Approximation d'un système de champs de vecteurs et applications à l'hypoellipticité

B. Helffer et J. F. Nourrigat

Introduction

On se propose de donner des conditions nécessaires ou suffisantes d'hypoellipticité pour des opérateurs de la forme $P(x, X_1, \dots, X_p)$ où $P(x, y_1, \dots, y_p)$ désigne un polynôme en y non-commutatif à coefficients C^∞ pour x dans $\mathbf{R}^n$, et les X_i sont des champs réels définis sur $\mathbf{R}^n$.

On sait ([9]) que, lorsque les champs X_i vérifient la condition:

(Hö) L'algèbre de Lie engendrée par les champs X_i contient en chaque point de $\mathbf{R}^n$ tout l'espace tangent,

l'opérateur $\sum_{i=1}^{p} X_i^2$ est hypoelliptique.

Dans [14], les auteurs ont montré le lien entre cet opérateur et un opérateur invariant homogène défini sur un groupe nilpotent. Un des outils est un théorème d'approximation (lifting theorem) dont on a plusieurs démonstrations ou variantes ([14], [5], [10], [11]). Par ailleurs, l'étude de l'hypoellipticité des opérateurs invariants homogènes sur un groupe nilpotent gradué a été achevé dans [7] et [8] où l'on résoud une conjecture de Rockland [13]. On verra ici que cette étude n'est pas suffisante et qu'une question plus difficile se pose qui est de caractériser les opérateurs invariants homogènes let hypoelliptiques sur un espace homogène $H \backslash G$ où G est un groupe nilpotent et H est un sous-groupe fermé de G.

Cet article comprend deux parties: dans la première, on donne un théorème d'approximation d'un système de champs de vecteurs; dans la deuxième, on donne comme application des conditions nécessaires d'hypoellipticité, qui sont suffisantes dans un cas simple. Cet article développe certains résultats d'un manuscrit que nous avons diffusé précédemment. Signalons enfin que L. P. Rothschild [15]a démontré des conditions suffisantes dans le cas considéré par G. Métivier [11].

I. Approximation d'un système de champs de vecteurs

1. Le cadre général

On considère:

1) Une algèbre de Lie $\mathscr{G}$ nilpotente de rang de nilpotence r admettant une décomposition de la forme:

$$\mathscr{G} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathscr{G}_i, \tag{1.1}$$

où les $\mathscr{G}_i$ sont des sous-espaces tels que

$$[\mathscr{G}_i, \mathscr{G}_j] \subset \mathscr{G}_{i+j} \tag{1.2}$$

(en convenant que $\mathscr{G}_{i+j}=0$ si $i+j>r$).

2) Une variété $C^\infty M$ de dimension n. On notera $L(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs réels C^∞ sur M.

3) Un homomorphisme partiel λ d'ordre r de $\mathscr{G}$ dans $L(M)$, c'est-à-dire une application linéaire de $\mathscr{G}$ dans $L(M)$, telle que:

$$\forall X \in \mathscr{G}_i, \quad \forall Y \in \mathscr{G}_j, \quad \lambda([X, Y]) = [\lambda(X), \lambda(Y)] \quad \text{si} \quad i+j \leqq r. \tag{1.3}$$

On suppose que λ vérifie la condition de Hörmander, c'est-à-dire que, pour tout x dans M, l'application linéaire λ_x de $\mathscr{G}$ dans $T_x M$ définie par:

$$\forall a \in \mathscr{G}, \quad \lambda_x(a) = \lambda(a)/x \quad \text{est surjective.} \tag{1.4}$$

On se propose de construire dans cette première partie, pour tout point x de M, un difféomorphisme θ_x d'un voisinage U de 0 dans $\mathbf{R}^n$ sur un voisinage ω de x dans M tel que $\theta_x \lambda(a)$, pour a dans $\mathscr{G}$, soit « approché » par l'image de a par une représentation de $\mathscr{G}$ dans $L^2(\mathbf{R}^n)$. Un énoncé précis sera donné au Paragraphe 4.

2. Définition d'une sous-algèbre de $\mathscr{G}$ en chaque point x de M

On définit, pour tout x dans M, pour tout k inférieur ou égal à r, un sous- espace $V_k(x)$ de $T_x M$ par:

$$V_k(x) = \lambda_x(\mathscr{G}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{G}_k) \quad \text{et} \quad V_0(x) = 0. \tag{2.1}$$

On définit ensuite un sous-espace $H_k(x)$ de $\mathscr{G}_k$ par:

$$H_k(x) = \mathscr{G}_k \cap \lambda_x^{-1}(V_{k-1}(x)), \tag{2.2}$$

et l'on pose:

$$\mathscr{H}(x) = \bigoplus_{k=1}^{r} H_k(x). \tag{2.3}$$

Proposition 2.1. *Avec les hypothèses ci-dessus:*
i) $\mathscr{H}(x)$ *est une sous-algèbre de* $\mathscr{G}$ *graduée par* (2.3).
ii) *On a:* $\dim \mathscr{G}_k = \dim H_k(x) + \dim V_k(x) - \dim V_{k-1}(x)$.
iii) *On a:* $\dim \mathscr{H}(x) = \dim G - \dim M$.

Démonstration.

Point i). Soient a dans $H_k(x)$ et b dans $H_\ell(x)$, tels que $k+\ell$ est inférieur à r. Montrons que $[a, b]$ est dans $H_{k+\ell}(x)$. Il est clair que $[a, b]$ est dans $\mathscr{G}_{k+\ell}$. Il nous suffit donc de montrer que:

$$\lambda_x([a, b]) \in V_{k+\ell-1}(x).$$

Par hypothèse, $\lambda_x(a)$ est dans $V_{k-1}(x)$; il existe donc un élément a_1 de $\mathscr{G}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{G}_{k-1}$ tel que $\lambda_x(a) = \lambda_x(a_1)$. L'élément $a_2 = a - a_1$ vérifie donc:

$$a_2 \in \mathscr{G}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{G}_k$$

$$\lambda_x(a_2) = 0.$$

De même, il existe deux éléments b_1 et b_2 de $\mathscr{G}$ tels que:

$$b = b_1 + b_2$$

$$b_1 \in \mathscr{G}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{G}_{\ell-1}$$

$$b_2 \in \mathscr{G}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{G}_\ell$$

$$\lambda_x(b_2) = 0.$$

On a évidemment:

$$[a, b] = [a_1, b_1] + [a_1, b_2] + [a_2, b_1] + [a_2, b_2].$$

Puisque $\mu + \ell$ est inférieur à r, on a:

$$\lambda([a_2, b_2]) = [\lambda(a_2), \lambda(b_2)].$$

Le crochet de deux champs de vecteurs qui s'annulent en x s'annule également en x. On a donc: $\lambda_x([a_2, b_2]) = 0$.

D'autre part:

$$[a_1, b_1] + [a_1, b_2] + [a_2, b_1] \in \mathscr{G}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{G}_{k+\ell-1}.$$

On en déduit immédiatement

$$\lambda_x([a, b]) \in V_{k+\ell-1}(x)$$

et donc $[a, b] \in H_{k+\ell}(x)$.

Point ii). Ce point résulte de la remarque suivante d'algèbre linéaire. Soit une application linéaire f de E dans F, où E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces supplémentaires de E. Soit $\tilde{E}_2 = E_2 \cap f^{-1}(f(E_1))$. Alors on a,

$$\dim E_2 = \dim \tilde{E}_2 + \dim f(E) - \dim f(E_1). \tag{2.4}$$

On applique cette remarque à $E_1 = \mathcal{G}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{G}_{k-1}$, $E_2 = \mathcal{G}_k$, $F = T_x M$ et $f = \lambda_x$.

Point iii). On ajoute toutes les égalités ii) pour k variant de 1 à r, et l'on tient compte de: $\dim V_0(x) = 0$, $\dim V_r(x) = \dim M$ (cf. condition 1.4).

La Proposition 2.1 est ainsi démontrée.

La Proposition 2.1 peut être précisée dans le cas particulier étudié par G. Métivier [11].

Proposition 2.2. *On suppose de plus que:*

(2.5) *Pour tout k inférieur à r, la dimension de l'espace $V_k(x)$ est constante sur M.*

Alors, pour tout x dans M, la sous-algèbre $\mathcal{H}(x)$ est un idéal de $\mathcal{G}$.

Démonstration.

1ère étape. On va tout d'abord caractériser les éléments de $H_k(x)$, quand l'hypothèse de la Proposition 2 est vérifiée. Pour tout k inférieur ou égal à r, choisissons un supplémentaire $S_k(x)$ de $H_k(x)$ dans $\mathcal{G}_k$, et posons

$$S(x) = \bigoplus_{k=1}^{r} S_k(x). \tag{2.6}$$

Soit v_k la dimension de $V_k(x)$. D'après la point ii) de la Proposition 2.1, la dimension de $S_k(x)$ est égale à $v_k - v_{k-1}$. Soit x fixé dans M. Choisissons une base (e_j) de $S(x)$ telle que les e_j $(v_{k-1} < j \leqq v_k)$ forment une base de $S_k(x)$ $(1 \leqq k \leqq r)$. L'application λ_x de $S(x)$ dans $T_x M$ est injective; les vecteurs $\lambda_x(e_j)$ sont donc linéairement indépendants. Il existe donc un voisinage ω de x tel que, pour tout y dans ω, les vecteurs $\lambda_y(e_j)$ soient linéairement indépendants. Comme $\dim V_k(y)$ est égal à v_k, les vecteurs $\lambda_y(e_j)$ $(1 \leqq j \leqq v_k)$ forment une base de $V_k(y)$ pour tout y dans ω.

Par conséquent, pour tout a dans $\mathcal{G}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{G}_k$, il existe des fonctions $\varphi_{j,a}$ dans $C^\infty(\omega)$ $(1 \leqq j \leqq v_k)$ telles que l'on ait:

$$\lambda_y(a) = \sum_{j \leqq v_k} \varphi_{j,a}(y) \lambda_y(e_j), \quad \forall y \in \omega.$$

Un élément a de $\mathcal{G}_k$ est dans $H_k(x)$ si et seulement si les fonctions $\varphi_{j,a}$ correspondantes s'annulent quand j est strictement supérieur à v_{k-1}.

2ème étape. Soient alors a dans $H_k(x)$ et b dans $\mathcal{G}_\ell$, avec $(k+\ell)$ inférieur ou égal à r, on a:

$$\lambda([a, b]) = [\lambda(a), \lambda(b)].$$

Donc, dans ω, on a:

$$\begin{aligned}\lambda([a, b]) &= \sum_{j\leqq\nu_k}[\varphi_{j,a}\lambda(e_j), \lambda(b)]\\ &= \sum_{j\leqq\nu_k}\varphi_{j,a}[\lambda(e_j), \lambda(b)] - \sum_{j\leqq\nu_k}\big(\lambda(b)\varphi_{j,a}\big)\lambda(e_j).\end{aligned}$$

Puisque ℓ est supérieur à 1, les termes de la seconde somme, restreints en x sont dans $V_{k+\ell-1}(x)$. Ceux de la première somme qui correspondent à un j inférieur ou égal à ν_{k-1} ont aussi leurs valeurs en x dans $V_{k+\ell-1}(x)$ et ceux qui correspondent à j supérieur à ν_{k-1} s'annulent en x. On a, par conséquent, $\lambda_x([a, b])$ dans $V_{k+\ell-1}(x)$ et donc $[a, b]$ dans $H_{k+\ell}(x)$.

3. Opérateurs quasi-homogènes

On renvoie à [11], [5] ou [14] pour plus de détails. La suite ν_i $(i=0, \dots, r)$ étant fixée et vérifiant: $0=\nu_0<\nu_1<\dots<\nu_r=n$, on définit la fonction poids [ ] de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, r\}$ en posant:

$$[j] = k, \quad \text{pour} \quad \nu_{k-1} < j \leqq \nu_k.$$

Si e_j désigne une base de $\mathbf{R}^n$, on définit, pour tout t strictement positif, δ_t dans $G\ell(\mathbf{R}^n)$ en posant:

(3.1) $$\delta_t(e_j) = t^{[j]}e_j.$$

On dira qu'une fonction f définie sur $\mathbf{R}^n\setminus 0$ est homogène de degré ϱ, si, pour tout t strictement positif, on a:

$$f\circ\delta_t = t^\varrho\circ f.$$

De même, un opérateur différentiel T (à coefficients C^∞) sera dit homogène de degré ϱ, si, pour tout t strictement positif, on a:

$$\delta_{t*}T = t^\varrho\cdot T$$

où $$((\delta_{t*}T)f)\circ\delta_t \overset{\text{def}}{\equiv} T(f\circ\delta_t).$$

Par exemple, la fonction: $\mathbf{R}^n\ni u\to u^\alpha$ est homogène de degré $[\alpha]$ (où, par définition, $[\alpha]=\sum_{j=1}^m \alpha_j[j]$, et l'opérateur $u^\alpha\,\partial/\partial u_j$ est homogène de degré $[j]-[\alpha]$.

Suivant [11], nous définissons l'ordre d'un opérateur en 0 de la manière suivante: on munit d'abord $\mathbf{R}^n$ de la « norme homogène »

(3.2) $$|u| = \big(\textstyle\sum_{j=1}^n |u_j|^{2/[j]}\big)^{1/2}.$$

Pour un voisinage U de l'origine, on définit $C_m^\infty(U)$ comme l'espace des fonctions C^∞ « nulles à l'ordre m » à l'origine $(m\in\mathbf{Z})$ en posant:

(3.3) $$C_m^\infty(U) = \{f\in C^\infty(U),\ |f(u)| = O(|u|^m), \text{ lorsque } u \text{ tend vers } 0\}.$$

On dit alors qu'un opérateur T de $C^\infty(U)$ dans $C^\infty(U)$ est d'ordre inférieur ou égal à p en 0, si, pour tout m, on a:

$$TC_m^\infty(U) \subset C_{m-p}^\infty(U). \tag{3.4}$$

Avec ces définitions, un opérateur T défini par

$$T = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial_u^\alpha$$

est d'ordre inférieur ou égal à p à l'origine, si et seulement si, pour tout α, a_α est dans $C_{[\alpha]-p}^\infty(u)$. Ceci équivaut encore à dire que, pour tout α et tout β tels que: $[\beta] < [\alpha]-p$, on a: $\partial_u^\beta a_\alpha(0)=0$.

A un tel opérateur d'ordre inférieur ou égal à p en 0, on associe sa partie homogène de degré p, $\hat{T}_p$, définie par:

$$\hat{T}_p = \sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{|\beta|=[\alpha]-p} (\partial_u^\beta a_\alpha)(0) \frac{u^\beta}{\beta!} \partial_u^\alpha. \tag{3.5}$$

Il est alors clair $(T-\hat{T}_p)$ est d'ordre inférieur ou égal à $(p-1)$ en 0. Rappelons les propriétés suivantes:

(3.6) Pour tout f dans $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, tout T d'ordre inférieur ou égal à p

$$t^{-p}(\delta_{t*}T)f \xrightarrow[t\to\infty]{} \hat{T}_p f$$

la convergence ayant lieu dans $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$.

(3.7) Si T et S sont des opérateurs respectivement d'ordre inférieur ou égal à p et q en 0, TS et $[T, S]$ sont d'ordre inférieur ou égal à $p+q$ et on a:

$$\widehat{T\cdot S}_{p+q} = \hat{T}_p \hat{S}_q$$

$$[\widehat{T, S}]_{p+q} = [\hat{T}_p, \hat{S}_q].$$

(3.8) On dira que T est homogène de degré p en 0 si $T=\hat{T}_p$. On appliquera les résultats ci-dessus à l'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ vérifiant (1.1) et (1.2) munie de la famille naturelle de dilatations δ_t définie par:

$$\delta_t(a) = t^k a \quad \text{pour } a \text{ dans } \mathscr{G}_k,$$

ou à des sous-espaces vectoriels gradués de $\mathscr{G}$ munis de la dilatation induite par $\mathscr{G}$.

Si V est un tel espace vectoriel: $V=\oplus_{j=1}^r V_j$, on posera $Q=\sum_{j=1}^r j \dim V_j$. Q est appelée la dimension homogène de V.

4. Enoncé du théorème d'approximation

Soit G le groupe de Lie connexe et simplement connexe dont l'algèbre de Lie est $\mathscr{G}$. On utilisera les notations de [7] et [8] pour les représentations induites $\pi_{(0,\mathscr{K})}$, où $\mathscr{K}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{G}$. $\pi_{(0,\mathscr{K})}$ est la représentation induite de $\exp \mathscr{K}$ à G par la représentation triviale sur $\exp \mathscr{K}$.

Rappelons que ces représentations unitaires peuvent être réalisées dans $L^2(S)$, où S est un supplémentaire convenable gradué de $\mathscr{K}$ dans $\mathscr{G}$ muni de sa mesure de Lebesgue.

Si a est un élément de $\mathscr{G}_k$, et si $\mathscr{K}$ est stable par les dilatations δ_t de $\mathscr{G}$, $\pi_{(0,\mathscr{K})}(a)$ est un opérateur homogène de degré k sur S.

Le résultat principal de cette première partie est le

Théorème 4.1. *Sous les hypothèses* (1.1) *à* (1.4), *pour tout x dans M, il existe un supplémentaire $S(x)$ de $\mathscr{K}(x)$ dans $\mathscr{G}$, stable par les dilatations δ_t de $\mathscr{G}$ et un difféomorphisme θ_x d'un voisinage U de* 0 *dans $S(x)$ sur un voisinage ω de x dans M tels que, pour tout a dans $\mathscr{G}_k$ $(1 \leqq k \leqq r)$, le champ de vecteurs sur U*

$$\theta_x^* \lambda(a) - \pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(a)$$

soit d'ordre inférieur ou égal à $(\mu-1)$ en 0, *autrement dit:*

$$\widehat{\theta_x^* \lambda(a)}_k = \pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(a).$$

Remarque 4.2. Dans le cas considéré par G. Métivier (Hypothèse (2.5)), $\mathscr{K}_x$ est un idéal de $\mathscr{G}$ d'après la proposition (2.2); $\pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(a)$ peut alors être considéré comme un champ invariant à gauche sur le groupe ${}_{\exp \mathscr{K}_x}\backslash G$. Métivier [11] a démontré dans ce cadre un théorème plus fin permettant de contrôler la dépendance en x du difféomorphisme θ_x.

Nous démontrerons le théorème au paragraphe suivant en choisissant $S(x)$ et θ_x de la manière suivante:

Choix du supplémentaire $S(x)$.

Comme dans la démonstration de la proposition (2.2), on choisit:

$$S(x) = \bigoplus_{k=1}^{r} S_k(x), \tag{4.1}$$

où $S_k(x)$ est pour tout k $(k=1, \dots, r)$ un supplémentaire de $H_k(x)$ dans $\mathscr{G}_k$.

Définition du difféomorphisme θ_x.

Il existe un voisinage Ω de 0 dans $\mathscr{G}$ et un voisinage ω_1 de x dans M, tels que l'application:

$$(u, y) \to e^{\lambda(u)} y$$

soit C^∞ de $\Omega\times\omega_1$ dans M. Cette application est caractérisée par la propriété suivante: $\forall f\in C_0^\infty(M)$, $\forall(u, y)\in\Omega\times\omega_1$, $\forall t\in[0, 1]$

$$[\lambda(u)f](e^{t\lambda(u)}x) = \frac{d}{dt}f(e^{t\lambda(u)}\cdot x).$$

Pour tout u dans $S(x)$, on notera u_k sa projection sur $S_k(x)$ $(1\leqq k\leqq r)$, Il existe une application γ de $S(x)$ dans $\mathscr{G}$ telle que:

(4.2) $$e^{u_r}e^{u_{r-1}}\dots e^{u_1} = e^{\gamma(u)} \quad \text{pour tout } u \text{ dans } S(x).$$

Soit U_1 un voisinage de 0 dans $S(x)$ tel que: $\gamma(U_1)\subset\Omega$. On définit une application θ_x de U_1 dans M en posant:

(4.3) $$\theta_x(u) = e^{\lambda(\gamma(u))}\cdot x \quad \text{pour tout } u \text{ dans } U_1$$

On a $$d\theta_x(0) = \lambda_x\circ d\gamma(0) = \lambda_x/S(x),$$

car la différentielle de γ à l'origine est l'injection de $S(x)$ dans $\mathscr{G}$. L'application $d\theta_x(0)$ est donc un isomorphisme de $S(x)$ sur T_xM (d'après le point iii) de la Proposition (2.1) et l'injectivité de $\lambda_x/S(x)$). Il existe donc un voisinage U de 0 dans U_1 tel que θ_x soit un difféomorphisme de U sur un voisinage ω de x dans M.

5. Démonstration du Théorème 4.1.

x est désormais un point fixé de M. On désigne par (e_j) une base de $\mathscr{G}$ telle que, pour tout j, e_j soit dans l'un des G_k. L'indice k correspondant sera noté $[j]$. On choisit cette base de telle manière qu'une partie des (e_j) forme une base de $\mathscr{K}(x)$ (les vecteurs e_j qui sont dans $\mathscr{K}(x)$ seront aussi notés h_j) et que l'autre partie forme une base de $S(x)$.

Pour toute fonction f dans $C^\infty(\mathscr{G})$, on notera $\tilde{f}$ la fonction sur G définie par:

(5.1) $$\tilde{f}(e^u) = f(u) \quad \text{pour tout } u \text{ dans } \mathscr{G}.$$

Une étape essentielle de la démonstration du Théorème 4.1 est celle de la proposition suivante:

Proposition 5.1. *Pour tout a dans $\mathscr{G}_j$ $(1\leqq j\leqq r)$, il existe des fonctions φ_k dans $C^\infty(U)$ telles que:*

(5.2) $$\theta_x^*\lambda(a) = \pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(a) + \textstyle\sum_k \varphi_k\theta_x^*\lambda(e_k).$$

(5.3) $$\varphi_k\in C^\infty_{[k]-j+1}.$$

Démonstration de la Proposition 5.1.

a) *Passage du formel au C^∞.*

On suppose qu'on a démontré (5.2) comme une égalité entre séries formelles en u. Utilisant le théorème de Borel, on en déduit qu'il existe des fonctions $\chi_k \in C^\infty_{[k]-j+1}$ et des fonctions $\psi_\ell \in C^\infty$ plates en 0 telles que:

$$\theta_x^* \lambda(a) = \pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(a) + \textstyle\sum_k \chi_k \theta_x^* \lambda(e_k) + \sum_\ell \psi_\ell \frac{\partial}{\partial u_\ell}. \tag{5.4}$$

On utilise maintenant le fait que si les f_j désignent les éléments de la base de $\mathscr{G}$ qui sont dans $S(x)$ les champs de vecteurs $\theta_x^* \lambda(f_j)$, restreints en tout point u de U, forment une base de $T_u U$.

Il existe donc des fonctions dans $C^\infty(U)$ $\omega_{kj}(u)$ telles que:

$$\frac{\partial}{\partial u_k} = \textstyle\sum_j \omega_{kj} \theta_x^* \lambda(f_j). \tag{5.5}$$

On déduit alors (5.2) de (5.4) et (5.5).

b) *Démonstration pour les séries formelles.*

Dans tout ce qui suit, toutes les égalités sont à considérer comme des égalités entre séries formelles.

Suivant les notations de R. Goodman [5], on définit une application:

$$W\colon C^\infty(M) \to C^\infty(\Omega) \quad \text{par:}$$

$$Wf(u) = f(e^{\lambda(u)} \cdot x) \tag{5.6}$$

pour tout u dans Ω et tout f dans $C^\infty(M)$.

On définit une application $\gamma^*\colon C^\infty(\Omega) \to C^\infty(U)$ par:

$$\gamma^* f(u) = f(\gamma(u)) \tag{5.7}$$

pour tout u dans U, tout f dans $C^\infty(\Omega)$.

On a évidemment

$$\theta_x^* = \gamma^* \cdot W. \tag{5.8}$$

Le lemme suivant est démontré dans [5] (page 45, formule d):

Lemme 5.2. *Pour tout a dans $\mathscr{G}_j$, il existe des fonctions ψ_k dans $C^\infty_{r-j+1}(\Omega)$ telles que l'on ait:*

$$W\lambda(a) \equiv \pi_{(0,0)}(a) W + \textstyle\sum_k \psi_k W \lambda(e_k) \quad (\textit{formellement}). \tag{5.9}$$

Remarque 5.3. Le Lemme (5.2) n'est autre que la Proposition (5.1) dans le cas particulier où $\mathscr{K}(x) = 0$.

Remarque 5.4. $\pi_{(0,0)}$ désigne la représentation régulière à droite de G, notée dR dans [5].

Remarque 5.5. L'égalité (5.9) peut aussi s'écrire, pour f dans $C^\infty(M)$

$$(5.10)\qquad \frac{d}{dt}f(e^{t\lambda(a)}e^{\lambda(u)}x)\big|_{t=0}=\frac{d}{dt}\widetilde{Wf}(e^u e^{ta})\big|_{t=0}+\sum_k \psi_k W\lambda(e_k)f.$$

On peut montrer de manière analogue l'égalité suivante

$$(5.11)\qquad \frac{d}{dt}f(e^{\lambda(u)}e^{t\lambda(a)}x)\big|_{t=0}=\frac{d}{dt}\widetilde{Wf}(e^{ta}e^u)\big|_{t=0}+\sum_k \tilde{\psi}_k W\lambda(e_k)f,$$

où les fonctions $\tilde{\psi}_k$ sont dans C^∞_{r-j+1}.

La même propriété est valable en considérant a dans $\mathscr{G}_1\oplus\ldots\oplus\mathscr{G}_j$.

Si on compose à gauche l'égalité (5.9) par γ^*, et tenant compte de (5.8), on obtient:

$$(5.12)\qquad \theta_x^*\lambda(a)=\gamma^*\pi_{(0,0)}(a)W+\sum_k(\gamma^*\psi_k)\theta_x^*\lambda(e_k).$$

Puisque

$$(5.13)\qquad \gamma^*\colon C^\infty_{r-j+1}(\Omega)\to C^\infty_{r-j+1}(U)\subset C^\infty_{[k]-j+1}(U).$$

Le deuxième terme de (5.12) est de la forme voulue dans (5.3). Il nous reste à calculer $\gamma^*\pi_{(0,0)}(a)W$, ce qui est l'objet des lemmes qui suivent.

Lemme 5.6. *Pour tout a dans $\mathscr{G}_j$, il existe des fonctions ψ_k dans $C^\infty(U)$ $(1\leqq k\leqq \dim\mathscr{K}_x)$ telles que, pour tout g dans $C^\infty(\Omega)$, on ait:*

$$(5.14)\qquad \gamma^*\pi_{(0,0)}(a)g=\pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(a)(\gamma^*g)+\sum_{[k]\geqq j}\psi_k g_k,$$

où l'on a posé:

$$(5.15)\qquad g_k(u)=\frac{d}{dt}\tilde{g}(e^{th_k}e^u)\big|_{t=0}.$$

De plus, les fonctions ψ_k sont dans $C^\infty_{[k]-j}(U)$.

Rappelons quelques notations de [7] et [8]. Il existe des applications $h(u,a)$ de $S_x\times\mathscr{G}$ dans $\mathscr{K}_x$ et $\sigma(u,a)$ de $S_x\times\mathscr{G}$ dans S_x telles que

$$(5.16)\qquad e^{\gamma(u)}e^a=e^{h(u,a)}e^{\gamma(\sigma(u,a))}$$

pour tout (u,a) dans $S_x\times\mathscr{G}$.

La représentation $\pi_{(0,\mathscr{K}_x)}$ est définie, pour tout f dans $L^2(S_x)$, tout a dans $\mathscr{G}$, par:

$$(5.17)\qquad \pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(e^a)f(u)=f(\sigma(u,a)).$$

On a d'autre part:

$$(5.18)\qquad \pi_{(0,0)}(e^a)g(u)=\tilde{g}(e^u\cdot e^a)$$

$\forall g\in L^2(\mathscr{G}),\ \forall (u,a)\in\mathscr{G}\times\mathscr{G}$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le lemme:

Démonstration du Lemme 5.6. On déduit de (5.18):

$$(\gamma^*\pi_{(0,0)}(e^a)\,g)(u) = \tilde{g}(e^{\gamma(u)}e^a) \quad \text{pour } u \text{ dans } S_x \tag{5.19}$$

et compte-tenu de (5.16):

$$\gamma^*\pi_{(0,0)}(e^a)\,g(u) = \tilde{g}(e^{h(u,a)}\,e^{\gamma(\sigma(u,a))}). \tag{5.20}$$

En dérivant (5.20), on obtient, pour g dans $C_0^\infty(\Omega)$:

$$\gamma^*\pi_{(0,0)}(a)\,g(u) = \frac{d}{dt}\,\tilde{g}(e^{h(u,ta)}\,e^{\gamma(\sigma(u,ta))})\big|_{t=0}.$$

Puisque: $h(u,0)=0$ et $\sigma(u,0)=u$, on en déduit:

$$\gamma^*\pi_{(0,0)}(a)\,g(u) = \frac{d}{dt}\,\tilde{g}(e^{\gamma(\sigma(u,ta))})\big|_{t=0} + \frac{d}{dt}\,\tilde{g}(e^{h(u,ta)}\,e^{\gamma(u)})\big|_{t=0}. \tag{5.21}$$

Le premier terme du second membre de (5.21) est égal, d'après (5.17) à $\pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(a)\,\gamma^*g$.

Pour calculer le second terme, on écrit, en utilisant la base (h_k) de $\mathscr{K}_x$:

$$h(u,ta) = \textstyle\sum_k \Phi_k(u,ta)\,h_k,$$

où les fonctions Φ_k sont des fonctions C^∞ de $S_x \times \mathscr{G}$ dans $\mathbf{R}$, et on utilise l'égalité suivante; pour a dans $\mathscr{G}_j$

$$\frac{d}{dt}\,\tilde{g}(e^{\Sigma \Phi_k(u,ta)h_k}\,e^{\gamma(u)})\big|_{t=0} = \textstyle\sum_{[k]\geqq j} \frac{d}{dt}\,\Phi_k(u,ta)\big|_{t=0}\,\frac{d}{dt}\,\tilde{g}(e^{th_k}e^{\gamma(u)})\big|_{t=0}, \tag{5.22}$$

h_k étant dans $\mathscr{G}_{[k]}$ et a dans $\mathscr{G}_j$, la fonction:

$$u \to \frac{d}{dt}\,\Phi_k(u,ta)\big|_{t=0}$$

est dans $C^\infty_{[k]-j}(U)$. Le lemme est ainsi démontré.

Pour démontrer la Proposition 5.1, il nous reste à transformer l'égalité (5.15) en montrant que, pour tout f dans $C^\infty(M)$, tout h_k dans $H_{[k]}(x)$, on a:

$$\frac{d}{dt}\,\widetilde{Wf}(e^{th_k}\cdot e^u)\big|_{t=0} = \textstyle\sum_\ell \varphi_\ell(u)\big(W\lambda(e_\ell)f\big)(u) \tag{5.23}$$

où les fonctions φ_ℓ sont dans $C^\infty_{[\ell]-[k]+1}(\Omega)$. En composant à gauche par γ^* et en reportant dans (5.14) (où l'on remplace g par Wf), puis en tenant compte de (5.8) et (5.13), on aura démontré la proposition.

D'après la définition de $\mathscr{K}(x)$, on peut écrire:

$$h_k = h'_k + h''_k$$

où $h'_k \in \mathscr{G}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{G}_{[k]}$, $\lambda_x(h'_k) = 0$, $h''_k \in \mathscr{G}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{G}_{[k]-1}$.

On a:

$$\frac{d}{dt} \widetilde{Wf}(e^{th_k} \cdot e^u)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \widetilde{Wf}(e^{th'_k} e^u)\big|_{t=0} + \frac{d}{dt} \widetilde{Wf}(e^{th''_k} \cdot e^u)\big|_{t=0}. \tag{5.24}$$

Pour démontrer (5.23), on examine séparément les deux termes du second membre de (5.24). Ceci fait l'objet des deux lemmes suivants:

Lemme 5.7. *Si h est un élément de $\mathscr{G}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{G}_{[k]}$ tel que $\lambda_x(h)$ est nul, alors il existe des fonctions φ_ℓ dans $C^\infty_{r-[k]+1}(\Omega)$ telles que, pour tout f dans $C^\infty(M)$, on ait:*

$$\frac{d}{dt} \widetilde{Wf}(e^{th} \cdot e^u)\big|_{t=0} = \textstyle\sum_\ell \varphi_\ell(u) W\lambda(e_\ell) f(u). \tag{5.25}$$

Lemme 5.8. *Si h est dans $\mathscr{G}_p$, il existe des fonctions φ_ℓ dans $C^\infty_{[\ell]-p}(\Omega)$ telles que, pour tout f dans $C^\infty(M)$, on ait l'égalité* (5.25).

On appliquera le Lemme 5.7 à h'_k et le Lemme (5.8) à h''_k qui s'écrit comme somme de termes dans les $\mathscr{G}_p$ $(1 \leqq p \leqq [k]-1)$.

Démonstration du Lemme 5.7. On utilise l'identité (5.11).

$$\frac{d}{dt} \widetilde{Wf}(e^{th} e^u) = \frac{d}{dt} f(e^{\lambda(u)} \cdot e^{t\lambda(u)} x)\big|_{t=0} + \textstyle\sum_\ell \varphi_\ell(u) W\lambda(e_\ell) f, \tag{5.26}$$

avec φ_ℓ dans $C^\infty_{r-[k]+1}(\Omega)$.

Montrons que le premier terme du second membre est nul. Si on pose pour tout u dans Ω, $F(y) = f(e^{\lambda(u)} \cdot y)$, $\forall y \in \omega$. On a:

$$\frac{d}{dt} f(e^{\lambda(u)} e^{t\lambda(h)} x)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt} F(e^{t\lambda(u)} \cdot x)\big|_{t=0} = (\lambda(h) F)(x) = 0$$

puisque le champ de vecteurs $\lambda(h)$ s'annule en x.

Démonstration du Lemme 5.8. On sait que:

$$e^{th} e^u = e^u e^{t \exp(ad-u) h}.$$

Il existe des fonctions φ_ℓ dans $C^\infty_{[\ell]-p}(\mathscr{G})$ telles que:

$$\exp(ad-u) h = \textstyle\sum_{[\ell] \geqq p} \varphi_\ell(u) e_\ell \quad \text{pour tout } u \text{ dans } \mathscr{G}.$$

On a donc:

$$\frac{d}{dt}\widetilde{Wf}(e^{th}\cdot e^{u})\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\widetilde{Wf}(e^{u}\cdot e^{t\Sigma\varphi_\ell(u)e_\ell})\big|_{t=0} =$$

$$= \sum_\ell \varphi_\ell(u)\frac{d}{dt}\widetilde{Wf}(e^{u}\cdot e^{te_\ell})\big|_{t=0} = \sum_\ell \varphi_\ell(u)\pi_{(0,0)}(e_\ell)\cdot Wf(u) \text{ (d'après 5.18).}$$

On utilise de nouveau de Lemme (5.2). Il existe des fonctions ψ_m dans $C^\infty_{r-\ell+1}(\Omega)$ telles que:

$$\pi_{(0,0)}(e_\ell)W = W\lambda(e_\ell) + \sum_m \psi_m W\lambda(e_m),$$

ce qui démontre le lemme et la Proposition 5.1.

Fin de la démonstration du Théorème 4.1. Elle est identique à celle du Théorème (3.1) de Métivier [11]. D'après la Proposition (4.1), pour tout j inférieur ou égal à r, il existe des fonctions φ_{jk} dans $C^\infty_{[k]-j+1}(U)$ telles que:

$$\theta_x^*\lambda(e_j) = \pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(e_j) + \sum_k \varphi_{jk}\theta_x^*\lambda(e_k) \tag{5.27}$$

$$\varphi_{jk}\in C^\infty_{[k]-[j]+1}(U) \quad \text{si} \quad [k]\geqq j. \tag{5.28}$$

Soit Φ la matrice (φ_{jk}). La matrice $(I-\Phi)$ est la somme d'une matrice triangulaire n'ayant que des 1 sur la diagonale, et d'une matrice dont la norme tend vers 0 avec $|u|$. Par conséquent, dans un voisinage de 0, la matrice $(I-\Phi)$ est inversible. Posons

$$(I-\Phi)^{-1} = \sum_n \Phi^{(n)} = I-\Psi$$

avec $\Psi = (\psi_{jk}(u))$.

On vérifie facilement que ψ_{jk} vérifie (5.28). On peut alors écrire:

$$\pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(e_j) - \theta_x^*\lambda(e_j) = \sum_k \psi_{jk}\pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(e_k).$$

On sait que $\pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(e_k)$ est un opérateur homogène de degré $[k]$: par conséquent, $\psi_{jk}\pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(e_k)$ est un opérateur d'ordre inférieur ou égal à $[j]-1$, ce qui démontre le Théorème 1.

II. Application à l'hypoellipticité

1. Le cadre général

On considère des champs de vecteurs $X_1, \dots, X_p$ réels, C^∞, sur une variété M, vérifiant la condition de Hörmander:

(Hö) Il existe un entier r tel que les crochets des champs X_j de longueur inférieure ou égale à r engendrent, en chaque point x de M, T_xM tout entier.

Soit $P(x, y_1, \dots, y_p)$ un polynôme de degré m à p variables, non commutatif, à coefficients C^∞ sur M, et soit $\mathscr{P}$ l'opérateur différentiel:

$$\mathscr{P} = P(x, X_1, \dots, X_p) = \sum_{k=|\alpha|\leqq m} a_\alpha(x) X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_k}. \tag{1.1}$$

On pose la définition suivante:

Définition 1.1. On dit que $\mathscr{P}$ est hypoelliptique maximal en un point x de M, s'il existe un voisinage ω de x, et une constante C strictement positive telle que l'on ait:

$$\|u\|^2_{\mathscr{H}^m(\omega)} \leqq C[\|\mathscr{P}u\|^2_{L^2(\omega)} + \|u\|^2_{L^2(\omega)}], \quad \forall u \in C_0^\infty(\omega). \tag{1.2}$$

Par $\|\cdot\|_{\mathscr{H}^m(\omega)}$, on désigne la norme:

$$u \to \|u\|^2_{\mathscr{H}^m(\omega)} = \sum_{|\alpha|\leqq m} \|X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_k} u\|^2_{L^2(\omega)}. \tag{1.3}$$

Un certain nombre de remarques s'imposent pour que cette définition ait un sens.

Remarque 1.2. L'inégalité (1.2) ne dépend pas du choix des coordonnées, de sorte que la définition a un sens intrinsèque.

Remarque 1.3. L'inégalité (1.2) implique l'hypoellipticité de $\mathscr{P}$ dans un voisinage de x. La démonstration est essentiellement la même que dans [7] § 6 (cf. [16], [17]), si on observe que l'on a la propriété suivante, sous l'hypothèse (Hö) (cf. Th. 17 de [14]):

(1.4) Il existe une constante C telle que, pour tout u dans $C_0^\infty(\omega)$,

$$\sum_{|\alpha|\leqq m-1} \|X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_k} u\|^2_{H^{1/r}(\omega)} \leqq C \|u\|^2_{\mathscr{H}^m(\omega)},$$

où $H^{1/r}(\omega)$ désigne l'espace de Sobolev usuel.

Soit $\mathscr{G}$ l'algèbre de Lie nilpotente libre à p générateurs $a_1, \dots, a_p$, de rang de nilpotence r. Cette algèbre est graduée (cf. I, paragraphe 1) et admet une famille de dilatations compatible avec cette graduation. Soit G le groupe de Lie connexe et simplement connexe correspondant. On sait dans ces conditions (cf. [5]) qu'il existe un homomorphisme partiel d'ordre r unique λ: $\mathscr{G} \to L(M)$ tel que:

$$\lambda(a_j) = X_j \quad j = 1, \dots, p. \tag{1.5}$$

On note $\mathscr{K}_x$ la sous-algèbre définie au point x par (I, 2.3), par S_x le sous-espace défini par (I, 4.1) et par $\pi_{(0, \mathscr{K}_x)}$ la représentation unitaire de G dans $L^2(S_x)$ définie en (I, 5.17).

Enfin, en chaque point x de M, on associe à $\mathscr{P}$ un élément P_x homogène de degré m de l'algèbre enveloppante universelle $\mathscr{U}(\mathscr{G})$, défini par:

$$P_x = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_k}. \tag{1.6}$$

2. Conditions nécessaires d'hypoellipticité

On a le:

Théorème 2.1. *Si $\mathscr{P}$ est hypoelliptique maximal en x, alors il existe une constante C strictement positive telle que, pour tout u dans $C_0^\infty(S_x)$, on ait:*

$$\sum_{|\alpha|\leqq m} \|\pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(a^\alpha)u\|^2_{L^2(S_x)} \leqq C[\|\pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(P_x)u\|^2_{L^2(S_x)} + \|u\|^2_{L^2(S_x)}] \tag{2.1}$$

où on a posé $a^\alpha = a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_k}$.

Corollaire 2.2. *Si $\mathscr{P}$ est hypoelliptique maximal en x, alors $\pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(P_x)$ est hypoelliptique maximal.*

Corollaire 2.3. *Dans le cas de Métivier* [11] *(cf. Proposition* I, 2.2*), si $\mathscr{P}$ est hypoelliptique maximal en x, alors pour toute représentation irréductible π non triviale, triviale sur* exp $\mathscr{K}_x$, *$\pi(P_x)$ est injectif dans $\mathscr{S}_\pi$ (où $\mathscr{S}_\pi$ désigne l'espace des vecteurs C^∞ de la représentation).*

Remarque 2.4. Il résultera de la démonstration du Théorème 2.1 que si (1.2) est satisfaite dans ω, alors (2.1) est vérifiée, pour tout x dans ω, avec C indépendant de x.

Démonstration du Théorème 2.1. On transporte l'inégalité (1.2) sur S_x par le difféomorphisme θ_x. On obtient qu'il existe un voisinage U de 0 dans S_x, une densité $C^\infty g(u)$ différente de zéro dans U, telle que, pour tout f dans $C_0^\infty(U)$, on ait:

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|\leqq m} &\|\theta_x^*(X_{\alpha_1}\dots X_{\alpha_k})f\|^2_{L^2_\mu(S_x)} \\ &\leqq [C\|\sum_{|\alpha|\leqq m} a_\alpha(\theta_x(u))\theta_x^*(X_{\alpha_1}\dots X_{\alpha_k})f\|^2_{L^2_\mu(S_x)} + \|u\|^2_{L^2_\mu(S_x)}]\end{aligned} \tag{2.2}$$

où μ est la mesure $g(u)\,du$ et C est la constante apparaissant dans (1.2).

Soit v dans $C_0^\infty(S_x)$, on applique l'inégalité (2.2) à $f=v\circ\delta_t$ (pour t assez grand, f aura son support dans U). En faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient l'inégalité:

$$\sum_{|\alpha|=m} \|\pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(a^\alpha)v\|^2_{L^2(S_x)} \leqq C\|\pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(P_x)v\|^2_{L^2(S_x)}, \tag{2.3}$$

où $L^2(S_x)$ est l'espace L^2 pour la mesure de Lebesgue et C est la constante apparaissant dans (1.2).

En effet, si $|\alpha|$ est égal à m, l'opérateur différentiel:

$$\theta_x^*(X_{\alpha_1}\dots X_{\alpha_k}) - \pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(a_{\alpha_1}\dots a_{\alpha_k})$$

est de degré inférieur ou égal à $(m-1)$ en 0 d'après le Théorème I, 4.1. Il en est de même pour l'opérateur

$$\sum_{|\alpha|\leqq m} a_\alpha(\theta_x(u))\theta_x^*(X_{\alpha_1}\dots X_{\alpha_k}) - \pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(P_x).$$

De plus, si A est un opérateur différentiel homogène de degré m sur S_x, on a

$$\lim_{t\to\infty} t^{-m+Q/2}\|A(v\circ\delta_t)\|_{L^2_\mu(S_x)} = \sqrt{g(0)}\,\|Av\|_{L^2(S_x)},$$

où Q désigne la dimension homogène de S_x.

(2.3) résulte alors aisément de (2.2) en utilisant les remarques précédentes et les propriétés rappelées en I, paragraphe 3.

Par ailleurs, on montre aisément l'inégalité (cf. la démonstration dans [7] du Lemme 6.2.2):

$$(2.4)\qquad \sum_{|\alpha|\leq m}\|\pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(a^\alpha)u\|^2_{L^2(S_x)} \leqq C\Big(\sum_{|\alpha|=m}\|\pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(a^\alpha)u\|^2_{L^2(S_x)}+\|u\|^2_{L^2(S_x)}\Big).$$

(2.1) résulte alors de (2.3) et (2.4).

Démonstration du Corollaire 2.2. Les champs de vecteurs $\pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(a_1), \dots, \pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(a_p)$ vérifient la condition (Hö) en un voisinage de l'origine. Le corollaire résulte alors de la Remarque 1.3.

Démonstration du Corollaire 2.3. Il suffit d'appliquer la partie condition nécessaire de la conjecture de Rockland ([13], [1]) en remarquant que $\pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(P_x)$ peut être considéré comme opérateur invariant sur le groupe ${}_{\exp\mathscr{K}_x}\backslash G$.

Remarque 2.5. L'étude de l'hypoellipticité des opérateurs $\pi_{(0,\mathscr{K}_x)}(P_x)$ fera l'objet d'un travail ultérieur, en liaison avec un récent article de Folland [4].

3. Conditions suffisantes d'hypoellipticité

On garde dans ce paragraphe les notations des paragraphes précédents.

Théorème 3.1. *On suppose que $\mathscr{K}_x=0$, i.e. que les champs X_i sont libres au sens de* [14], [10]. *Alors, si en un point x, P_x est hypoelliptique maximal dans $\mathscr{G}$, $\mathscr{P}$ est hypoelliptique maximal en x.*

Remarque 3.2. Le Théorème (3.1) est la réciproque de Corollaire 2.2.

Remarque 3.3. L. P. Rothschild vient de démontrer la réciproque du Corollaire 2.3 dans le cas de Métivier ([11], [15]).

Démonstration du Théorème 3.1. Nous ne mettons en évidence que les points nouveaux de cette démonstration qui est presque entièrement tirée de [14].

Dans le cas où $\mathscr{P}$ est formellement auto-adjoint et où l'ordre de l'opérateur $\mathscr{P}$ m est inférieur strictement à la dimension homogène du groupe libre G, le Théorème 3.1 résulte directement des considérations de [14] qui permettent de construire une paramétrixe pour $\mathscr{P}$.

Dans le cas général, on considère à la place de $\mathscr{P}$, l'opérateur:

$$\mathscr{A} = \mathscr{P}^* \mathscr{P} + \sum_{i=1}^{q} D_{t_i}^{2m}$$

défini sur $M \times \mathbf{R}^q$, où q est choisi de telle sorte que:

$$2m < Q + q,$$

où Q est la dimension homogène du groupe libre. On a $\mathscr{A}_x = P_x^* P_x + \sum_{i=1}^{q} D_{t_i}^{2m}$ et on utilise le lemme suivant, utilisé dans [7], § 6.3 (en admettant les résultats de [8]):

Lemme 3.4. *Soit P un opérateur homogène de degré m invariant à gauche sur un groupe de Lie nilpotent, gradué, simplement connexe G, alors l'opérateur $P^* P + \sum_{i=1}^{q} D_{t_i}^{2m}$ est hypoelliptique si et seulement si P est hypoelliptique.*

Remarque 3.5. Dans le cas où les champs X_i vérifient (Hö) avec r égal 2, on peut rentrer dans le cadre de [3]. Si $\sigma(X)$ désigne le symbole du champ de vecteur X, on désigne par Σ l'ensemble caractéristique défini par: $\{\varrho \in \Sigma \subset T^* M \setminus 0 \Leftrightarrow \sigma(X_i)(\varrho) = 0, i = 1, \dots, p\}$. Si on suppose que les $d\sigma(X_i)$ sont linéairement indépendantes en tout point de Σ, une réciproque du Corollaire, 2.2 résultera de [3] et [6]. Dans le cadre du rang 2, le cas de Métivier correspond au cas particulier où les $d_\xi \sigma(X_i)$ sont indépendants (où ξ désigne la variable duale de x dans une carte de M).

Un exemple d'application.

Dans le cas où $\mathscr{K}_x$ n'est pas réduit à $\{0\}$, on peut obtenir en utilisant le lifting-theorem de [14], des conditions suffisantes d'hypoellipticité. On obtient par exemple aisément le théorème suivant, qui généralise le résultat classique de L. Hörmander [9] sur l'hypoellipticité de l'opérateur: $P = \sum_{j=1}^{p} X_j^2$, et qui permet de retrouver certains résultats de [2] et [12].

Théorème 3.6. *On suppose que les champs X_i $(i = 1, \dots, p)$ vérifient* (Hö), *alors l'opérateur*

$$\mathscr{P} = \sum_{i=1}^{p} X_i^{2m}$$

est hypoelliptique.

Démonstration. Par le lifting-theorem [14], on se ramène au cas où les champs X_i sont libres. Il suffit alors de vérifier que si les $\{Y_i\}$ $(i = 1, \dots, p)$ sont les générateurs de l'algèbre de Lie du groupe libre G, l'opérateur:

$$P = \sum_{i=1}^{p} Y_i^{2m}$$

est hypoelliptique (cf. § 6.2 de [7]).

Bibliographie

1. Beals, R., *Séminaire Goulaouic—Schwartz* 1976—77 (exposé 19).
2. Bony, J. M., Unicité du problème de Cauchy et hypoellipticité pour une classe d'opérateurs différentiels, *Actes, Congrès Intern. Math.* 1970, t. 2, 691—696.
3. Boutet de Monvel, L., Grigis, A., et Helffer, B., Parametrixes d'opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques multiples, *Astérisque* **34—35**, 93—121.
4. Folland, G. B., On the Rothschild—Stein lifting theorem, *Comm. in P. D. E.,* **2** (2) (1977), 165—191.
5. Goodman, R. W., *Nilpotent Lie groups,* Lecture Notes in Maths. No 562.
6. Helffer, B., *Hypoellipticité pour des opérateurs différentiels sur des groupes de Lie nilpotents,* cours du C. I. M. E., 1977.
7. Helffer, B., et Nourrigat, J., Hypoellipticité pour des groupes nilpotents de rang de nilpotence 3, *Comm. in P. D. E.* **3** (8) (1978), 643—743.
8. Helffer, B., et Nourrigat, J., Caractérisation des opérateurs hypoelliptiques homogènes invariants à gauche sur un groupe nilpotent gradué, *Comm. in P.D.E.* **7** (8) (1979), 899.
9. Hörmander, L., Hypoelliptic second order differential equations, *Acta Math.* **119** (1967), 147—171.
10. Hörmander, L., and Melin, A., Free systems of vector fields, *Arkiv för Matematik* **16** (1) (1978).
11. Métivier, G., Fonction spectrale et valeurs propres d'une classe d'opérateurs non elliptiques, *Comm. in P. D. E.* **1** (1976), 467—519.
12. Radkevic, E. V., On a theorem of L. Hörmander, *Uspechi Mat. Nauk* **24**, 2 (1969), 233—234.
13. Rockland, C., Hypoellipticity on the Heisenberg group-representation-theoretic criteria, *Trans. of the A. M. S.,* vol. **240** (1978), 1—53.
14. Rothschild, L. P., and Stein, E. M., Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups, *Acta Mathematica* **137**, 248—315.
15. Rothschild, L. P., A criterion for hypoellipticity of operators constructed from vector fields, *Comm. in P.D.E.* **4** (6) (1979), 467—519.
16. Trèves, F., An invariant criterium of hypoellipticity, *Amer. J. Math.* **83** (1961), 645—668.
17. Unterberger, A. and J., Hölder estimates and hypoellipticity, *Ann. Inst. Fourier* **26**, 2 (1976), 35—54.

Reçu, Décembre 1, 1978

B. Helffer
Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau
91 128 Palaiseau Cedex
France

J. F. Nourrigat
Département de Mathématiques et Informatique
BP 25A
31 031 Rennes Cedex
France