)$ avec $\gamma > 0$, indépendant de $n$.
D'autre part l'hypothèse implique également qu'il existe $\beta \geqq 1$ t. q.

$$\xi_n \in \tilde{Q}(x, h) \Rightarrow x_n \in \tilde{Q}(x, \beta h).$$

On en déduit:

$$\tilde{\nu}(\tilde{Q}(x, h)) = \sum_{n,\, \xi_n \in \tilde{Q}(x,h)} (1 - |Q_n|^2)^2 \leqq \sum_{n,\, x_n \in \tilde{Q}(x, \beta h)} (1 - |Q_n|^2)^2$$

$$\tilde{\nu}(\tilde{Q}(x, h)) \leqq \gamma^2 \sum_{n,\, x_n \in \tilde{Q}(x, \beta h)} (1 - |x_n|^2)^2 \leqq \gamma^2 \nu(\tilde{Q}(x, \beta h))$$

mais $\nu$ est de Carleson grâce à la proposition d'où:

$$\tilde{\nu}(\tilde{Q}(x, h)) \leqq \gamma^2 C \beta^2 h^2 \leqq \gamma^2 C \beta^2 |q(x, h)| \quad \text{c.q.f.d.}$$

On peut maintenant prouver que: la forme $\omega$ est dans $\Lambda^\infty_{(0,1)}$. En effet: pour cela il faut montrer que $\omega_i \in \Lambda^\infty$, $i = 1, 2, 3$.

Voyons
$$\omega_3 = \frac{\eta\tilde{\omega}_1 - \xi\tilde{\omega}_2}{\sqrt{1 - |\zeta|^2}} = \frac{1}{B} \sum_n \frac{\Phi'(|b_n|^2) b_n (1 - |x_n|^2)}{|x_n|(1 - \bar{x}_n \cdot \zeta)} \frac{(\eta z_n - \xi w_n)}{\sqrt{1 - |\zeta|^2}}$$

donc:

$$|\omega_3|\, dv \leqq C \sum_n \mathbf{I}_{E_n} \frac{1}{(1 - |x_n|^2)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{1 - |\zeta|^2}}\, dv(\zeta) = \mu \tag{3.1}$$

car $1 \geqq |C_n(\xi)| = \dfrac{|\eta z_n - \xi w_n| \sqrt{1 - |x_n|^2}}{|x_n|\, |1 - \bar{x}_n \cdot \zeta|}$ donc sur $E_n$ il vient

$$|\eta z_n - \xi w_n| \leqq C(1 - |x_n|^2)^{1/2} \quad \text{et (3.1)}$$

d'autre part on a aisément que

$$|\omega_i|\, dv \leqq \mu, \quad i = 1, 2$$

il nous suffira donc de montrer que $\mu$ est de Carleson pour prouver la proposition 2.1.

Soit alors $x \in S$, $h > 0$ et posons

$$Q(x, h) = \{\zeta \in S,\ |1 - \bar{x} \cdot \zeta| < h\} \quad \text{et aussi}$$
$$\tilde{Q}(x, h) = \{\xi \in \mathbf{B},\ |\zeta| > 1 - h,\ \zeta |\zeta|^{-1} \in Q(x, h)\}.$$

Considérons alors un ensemble $E_n$ t. q. $Q \cap E_n \neq \Phi$.

*1er cas:* $(*)$ $h \leqq \alpha(1 - |x_n|^2)$.

Seuls un nombre fini $n_0$, indépendant de $h$, d'ensembles $E_n$ peuvent intersecter $\tilde{Q}$ ainsi, les ensembles $\tilde{Q}$ et $E_n$ ayant la même géométrie et les $E_n$ étant disjoints d'où, si $I$ désigne l'ensemble de $n$ t. q. $h \leqq \alpha(1 - |x_n|^2)$, $|I| \leqq n_0$, on a:

$$A = \sum_{n \in I} \frac{1}{(1 - |x_n|^2)^{1/2}} \int_{\tilde{Q} \cap E_n} \frac{dv}{(1 - |\zeta|^2)^{1/2}} \leqq \sum_{n \in I} \frac{1}{(1 - |x_n|^2)^{1/2}} \int_{\tilde{Q}} \frac{dv}{(1 - |\zeta|^2)^{1/2}}$$

$$A \leqq \sum_{n \in I} \frac{h^{1/2}}{(1 - |x_n|^2)^{1/2}}\, \sigma(Q) \leqq \alpha n_0 \sigma(Q).$$

*2me cas:* Soit $\zeta_n$ un point de $\tilde{Q} \cap E_n$ t. q. $|\zeta_n|$ soit minimale, et supposons que

$$(**) \qquad h_n = 1 - |\zeta_n|^2 \geqq \alpha(1 - |x_n|^2)$$

soit $J$ l'ensemble des $n$ t. q. $(**)$ soit vérifié, on a:

$$B = \sum_{n \in J} \frac{1}{(1 - |x_n|^2)^{1/2}} \int_{\tilde{Q} \cap E_n} \frac{dv}{(1 - |\zeta|^2)^{1/2}} \leqq \sum_{n \in J} \frac{1}{(1 - |x_n|^2)^{1/2}} \int_{E_n} \frac{dv}{(1 - |\zeta|^2)^{1/2}}$$

par changement de variable on a:

$$\int_{E_n} \frac{dv}{(1 - |\xi|^2)^{1/2}} \leqq C(1 - |x_n|^2)^{5/2}$$

il vient:

$$B \leqq C \sum_{n \in J} (1 - |x_n|^2)^2 \leqq \frac{C}{C^2} \sum_{n \in J} (1 - |\zeta_n|^2)^2 \quad \text{grâce à } (**).$$

Utilisant le corollaire 3.1 on a:

$$B \leqq \frac{C}{\alpha^2}\, \sigma(Q).$$

*3ème cas:* $(***)$ $h_n < \inf\{h, \alpha(1 - |x_n|^2)\}$. Soit $K$ l'ensemble des entiers t. q. $(***)$ soit vérifié, alors on a:

**Lemme 3.1.** *Si $n \in K$, et $\beta > 1$ alors $\{\zeta \in S$, t. q. $\exists \lambda \in \mathbf{R}^+$, $\lambda\zeta \in \tilde{Q} \cap E_n\}$ est inclus dans $Q \cap E_n'$, où $E_n' = \{\zeta \in B,\ |b_n(\zeta)| < \beta\varepsilon'\}$.*

En effet supposons le contraire:

$$\exists \zeta \in Q \setminus E_n' \quad \text{t. q.} \quad \lambda\zeta \in E_n, \quad \lambda < 1;$$

considérons alors $\zeta'=\lambda'\zeta$ t. q. $\zeta'\in\tilde{Q}\cap E_n$, $\zeta'|\zeta'|^{-1}\notin E'_n$ et $|\zeta'|$ minimal; on a alors que $\zeta'\in\partial(\tilde{Q}\cap E_n)$.

a) $\underline{\zeta'\in\partial\tilde{Q}}\Rightarrow|\zeta'|=1-h$ et donc:

$|\zeta_n|<|\zeta'|=1-h\Rightarrow h_n=1-|\zeta_n|>h\Rightarrow$contradiction.

b) $\underline{\zeta'\in\partial E_n}$: la situation est alors la suivante: $\exists\zeta\notin E'_n$ et $\mu\zeta\in E'_n$; on peut, sans restreindre la généralité supposer que:

$$E_n=\left\{\zeta=(\xi,\eta)\in\mathbf{B},\ \left|\frac{\xi-r}{1-r}\right|<\varepsilon'\right\},\quad 0<r<1$$

et

$$E'_n=\left\{\zeta\in\mathbf{B},\ \left|\frac{\xi-r}{1-r\xi}\right|<\beta\varepsilon'\right\}.$$

Puisque

$$\zeta\notin E'_n\Rightarrow\left|\frac{\xi-r}{1-r\xi}\right|\geqq\beta\varepsilon'$$

puisque

$$\lambda\zeta\in E_n\Rightarrow\left|\frac{\lambda\xi-r}{1-r\xi\lambda}\right|<\varepsilon'.$$

Quitte à modifier un peu $\varepsilon'$ on a:

$$|\xi-r|<\beta\varepsilon'(1-r^2)$$

et

$$|\lambda\xi-r|<\varepsilon'(1-r^2)$$

d'où

$$|\lambda\xi-\xi+\xi-r|<\varepsilon'(1-r^2)$$

et

$$\big||\xi-r|-|\xi|(1-\lambda)\big|<\varepsilon'(1-r^2)$$

— si

$$|\xi-r|\geqq|\xi|(1-\lambda)$$

alors il vient:

$$|\xi-r|-\varepsilon'(1-r^2)\geqq|\xi|(1-\lambda)$$

d'où encore

$$(1-\lambda)\geqq\frac{1}{|\xi|}(\beta-1)\varepsilon'(1-r^2)$$

— si

$$|\xi-r|\leqq|\xi|(1-\lambda)\Rightarrow(1-\lambda)\geqq\frac{1}{|\xi|}\beta\varepsilon'(1-r^2).$$

Si donc on prend $\beta$ t. q. $(\beta-1)\varepsilon'\geqq\alpha$ alors on a:

$$|\lambda\zeta|=\lambda\quad\text{est t. q.}\quad 1-|\lambda\zeta|\geqq\alpha(1-r^2)$$

donc a fortiori $h_n = 1-|\zeta_n| \geqq \alpha(1-r^2)$ et la contradiction avec $h_n < \inf\{h, \alpha(1-|x_n|^2)\}$ ce qui achève la preuve du lemme 3.1.

*Fin du 3ème cas:* on va maintenant choisir $\varepsilon'$, $\alpha$ et $\beta$. On veut:

$$\beta\varepsilon' = \frac{\delta}{2} \quad \text{et} \quad \beta\varepsilon' - \varepsilon' \geqq \alpha.$$

On prend par exemple $\beta=2$, $\varepsilon'=\frac{\delta}{4}$ et $\alpha=\varepsilon'=\frac{\delta}{4}$, il vient alors

1) Les ensembles $E_n'$ sont disjoints

2) pour $n\in K$ le lemme 3.1 est valide donc:

$$G = \sum\nolimits_{n\in K} \frac{1}{(1-|x_n|^2)^{1/2}} \int_{E_n\cap\tilde{Q}} \frac{dv}{\sqrt{1-|\zeta|^2}} \leqq \sum\nolimits_{n\in K} \frac{1}{(1-|x_n|^2)^{1/2}} \int_{[h_n,1]\times[Q\cap E_n']} \frac{dv}{\sqrt{1-|\zeta|^2}}$$

donc
$$C \leqq \sum\nolimits_{n\in K} \sigma(Q\cap E_n') \leqq \alpha^{1/2}\sigma(Q).$$

Cela achève la preuve de la proposition 2.1.

## Preuve de la proposition 2.2.

On veut montrer que la mesure $\nu$ d'intégration sur $V$ est de Carleson, i. e.

$$\nu(\tilde{Q}(x,h)) \leqq C|Q(x,h)|$$

donc

$$\nu(\tilde{Q}(x,h)) = \sum\nolimits_n \int_{\tilde{Q}(x,h)\cap D_n} (1-|x_n|^2)\, d\lambda_n.$$

Décomposons les entiers en 2 catégories:

a) $n\in I \Rightarrow h \leqq \alpha(1-|x_n|^2)$ alors on sait qu'il n'y a qu'un nombre fini $n_0$, indépendant de $h$, de tels entiers et donc:

$$\sum\nolimits_{n\in I} (1-|x_n|^2)^2 \int_{\tilde{Q}\cap D_n} d\lambda_n \leqq Cn_0|Q|$$

car on vérifie sans peine par T. C. que la mesure d'intégration sur un disque est de Carleson de constante uniforme.

b) $n\in J \Leftrightarrow (1-|x_n|^2) \leqq \frac{1}{\alpha}h$.

On a alors:

$$\int_{\tilde{Q}(x,h)\cap D_n} (1-|x_n|^2)^2\, d\lambda_n \leqq \frac{1}{\varepsilon'^2} \int_{\tilde{Q}(x,\beta h)\cap E_n} \frac{dv}{1-|x_n|^2}$$

où $\beta$ est indépendant de $n$; en effet par rotation on peut supposer que $x_n=(r,0)$ d'où:

$$E_n = \{\zeta = (\xi,\eta)\in \mathbf{B},\ |\xi-r| \leqq \varepsilon'(1-r^2)\}$$

$$D_n = \{\zeta = (\xi,\eta)\in \mathbf{B},\ \xi = r\}$$

donc: $Q(x,h)\cap D_n=\{\zeta=(\xi,\eta)$ t.q. $\xi=r$ et $|1-\bar{z}r=\bar{w}\eta|<h\}$ où $x=(z,w)\in S$ de même:

$$Q(x,\beta h)\cap E_n=\{\zeta=(\xi,\eta) \text{ t.q. } |\xi-r|<\varepsilon'(1-r^2) \text{ et } |1-\bar{z}\xi-\bar{w}\eta|<\beta h\}$$

mais:

$$|1-\bar{z}\xi-\bar{w}\eta|=|1-\bar{z}r-\bar{w}\eta+\bar{z}(r-\xi)|\leqq h+|z|\,|r-\xi|$$

soit encore:

$$|1-\bar{z}\xi-\bar{w}\eta|\leqq h+\varepsilon'(1-r^2) \quad \text{si} \quad \xi\in Q(x,h\beta)\cap E_n$$

mais

$$n\in J\Rightarrow(1-r^2)\leqq\frac{1}{\alpha}h\Rightarrow|1-\bar{z}\xi-\bar{w}\eta|\leqq\left(1+\frac{\varepsilon'}{\alpha}\right)h$$

donc si on choisit $\beta=\left(1+\frac{\varepsilon'}{\alpha}\right)$ alors on a que:

$$\{\eta\in\mathbf{D} \text{ t.q. } (\xi,\eta)\in\tilde{Q}(\beta h)\cap E_n\}\supset\{\eta\in\mathbf{D} \text{ t.q. } (\xi,\eta)\in\tilde{Q}(x,h)\cap D_n\}$$

on peut alors calculer:

$$\int_{\tilde{Q}(x,\beta h)\cap E_n}\frac{dv}{1-|x_n|^2}=\frac{1}{(1-|x_n|^2)}\int_{|\xi-r|\leqq\varepsilon'(1-r^2)}d\lambda(\xi)\int_\eta d\lambda(\eta \text{ t.q. } (\xi,\eta)\in\tilde{Q}(x,\beta h)\cap E_n)$$

$$\geqq\frac{1}{(1-|x_n|^2)}\int_{|\xi-r|\leqq\varepsilon'(1-r^2)}d\lambda(\xi)\int_{\tilde{Q}(x,h)\cap D_n}d\lambda(\eta)\geqq\varepsilon'^2(1-|x_n|^2)^2\int_{\tilde{Q}(x,h)\cap D_n}d\lambda_n$$

car $d\lambda_n$ est normalisée sur $D_n$ alors que $d\lambda$ ne l'est pas. Mais alors on sait que $\mu=\sum_n \mathbf{I}_{E_n}\frac{dv}{(1-|x_n|^2)}$ est de Carleson donc

$$\sum_{n\in J}\int_{\tilde{Q}\cap D_n}d\lambda_n(1-|x_n|^2)\leqq\frac{1}{\varepsilon'^2}\mu(\tilde{Q}(x,\beta h))\leqq\frac{c}{\varepsilon'^2}\beta^2|\tilde{Q}(x,h)|$$

c.q.f.d.

## Bibliographie


1. Bergh, I. and Löfström, J., *Interpolation spaces.* Grundlehren, Springer-Verlag **223** (1976).
2. Carleson, L., An interpolation problem for bounded analytic functions. *Amer. J. Math.* **80** (1958).
3. Carleson, L., Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem. *Ann. Math.* **76** (1962).
4. Hörmander, L., $L^p$ estimates for (pluri-) subharmonic functions. *Math. Scand.* **20** (1967).
5. Hörmander, L., Generators for some rings of analytic functions. *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 943—949.

6. SKODA, H., Valeurs au bord pour les solutions de l'opérateur $d''$, et caractérisation des zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna. *Bull. Soc. Math. France* **104** (1976), 225—299.
7. VAROPOULOS, N., BMO functions and the $\bar{\partial}$ equation. *Pacific J.. Math.* **71** (1977), p. 221.
8. SHAPIRO, H. and SHIELDS, A. L., On some interpolation problems for analytic functions. *Amer. J. Math.* **83** (1961), 513—532.
9. HANKS, R., Interpolation by the real method between BMO, $L^\alpha$ $(0<\alpha<+\infty)$ and $H^\alpha$ $(0<\alpha<+\infty)$. *Indiana Univ. Math. J.* **26** (1977), 679—690.
10. AMAR, E. et BONAMI, A., Mesures de Carleson d'ordre $\alpha$ et estimations de solutions du $\bar{\partial}_b$. *A paraître.*
11. AMAR, E., *Ensembles d'interpolation dans le spectre d'une algèbre d'opérateurs.* Thèse. Publ. Math. Orsay **76—66** (1977).
12. MANTERO, A.-M., *Sur la condition de Carleson dans la boule unité de* $C^n$. Anal. Harm. Orsay **203** (1976).

*Received June 20, 1978*

Eric Amar
Université de Paris-Sud
Bat. 425
91 405 Orsay
France