

Frontière de Martin d'un domaine de \mathbf{R}^n dont le bord est inclus dans une hypersurface lipschitzienne

Nicolas Chevallier

Introduction

Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^n qui est le complémentaire d'un fermé F inclus dans une hypersurface lipschitzienne. Une inégalité démontrée par A. Ancona ([A, 3]) montre que pour étudier la frontière de Martin de Ω (associée au Laplacien), il suffit d'étudier pour chaque point M de F la dimension du cône $P_\Omega(M)$ des fonctions harmoniques positives sur Ω s'annulant sur $F \setminus \{M\}$ (et à l'infini). A. Ancona montre aussi que la dimension de $P_\Omega(M)$ est 1 ou 2 ([A, 3]). En utilisant des méthodes différentes, Benedicks a étudié le même problème lorsque F est contenu dans un hyperplan, et il a donné un critère pour déterminer la dimension de $P_\Omega(M)$ (cf. [B]). Le but de ce travail est de répondre aux trois questions suivantes :

1. Lorsque la mesure de Lebesgue $n-1$ dimensionnelle de F est strictement positive, exist-t-il un point M de F tel que $\dim P_\Omega(M)=2$?
2. Le critère de Benedicks qui détermine la dimension de $P_\Omega(M)$ lorsque F est inclus dans un hyperplan, peut-il s'étendre au cas général?
3. Si Ω' contient Ω a-t-on $\dim P_{\Omega'}(M) \equiv \dim P_\Omega(M)$ pour tous les points M de $\partial\Omega'$?

La première question a une réponse positive dans le cas général (la méthode suivie est indépendante du critère de Benedicks qui ne semble pas adapté). Par contre, on est obligé de faire des hypothèses géométriques supplémentaires pour les deux autres (ces hypothèses englobent le cas des hypersurfaces de classe C^2). Dans la plupart des démonstrations les inégalités de Harnack à la frontière, et l'évaluation de l'ordre de grandeur des minimales, jouent un rôle important. On donne aussi des exemples qui illustrent les difficultés rencontrées. Ajoutons que les nombreuses suggestions d'Ancona ont été très utiles pour parvenir aux résultats recherchés.

1. Les différentes inégalités de Harnack et leurs conséquences

Dans ce paragraphe, on rappelle d'abord les inégalités de Harnack. Puis on démontre un résultat de base sur l'effilement minimal, et enfin on obtient le caractère local de la dimension de $P_\Omega(O)$.

La formulation de ces inégalités demande quelques notations géométriques:

Soit A et O deux points \mathbf{R}^n , désignons par $T(O, A, r)$ la portion de cylindre de révolution d'axe OA et de rayon r , délimité par les hyperplans $\{M \in \mathbf{R}^n, |\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA}| = \overrightarrow{OA}^2\}$. De plus, si G est le graphe d'une fonction lipschitzienne définie sur le disque $\{M \in \mathbf{R}^n, \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA} = 0, \|\overrightarrow{OM}\| \leq r\}$ à valeurs dans la droite OA , alors pour tout fermé F de G on note $T(O, A, r) \setminus F$ par $T_F(O, A, r)$. Dans la suite on supposera toujours que O appartient à G , et que la constante de Lipschitz de f est plus petite que $\|\overrightarrow{OA}\|/2r$.

Notons A^+ le point tel que $\overrightarrow{OA^+} = \overrightarrow{OA}/2$, et A^- son symétrique par rapport à O . De plus, si O est un point de \mathbf{R}^n , et A une partie ou un point de \mathbf{R}^n , alors A' désignera dans toute la suite le symétrique de A par rapport à O (O sera en général le centre d'un cylindre).

Finalement notons $H^+(\Omega)$ l'ensemble des fonctions harmoniques positives sur un ouvert \mathbf{R} de \mathbf{R}^n .

Proposition 1-1. (Cf. [A, 3].) (Inégalités de Harnack faible.) *Soit $U = T_F(O, A, r)$, il existe une constante C ne dépendant que de $\|\overrightarrow{OA}\|/r$, et de la dimension, telle que pour toute fonction u de $H^+(U)$ s'annulant sur F on ait:*

$$\forall x \in T_F\left(O, A^+, \frac{r}{2}\right) \quad u(x) \leq C(u(A^+) + u(A^-)).$$

Preuve. Ce type d'inégalité se démontre usuellement en utilisant une technique de Carleson. Toutefois une modification est nécessaire pour pouvoir l'adapter à notre cas (Cf. [A, 3]). On peut aussi utiliser une idée de Benedicks: le caractère lipschitzien de F montre qu'il existe une fonction L définie sur U telle que toute fonction u de $H^+(U)$ vérifie $u(x) \leq (u(A^+) + u(A^-))L(x)$, et telle que l'intégrale $\int_U (\log^+ L(x))^{n-1+s} dx$ soit finie et ne dépende que de r et $\|\overrightarrow{OA}\|/r$. On remarque qu'une fonction u de $H^+(U)$ s'annulant sur F se prolonge à $T(O, A, r)$ en une fonction sousharmonique; ainsi d'après un résultat de Domar, $u(x) \leq C(u(A^+) + u(A^-))$ pour $x \in T(O, A^+, r/2)$, C étant une constante qui ne dépend que de la valeur de l'intégrale $\int_U (\log^+ L(x))^{n-1+s} dx$ (Cf. [Do]).

Proposition 1-2. (Cf. [A, 3], théorème 7.3, page 252.) (Inégalités de Harnack à la frontière.) *Sous les hypothèses de la proposition précédente, il existe une constante*

C ne dépendant que de $\|\vec{OA}\|/r$ et de la dimension, telle que pour toutes fonctions u , v et w de $H^+(U)$ s'annulant sur F on ait :

$$\forall x \in T_F\left(O, A^+, \frac{r}{2}\right), \quad u(x) \equiv C \left(\frac{u(A^+)}{v(A^+)} v(x) + \frac{u(A^-)}{w(A^-)} w(x) \right).$$

Donnons maintenant une définition précise du cône $P_\Omega(x)$: Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^n régulier pour le problème de Dirichlet. Pour $x \in \partial\Omega$ appelons $P_\Omega(x)$ le cône des fonctions harmoniques positives sur Ω , s'annulant sur $\partial\Omega \setminus \{x\}$, et majorées sur le complémentaire dans Ω d'au moins une boule de centre x par un potentiel de Ω .

La dernière condition est équivalente lorsque $n \geq 3$ à la convergence des éléments de $P_\Omega(x)$ vers 0 à l'infini. Elle est utile pour avoir, même lorsque Ω n'est pas borné, le principe du maximum suivant :

Soient $u \in P_\Omega(x)$, et v une fonction surharmonique positive sur Ω . Supposons qu'il existe un voisinage V de x tel que $v \geq u$ sur $\partial V \cap \Omega$ alors $v \geq u$ sur $\Omega \setminus V$ (V relativement compact).

Désormais, pour alléger, on supposera toujours Ω régulier bien que ce ne soit pas essentiel.

Le théorème suivant donnent les premières conséquences des inégalités précédentes sur le cône $P_\Omega(x)$:

Théorème 1. (Cf. [A, 3], théorème 2.5, page 223.) *Soit Ω un ouvert (régulier) de \mathbf{R}^n tel que $\Omega \cap T(O, A, r) = T_F(O, A, r)$ alors :*

1. $P_\Omega(O) \neq \{0\}$, et $\{u \in P_\Omega(O), u(A^+) = 1\}$ est un compact pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω (Ω est supposé connexe).
2. $\dim P_\Omega(O) \leq 2$.

Remarque. Sous les hypothèses du théorème, on peut aussi voir en utilisant les inégalités de Harnack faibles que si une suite x_n converge vers 0, et converge dans le compactifié de Martin Δ de Ω , alors sa limite est une fonction du cône $P_\Omega(0)$. On déduit ainsi du théorème précédent que le point 0 est associé à au plus 2 minimales de $H^+(\Omega)$ dans Δ . De même, on peut prouver que si une suite x_n converge vers une fonction de $P_\Omega(O)$ alors elle converge vers 0.

On appellera donc un point M de F point Martin simple ou double suivant que la dimension de $P_\Omega(M)$ vaut 1 ou 2.

Rappelons que si Ω est un ouvert de \mathbf{R}^n , ${}^\Omega R_f^A$ désigne la réduite de f sur A dans Ω (Cf. [H]). Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ouvert Ω , on note la réduite R_f^A .

On va maintenant établir deux résultats importants pour la suite. Le premier fournit des ensembles non effilés en une minimale de $P_\Omega(O)$ (Cf. [G]) pour un ouvert

Ω tel que $\Omega \cap T(O, A, r) = T_F(O, A, r)$. Sa démonstration est une variante facile d'une méthode d'Ancona ([A, 1]).

Lemme 1-3. Soient Ω un ouvert de \mathbf{R}^n tel que $\Omega \cap T(O, A, r) = T_F(O, A, r)$, et h une minimale du cône $P_\Omega(O)$. Si P_m , $m \geq 1$, est une suite de points de l'axe du cylindre $T(O, A, r)$ tendant vers O , alors la réunion des boules $B_m = B(P_m, \varepsilon \|OP_m\|)$ et des boules B'_m , $m \geq 1$, est non effilée en h , pour toute constante ε strictement positive (B'_m est la boule symétrique de B_m par rapport à O).

Le lemme signifie que si une fonction surharmonique positive est plus grande que h sur la réunion des boules B_m et B'_m , $m \geq 1$, alors elle est plus grande que h sur Ω .

Preuve du lemme. Notons Q_m les points tels que $\overline{OQ_m} = \overline{OP_m}/4$, M_m les points tels que $\overline{OM_m} = \overline{OQ_m}/2$. Il suffit de faire la démonstration pour ε assez petit. D'après les inégalités de Harnack, il existe une constante C indépendante de m telle que $h(P) \geq Ch(P_m)$ lorsque P est dans B_m , et $h(P) \geq Ch(P'_m)$ lorsque P est dans B'_m . D'autre part, grâce à une homothétie, on remarque que $R_1^{B_m}(Q_m)$ et $R_1^{B'_m}(Q'_m)$ sont supérieures à une constante C' qui ne dépend pas de m . Alors les inégalités de Harnack à la frontière montrent que :

$$\forall x \in \partial T \left(O, Q_m, \frac{r}{4} \right), \quad h(x) \geq C'' \left(\frac{h(Q_m)}{R_1^{B_m}(Q_m)} R_1^{B_m}(x) + \frac{h(Q'_m)}{R_1^{B'_m}(Q'_m)} R_1^{B'_m}(x) \right)$$

d'où

$$\begin{aligned} h(x) &\geq \frac{C''}{C'} (h(Q_m) R_1^{B_m}(x) + h(Q'_m) R_1^{B'_m}(x)) \\ &\geq \frac{C''}{C' C} \left(h(Q_m) \frac{R_h^{B_m}(x)}{h(P_m)} + h(Q'_m) \frac{R_h^{B'_m}(x)}{h(P'_m)} \right). \end{aligned}$$

Or, d'après les inégalités de Harnack, $h(Q_m)/h(P_m)$ et $h(Q'_m)/h(P'_m)$ sont majorés indépendamment de m , il existe donc une constante K strictement positive telle que pour tout $m \in \mathbf{N}$, et tout $x \in \partial T(O, Q_m, r/4)$ on ait $R_h^{B_m \cup B'_m}(x) \geq Kh(x)$. Finalement le principe du maximum montre que $R_h^{\cup_m (B_m \cup B'_m)}$ est supérieure à Kh partout, et comme h est minimale, on en déduit que la réunion $\cup_m (B_m \cup B'_m)$ est non effilée en h .

Proposition 1-4. Sous les hypothèses du lemme 1.3, l'ensemble des points de la frontière de Martin Δ de Ω adhérent à un segment vertical issu de O est réduit à une fonction minimale du cône $P_\Omega(O)$.

Démonstration. On peut supposer $\dim P_\Omega(O) = 2$. Notons h et h' les deux minimales du cône $P_\Omega(O)$. Appelons S le segment vertical issu de O ouvert en O , et

soit (P_m) une suite de points de S convergeant vers O . Soit (B_m) une suite de boules de centre P_m de rayons proportionnels à $\|\overrightarrow{OP_m}\|$ est suffisamment petit pour qu'il y ait une constante de Harnack sur B_m indépendante de m . Ainsi si une suite Q_m , $Q_m \in B_m$, converge vers h ou h' , la suite P_m converge vers la même limite. Le lemme précédent montre que la réunion $L = \bigcup_m (B_m \cup B'_m)$ n'est effilé ni en h , ni en h' . h et h' sont donc finement adhérentes à L , et ainsi par choix des boules B_m et B'_m , h et h' sont des valeurs d'adhérence de l'une des suites (P_m) et (P'_m) pour la topologie de Martin. On veut en déduire que (P_m) admet h ou h' comme valeur d'adhérence. Supposons que h' soit adhérente à la suite (P'_m) , il existe alors une sous suite (P'_{m_q}) convergeant vers h' , et donc la réunion $\bigcup_q (B'_{m_q})$ a comme seule valeur d'adhérence dans Δ le point h' , par conséquent $\bigcup_q (B'_{m_q})$ est effilé en h . Le lemme précédent montre alors que $\bigcup_q (B_{m_q})$ est non effilé en h , ainsi la suite (P_{m_q}) admet h comme valeur d'adhérence. Les points de Δ adhérent à S sont donc au plus h et h' . Or cette adhérence est connexe comme intersection décroissante de compacts connexes, elle est donc réduite à un point, à savoir h ou h' .

Conséquence et remarque. Lorsque $\dim P_\Omega(O) = 2$, le lemme et la proposition qui précèdent permettent de voir que si u et v sont deux fonctions de $H^+(\Omega)$ alors u/v converge finement en h (h étant une minimale de $P_\Omega(O)$ adhérente à S) entraîne u/v converge suivant le segment S .

Si $\dim P_\Omega(O) = 1$, on ne peut pas préciser le résultat du lemme 1.3, car il se peut qu'un « côté » du graphe soit effilé en l'unique minimale de $P_\Omega(O)$. On donnera un exemple qui illustre ce fait.

On va maintenant établir le caractère local de la dimension de $P_\Omega(O)$. Pour cela on a besoin de deux lemmes classiques.

Le premier est dû à Naïm ([N], théorème 15, page 225).

Lemme 1-6. *Soit ω un ouvert de \mathbf{R}^n , et F un fermé de ω . Si h est une minimale de $H^+(\omega)$, et si F est effilée en h alors on a :*

1. $h' = h - \hat{R}_h^F$ est une minimale de $H^+(\omega \setminus F)$ (\hat{f} est la régularisée SCI de f).
2. $A \subset \omega' = \omega \setminus F$ est effilée en h si et seulement si A est effilée en h' .

Le lemme suivant est une conséquence facile du lemme 1.9 page 221 de [A, 3].

Lemme 1-7. *Soit W un ouvert de \mathbf{R}^n greenien, et u une minimale de $H^+(W)$. Si u est bornée alors il existe une suite x_n de points de W tendant vers l'infini (de \mathbf{R}^n), et convergeant vers u dans le compactifié de Martin de W .*

Corollaire 1-8. *Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^n tel que $\Omega \cap T(O, A, r) = T_F(O, A, r)$. Les fonctions de $P_\Omega(O)$ sont non bornées au voisinage de O , et sont bornées en dehors de tout voisinage de O . (L'hypothèse de régularité faite sur $\partial\Omega$ montre que Ω est toujours greenien même si $n=2$.)*

Le corollaire précédent est évident à partir du lemme est des inégalités de Harnack faibles.

Théorème 2. Soit $U = T_F(O, A, r)$ un ouvert de \mathbf{R}^n , et Ω un autre ouvert de \mathbf{R}^n tel que $\Omega \cap T(O, A, r) = U$ alors

$$\dim P_U(O) = \dim P_\Omega(O).$$

Preuve. L'inégalité $\dim P_U(O) \cong \dim P_\Omega(O)$ est évidente grâce au lemme 1.6 et au corollaire 1.8. L'autre inégalité est plus difficile, car il n'y a pas de moyen évident pour prolonger une fonction de $P_U(O)$ en une fonction de $P_\Omega(O)$. Nous n'allons d'ailleurs pas construire un tel prolongement.

Montrons tout d'abord le résultat suivant:

Pour toutes fonctions $g \in P_\Omega(O)$ et $h \in P_U(O)$, si il existe une suite (Q_k) de points de U convergeant vers h dans le compactifié de Martin de U , et vers g dans le compactifié de Martin de Ω , alors on a $g \cong Ch$ sur U avec une constante $C > 0$.

En effet, pour tous $P \in U$ on a (G désignant la fonction de Green de Ω):

$$\frac{g(P)}{h(P)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{G_{Q_k}(P)}{G_{Q_k}(A^+)} \times \frac{G_{Q_k}(A^+) - R_{G_{Q_k}}^{\Omega \setminus U}(A^+)}{G_{Q_k}(P) - R_{G_{Q_k}}^{\Omega \setminus U}(P)} \cong \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{G_{Q_k}(A^+) - R_{G_{Q_k}}^{\Omega \setminus U}(A^+)}{G_{Q_k}(A^+)}.$$

Or d'après les inégalités de Harnack, et les inégalités de Harnack à la frontière on a pour Q assez proche de O :

$$\begin{aligned} R_{G_{A^+}}^{\Omega \setminus U}(Q) &\cong C_1(G_{A^+}(Q) - R_{G_{A^+}}^{\Omega \setminus U}(Q)) \quad \text{avec } C_1 > 0 \\ \Rightarrow \frac{G_{A^+}(Q) - R_{G_{A^+}}^{\Omega \setminus U}(Q)}{G_{A^+}(Q)} &= 1 - \frac{R_{G_{A^+}}^{\Omega \setminus U}(Q)}{G_{A^+}(Q)} \cong 1 - \frac{C_1}{1 + C_1} = C > 0 \end{aligned}$$

d'où par symétrie de la fonction de Green $g(P)/h(P) \cong C$.

Appliquons ce résultat pour prouver que $\dim P_U(O) = 2 \Rightarrow \dim P_\Omega(O) = 2$. Soient h et h' les deux minimales de $P_U(O)$ et g une minimale de $P_\Omega(O)$. D'après le lemme 1.6, $g - R_g^{\Omega \setminus U}$ est l'une des deux minimales h ou h' , par exemple h' . Dans ce cas le théorème de Fatou—Naïm montre que la limite fine de $g(P)/h(P)$ est nulle quand P tend finement vers h . Par conséquent, si (Q_k) est une suite convergeant vers h , ce qui précède montre que g ne peut pas être une valeur d'adhérence de la suite (Q_k) . Ainsi, comme (Q_k) tend vers O , (Q_k) doit nécessairement avoir une valeur d'adhérence dans $P_\Omega(O)$ autre que g , et donc $\dim P_\Omega(O) = 2$. \square

2. Le cas des angles, et exemples

Le but de ce paragraphe est de donner des exemples qui illustrent certains phénomènes un peu inattendus de la situation étudiée. Pour cela une extension partielle du critère de Benedicks sera très utile.

Plaçons nous dans \mathbf{C} et étudions la situation suivante: Soit D une demi-droite issue de 0 faisant un angle $\alpha \in]0, \pi]$ avec le demi axe réel \mathbf{R}^+ , et soit F un fermé inclus dans $D \cup \mathbf{R}^+$. Notons Ω l'ouvert $\mathbf{C} \setminus F$. Nous allons voir que pour l'ouvert Ω les résultats de Benedicks s'étendent presque complètement (le cas $\alpha = \pi$ correspond au cas traité par Benedicks).

Introduisons quelques notations:

$$D^+ = \{z \in \mathbf{C}, z = re^{i(\alpha/2)}, r > 0\}, \quad D^- = \{z \in \mathbf{C}, z = re^{i((\alpha/2) + \pi)}, r > 0\},$$

$$\Omega^+ = \{z \in \mathbf{C}, z = re^{i\theta}, r > 0, \theta \in]0, \alpha[\}, \quad h^+ \in P_{\Omega^+}(0) \setminus \{0\},$$

$$\Omega^- = \{z \in \mathbf{C}, z = re^{i\theta}, r > 0, \theta \in]\alpha, 2\pi[\}, \quad h^- \in P_{\Omega^-}(0) \setminus \{0\}.$$

$G(x, y)$ est la fonction de Green de l'ouvert Ω .

Proposition 2-1. $\dim P_{\Omega}(0) = 2 \Leftrightarrow$ il existe $h \in P_{\Omega}(0)$ tel que

$$\liminf_{z \rightarrow 0, z \in D^+} \frac{h(z)}{h^+(z)} > 0.$$

Et dans ce cas $\bar{\Omega}^-$ est effilé en la minimale de $P_{\Omega}(0)$ adhérente à D^+ .

Démonstration. Montrons la proposition dans le cas $\alpha < \pi$ (pour $\alpha = \pi$, on renvoie à [B]).

Supposons qu'il existe $h \in P_{\Omega}(0)$ telle que

$$\liminf_{z \rightarrow 0, z \in D^+} \frac{h(z)}{h^+(z)} > 0.$$

Utilisons un lemme d'Ancona:

Lemme 2-2. ([A, 2].) (Corollaire 2 page 75.) Soit U un ouvert de \mathbf{R}^n contenant la boule $B(x, r)$ ($r > 0$). Si y est un point de $\partial B(x, r) \cap \partial U$, désignons par Σ le diamètre $]y, y + 2(x - y)[$, et pour $\gamma \in]0, 1/2[$ posons $p_{\gamma} = y + \gamma(x - y)$. On a alors avec une constante C ne dépendant que de n :

$$\forall \gamma \in]0, \frac{1}{2}[, \forall Q \in \Sigma, \forall P \in U \cap \partial B(y, \gamma r), G(P, \varphi) \cong CG(P_{\gamma}, Q)$$

(G désigne la fonction de Green de l'ouvert U).

Ce lemme permet de voir que toute fonction g de $P_{\Omega}(0)$ adhérente à D^- , vérifie:

$$g(re^{i(\alpha/2)}) \cong Cg(re^{i((\alpha/2) + \pi)}).$$

Ainsi $P_\Omega(0)$ doit contenir des fonctions linéairement indépendantes de h , d'où $\dim P_\Omega(0)=2$ (on aurait pu utiliser un résultat plus simple que le lemme 2.2, mais ce lemme sera utile dans la suite).

Supposons maintenant que $\dim P_\Omega(0)=2$. En utilisant le théorème 1, page 76 et le lemme 4, page 78 de [A, 2] on peut démontrer:

Proposition 2-3. *Sous les hypothèses du lemme 2.2 on a:*

1. *Le point P_γ tend vers une unique minimale h_0 de $P_U(y)$ lorsque γ tend vers 0.*
2. *Soit E une partie de U possédant la propriété suivante: il existe des nombres ε et ϱ strictement positifs tels que pour tout z_1 de E à une distance plus petite que ϱ de y , il existe une boule $B(z_2, r)$ contenant z_1 , et incluse dans U , dont l'intersection avec $B(x, r)$ a un diamètre supérieur à ε . Alors il existe une constante $C>0$ telle que pour toute suite de points (Q_k) de E convergeant vers y et vers une fonction h du compactifié de Martin de U , on ait: $h \cong Ch_0$.*

Cette proposition montre que E est effilé en toute minimale de $H^+(U)$ différente de h_0 . Terminons la démonstration de la proposition 2.1. Soit h la minimale de $P_\Omega(0)$ adhérente à D^+ . Comme $\dim P_\Omega(0)=2$ la proposition montre que $\bar{\Omega}^-$ est effilé en h . Donc d'après le lemme 1.6 $h - R_h^{\Omega^-} \in P_{\Omega^+}(0) \setminus \{0\}$, et ainsi

$$\liminf_{z \rightarrow 0, z \in D^+} \frac{h(z)}{h^+(z)} > 0.$$

On peut maintenant étendre en partie au cas des angles le critère de Benedicks; mais remarquons d'abord que l'on peut résoudre facilement la troisième question posée dans l'introduction.

Corollaire 2-4. *Soit Ω un ouvert de \mathbf{C} défini comme au début du paragraphe (i.e. ${}^c\Omega$ est inclus dans un angle), et soit Ω' un autre ouvert contenant Ω , et dont la frontière contient 0, alors on a: $\dim P_\Omega(0) \cong \dim P_{\Omega'}(0)$.*

Preuve. Supposons $\dim P_{\Omega'}(0)=2$, d'après la proposition 2.1, $P_{\Omega'}(0)$ contient une minimale h' telle que

$$\liminf_{z \rightarrow 0, z \in D^+} \frac{h'(z)}{h^+(z)} > 0.$$

$\bar{\Omega}^-$ est effilé en h' , donc $A = \partial\Omega \setminus \partial\Omega'$ l'est aussi. Le lemme 1.6 montre alors que $h = h' - \hat{R}_h^A$, est une minimale du cône $P_\Omega(0)$. De plus comme \hat{R}_h^A est un potentiel sur l'ouvert Ω' , on a d'après le théorème de Fatou—Naim

$$\liminf_{z \rightarrow 0, z \in D^+} \frac{h(z)}{h^+(z)} > 0,$$

et donc $\dim P_\Omega(0)=2$. \square

Il nous faut maintenant définir (tout comme Benedicks) la fonction $\beta_F(M)$ pour $M \in \mathbf{R}^+ \cup e^{i\alpha} \mathbf{R}^+$.

Fixons $\gamma \in]0, 1[$ assez petit, pour $a \in \mathbf{R}^+ \cup e^{i\alpha} \mathbf{R}^+$ considérons le cylindre $T = T(a, (a + i\gamma a), \gamma|a|)$, et l'ouvert $U_a = T \setminus F$. Soit W la solution du problème de Dirichlet suivant:

$$\begin{aligned} w(z) &= 1 \quad \text{si } z \in \partial T, \quad \Delta w(z) = 0 \quad \text{si } z \in U_a. \\ &= 0 \quad \text{si } z \in F. \end{aligned}$$

Posons $\beta_F(a) = w(a)$.

Proposition 2-5.

1. $\dim P_\Omega(0) = 2 \Rightarrow \int_0^1 \frac{\beta_F(t) + \beta_F(te^{i\alpha})}{t} dt < +\infty.$
2. $\int_0^1 \frac{\beta_F(t) + \beta_F(te^{i\alpha})}{t} dt < +\infty \Rightarrow P_\Omega(0)$ contient une minimale du même ordre

de grandeur que h^- sur D^- , c'est-à-dire que

$$\lim_{z \in D^-, z \rightarrow 0} \frac{h(te^{i(\alpha/2 + \pi)})}{h^-(te^{i(\alpha/2 + \pi)})} > 0.$$

Remarque. Si $\alpha = \pi$, les propositions 2.1 et 2.5 montrent:

$$\int_0^1 \frac{\beta_F(t) + \beta_F(te^{i\alpha})}{t} dt < +\infty \Leftrightarrow \dim P_\Omega(0) = 2.$$

On retrouve ainsi le critère de Benedicks.

Preuve (abrégée): Pour le 1., il suffit d'écrire l'expression explicite du noyau de Poisson de Ω^+ , et d'employer la proposition 2.1. Le 2. se fait en remarquant que l'idée de la démonstration de Benedicks s'applique à notre cas grâce au lemme 2.2, et à l'expression explicite du noyau de Poisson de Ω^- .

Donnons un exemple où une évaluation de β_F est possible.

Lemme 2-6. *Supposons Ω de la forme suivante: $\Omega = \mathbf{C} \setminus F$ avec $F = (e^{i\alpha} \mathbf{R}^+) \cup (\mathbf{R} \setminus \bigcup_n]t_n - \alpha_n t_n, t_n])$ où (t_n) est suite de réels positifs vérifiant $t_n \cong 2t_{n+1}$, alors:*

$$\int_0^1 \frac{\beta_F(t) + \beta_F(te^{i\alpha})}{t} dt < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \alpha_n^2 < +\infty.$$

Preuve. Remarquons d'abord que dans la définition de $\beta_F(x)$ on peut remplacer le cylindre $T(x, x + i\gamma x, \gamma|x|)$ par la boule $B(x, \gamma|x|)$ sans changer l'ordre de grandeur de la fonction $\beta_F(x)$. Evaluons donc $\beta_F(x)$ dans ce cas là, et en supposant $\gamma \leq 1/4$.

D'après les différentes inégalités de Harnack il existe une constante $C > 0$ telle que pour α_n assez petit on ait :

$$\forall t \in]t_n(1 - \alpha_n), t_n[\quad \beta_F(t) \cong C \beta_F(t_n(1 - \alpha_n/2))$$

et

$$\forall t \in \left] t_n \left(1 - \frac{3}{4} \alpha_n \right), t_n \left(1 - \frac{1}{4} \alpha_n \right) \right[\quad \beta_F(t) \cong \frac{1}{C} \beta_F(t_n(1 - \alpha_n/2)).$$

Il suffit donc d'estimer $\beta_F(t_n(1 - \alpha_n/2))$. Pour cela, on peut utiliser une transformation conforme qui envoie $B(0, R) - \{x \in \mathbb{R}, |x| \geq r\}$ sur $B(0, 1)$ ($R > r > 0$). On trouve finalement :

$$B_F(t_n(1 - \alpha_n/2)) = \frac{2}{\pi} \text{Arc sin} \left(\frac{2\gamma(t_n(1 - \alpha_n/2))\alpha_n/2 \cdot t_n}{t_n^2(\alpha_n^2/4 + (1 - \alpha_n/2)^2)} \right) = A(\alpha_n + O(\alpha_n^2)) \quad (A > 0)$$

d'où avec des constantes C' et $C'' > 0$ on a :

$$C' \sum_{n \geq n_0} \alpha_n (\alpha_n + O(\alpha_n^2)) \cong \int_{-1}^1 \frac{\beta_F(t) + \beta_F(e^{i\alpha})}{t} dt \cong C'' \sum_{n \geq n_0} \alpha_n (\alpha_n + O(\alpha_n^2)). \quad \square$$

Corollaire 2-7. *Sous les hypothèses du lemme 2.6, on a avec $\alpha = \pi$:*

$$\dim P_\Omega(0) = 2 \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \alpha_n^2 < +\infty.$$

On peut maintenant facilement construire des exemples.

1. Cherchons un ouvert Ω tel que $\Omega \cap T(0, A, r) = T_F(0, A, r)$ vérifiant :

$$\dim P_\Omega(0) = 1$$

si Ω^+ est l'ensemble des points de $T_F(0, A, r)$ au-dessus du graphe, alors Ω^+ est effilé en l'unique minimale de $P_\Omega(0)$ (cf. conséquence et remarque § 1).

Prenons ${}^c\Omega$ de la forme $(e^{i\alpha} \mathbb{R}^+) \cup (\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \geq 0}]t_n - \alpha_n t_n, t_n[)$ avec $t_n = 2^{-2^n}$ et $\alpha_n = a / |\log t_n|$, $a > 0$. Le lemme 2.6 et la proposition 2.5 prouvent que $P_\Omega(0)$ contient une minimale h du même ordre de grandeur que h^- sur D^- (voir les notations du début du paragraphe) ce qui montre que $h \neq {}^\Omega R_h^+$. Ω^+ est donc effilé en h . Montrons maintenant que si $\alpha < \pi$, $\dim P_\Omega(0) = 1$ pour un choix convenable de a . Il suffit de prouver que $P_\Omega(0)$ ne contient pas de fonction g telle que

$$\lim_{z \rightarrow 0, z \in D^+} \frac{g(z)}{h^+(z)} > 0.$$

Soit $g \in P_\Omega(0)$, on a $g(t_n e^{i(\alpha/2) + \pi}) \cong C t_n^{-\pi/(2\pi - \alpha)}$. Les inégalités de Harnack montrent

qu'il existe une constante A indépendante de a et de n telle que

$$g(t_n e^{i\frac{\alpha}{2}}) \cong A^{|\log t_n|/a} g(t_n e^{i(\frac{\alpha}{2} + \pi)}) \cong A^{|\log t_n|/a} \times C t_n^{-\pi/(2\pi - \alpha)} = C t_n^{-\left[\frac{\log A}{a} + \frac{\pi}{2\pi - \alpha}\right]}.$$

Or si a est assez grand $\frac{\log A}{a} + \frac{\pi}{2\pi - \alpha} < \frac{\pi}{\alpha}$, donc

$$\lim_{z \in D^-, z \rightarrow 0} \frac{g(z)}{h^+(z)} = 0.$$

Finalement on a prouvé que pour a assez grand $\dim P_\Omega(0) = 1$, et que Ω^+ est effilé en l'unique minimale de $P_\Omega(0)$.

2. Illustrons les difficultés d'une démonstration éventuelle du corollaire 2.4 dans le cas général par deux exemples.

a) Soit F un fermé de \mathbb{C} inclus dans la réunion de trois demi-droites de sommet 0. En utilisant de nouvelles inégalités de Harnack à la frontière analogues à celles du paragraphe 1 (proposition 1.2) on peut prouver que $\dim P_{\mathbb{C} \setminus F}(0) \leq 3$; a-t-on $F' \subset F \Rightarrow \dim P_{\mathbb{C} \setminus F'}(0) \leq \dim P_{\mathbb{C} \setminus F}(0)$? Donnons un exemple qui contredit cette inégalité. Il suffit de prendre

$$F' = \mathbb{R} \setminus \bigcup_n \left[2^{-2^n} \left(1 - \frac{1}{n} \right), 2^{-2^n} \right] \cup \left[2^{-2^n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right), -2^{-2^n} \right] \text{ et } F = F' \cup i\mathbb{R}^+.$$

Grâce à la proposition 2.3 on voit que les vérifications sont analogues à celles de l'exemple précédent.

b) Soit \mathcal{C} un cône de la forme $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}, z = r e^{i\theta}, r \geq 0, \theta \in]\alpha, \pi]\}$ avec $\alpha \in]\pi/2, \pi]$. En reprenant la méthode de l'exemple précédent on peut trouver un fermé $F \subset \mathbb{R}$ tel que $\dim P_{\mathbb{C} \setminus F}(0) = 2$ et $\dim P_{\mathbb{C} \setminus (F \cup \mathcal{C})}(0) = 1$.

3. Le graphe est compris entre deux boules tangentes

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , nous dirons que Ω vérifie la propriété (*) si 1°) Ω est de la forme $T_F(O, A, r)$ 2°) il existe t_0 strictement positif tel que $B(A_{t_0}, t_0)$ et $B(A'_{t_0}, t_0)$ sont inclus dans Ω , A_t désignant le point de l'axe OA tel que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA_t} = t \|\overrightarrow{OA}\|$ (on rappelle que A' est le symétrique de A par rapport à O).

Théorème 3. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n vérifiant la propriété (*), on a alors:

1. Si une minimale h de $P_\Omega(O)$ vérifie $h(A_t) \cong C/\|OA_t\|^{n-1}$, alors $P_\Omega(O)$ contient deux minimales indépendantes, et h est adhérente au segment $[A_{t_0}, 0]$.

2. Si $P_\Omega(O)$ contient deux minimales indépendantes h et h' , alors $h(A_t) \cong C/\|\overrightarrow{OA_t}\|^{n-1}$ et $h'(A'_t) \cong C/\|\overrightarrow{OA'_t}\|^{n-1}$ (h étant adhérente à $]O, A_{t_0}]$ et h' à $[A'_{t_0}, O]$) de plus $\Omega \setminus B'(A_{t_0}, t_0)$ est effilé en h' , et $\Omega \setminus B(A_{t_0}, t_0)$ est effilé en h .

Démonstration. 1. Supposons que $P_\Omega(O)$ contienne une seule minimale h , et utilisons un résultat d'Ancona ([A, 2], lemme 4, page 78):

Proposition 3-1. *Sous les hypothèses du lemme 2.2, on a: Soit h_0 l'unique minimale adhérente au segment $[x, y]$, et soit (γ_m) une suite de réels strictement positifs tendant vers 0. Alors pour tout ε strictement positif, la réunion pour tous les m des boules $B(P_{\gamma_m}, \varepsilon\gamma_m)$ est non effilée en h_0 .*

On voit grâce cette proposition que $\Omega \setminus B(A_{t_0}, t_0)$ et $\Omega \setminus B(A'_t, t_0)$ sont non effilés en h . h est donc la solution d'un problème de Dirichlet sur chacune des boules $B(A_{t_0}, t_0)$ et $B(A'_t, t_0)$, et ainsi on doit avoir $h(A_t) \in \sigma(\|OA_t\|^{1-n})$ et $h(A'_t) \in \sigma(\|OA'_t\|^{1-n})$.

2. Supposons que $P_\Omega(O)$ contienne deux minimales indépendantes h et h' , h étant adhérente à $]O, A_0]$ et h' à $]O, A'_0]$. D'après le corollaire 2.2, $B(A_{t_0}, t_0)$ est effilé en h' , donc $g_1 = h' - {}^\Omega R_h^{B(A_{t_0}, t_0)}$ est une minimale de l'ouvert $U = \Omega \setminus B(A_{t_0}, t_0)$ qui a les mêmes ensembles effilés que h' (cf. lemme 1.6). On peut construire g_1 d'une autre manière permettant de déterminer son ordre de grandeur.

Soit g la minimale de $W = \mathbf{R}^n \setminus B(A_{t_0}, t_0)$ associée à O . Comme le complémentaire de Ω est compris entre les deux boules $B(A_{t_0}, t_0)$ et $B(A'_t, t_0)$, il est effilé en g , et donc $g_2 = g - {}^W R_g^{C_\Omega}$ est une minimale de U . D'après la proposition 3.1 et le lemme 1.6, les ensembles de la forme $\bigcup_m B(A_{t_m}, \varepsilon t_m)$ avec t_m tendant vers 0 et $\varepsilon > 0$, sont non effilés en g_1 et g_2 , g_1 et g_2 doivent donc être proportionnelles. On termine la démonstration en remarquant que $\lim_{t \rightarrow 0} g_2(A_t) t^{n-1} > 0$.

Corollaire 3-1. *Soit $\Omega = T_F(O, A, r)$ un ouvert vérifiant la propriété (*) et soit $\Omega' = T_{F'}(O, A, r)$ un ouvert contenant Ω , alors $\dim P_\Omega(O) \cong \dim P_{\Omega'}(O)$.*

Preuve. Le théorème 3 montre que $F \setminus F'$ est effilé en toute minimale de $P_{\Omega'}(O)$. Par suite si h est une minimale de $P_{\Omega'}(O)$, $h - {}^\Omega R_h^{F \setminus F'}$ est une minimale de $P_\Omega(O)$, et donc $\dim P_\Omega(O) \cong \dim P_{\Omega'}(O)$.

Le critère de Benedicks.

Nous allons donner pour les ouverts Ω vérifiant la propriété (*), un critère utilisant la mesure harmonique de leurs bords, pour savoir si $\dim P_\Omega(O) = 1$ ou 2. Ce critère généralise celui que Benedicks avait démontré pour les ouverts dont le bord est inclus dans un hyperplan.

Pour les points M de la sphère $\partial B(A_{t_0}, t_0)$ définissons la fonction $\beta_F(M)$:

Appelons P_M la projection orthogonale de M sur l'hyperplan perpendiculaire à \vec{OA} passant par O . Fixons $\alpha \in]0, 1[$, et soit Q_M le point tel que $\|\vec{P}_M \vec{Q}_M\| = \alpha \|\vec{OP}_M\|$ et $\|\vec{P}_M \vec{Q}_M\| \|\vec{OA}\| = \vec{P}_M \vec{Q}_M \cdot \vec{OA}$. Sur l'ouvert $U_M = T(P_M, Q_M, \alpha \|\vec{OP}_M\|) \setminus F$ con-

sidérons le problème de Dirichlet suivant:

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in F \\ 1 & \text{si } x \in \partial T(P_M, Q_M, \alpha \|\overrightarrow{OP_M}\|), \\ \Delta w(x) = 0 & \text{si } x \in U_M. \end{cases}$$

Posons $\beta_F(M) = w(M)$.

Théorème 4. Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^n vérifiant la propriété (*) alors:

$$\dim P_\Omega(O) = 2 \Leftrightarrow \int_{\partial B(A_{t_0}, t_0)} \frac{\beta_F(M)}{\|\overrightarrow{OM}\|^{n-1}} d\sigma(M) < +\infty$$

($d\sigma$ désigne la mesure de surface de la sphère $\partial B(A_{t_0}, t_0)$).

Démonstration. Dans toute la démonstration on notera par C les constantes qui interviennent, C peut donc changer de valeur d'une ligne à l'autre.

La convergence de l'intégrale de l'énoncé ne dépend que des points M proches de O , on supposera donc implicitement dans la suite $\|\overrightarrow{OM}\|$ assez petit lorsque ce sera nécessaire.

Montrons que

$$\int_{\partial B(A_{t_0}, t_0)} \frac{\beta_F(M)}{\|\overrightarrow{OM}\|^{n-1}} d\sigma(M) < +\infty \Rightarrow \dim P_\Omega(O) = 2.$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que l'intégrale converge, et que $\dim P_\Omega(O) = 1$.

Pour simplifier l'écriture, notons A_M le point $A_{\|\overrightarrow{OM}\|}$. Soit h un élément non nul de $P_\Omega(O)$, utilisons la fonction $\beta_F(M)$ pour évaluer $h(M)$ lorsque M appartient à $\partial B(A_{t_0}, t_0)$. D'après les inégalités de Harnack faibles et le principe du maximum on a:

$$h(M) \leq C \beta_F(M) [h(A_M) + h(A'_M)].$$

D'après le lemme 2.1 et en utilisant le fait que h est adhérente au segment $[A_{t_0}, O]$ ($\dim P_\Omega(O) = 1$), on voit que:

$$\forall t \in \left] 0, \frac{t_0}{2} \right[\quad h(A'_t) \leq Ch(A_t).$$

Ainsi on obtient

$$(1) \quad h(M) \leq C \beta_F(M) h(A_M).$$

Le noyau de Poisson permet d'estimer $h(A_t)$:

$$(2) \quad \begin{aligned} h(A_t) &= C \int_{\partial B(A_{t_0}, t_0)} \frac{t_0^2 - (t_0 - t)^2}{\|\overrightarrow{A_t M}\|^n} h(M) d\sigma(M) \\ &\leq C \int_{\partial B(A_{t_0}, t_0)} \frac{t \beta_F(M) h(A_M)}{\|\overrightarrow{A_t M}\|^n} d\sigma(M). \end{aligned}$$

Réutilisons l'hypothèse $\dim P_\Omega(O)=1$, le théorème 3 montre que $h(A_t) \in \sigma(t^{1-n})$; donc on peut trouver une suite t_k tendant vers 0 telle que pour tout $t \in]0, t_k]$ on ait:

$$(3) \quad h(A_t) \cong t_k^{n-1} h(A_{t_k}) t^{1-n}.$$

D'après (2) on a:

$$(4) \quad h(A_{t_k}) \cong C \int_{\partial B(A_{t_k}, t_0)} t_k \beta_F(M) \frac{h(A_M)}{\|A_{t_k} \vec{M}\|^n} d\sigma(M) \cong C \left(\int_{\|\vec{OM}\| \cong t_k} + \int_{\|\vec{OM}\| \leq t_k} \right).$$

Majorons séparément les deux intégrales:

* Comme $h(A_{t_k}) \cong Ch(A'_{t_k})$ on a d'après les inégalités de Harnack faibles et le principe du maximum,

$$h(A_t) \cong Ch(A_{t_k}) \quad \text{pour } t \cong t_k.$$

D'où:

$$(5) \quad \int_{\|\vec{OM}\| \cong t_k} \cong Ch(A_{t_k}) \int t_k \frac{\beta_F(M)}{\|A_{t_k} \vec{M}\|^n} d\sigma(M) \\ \cong Ch(A_{t_k}) \int_{\|\vec{OM}\| \cong t_k} \frac{t_k}{\|\vec{OM}\|} \times \frac{\beta_F(M)}{\|\vec{OM}\|^{n-1}} d\sigma(M).$$

Or pour M fixé $t_k/\|\vec{OM}\|$ tend vers 0 quand t_k tend vers 0, donc d'après le théorème de convergence dominée on a:

$$(6) \quad \lim_{t_k \rightarrow 0} \int_{\|\vec{OM}\| \cong t_k} t_k \frac{\beta_F(M)}{\|\vec{OM}\|^n} d\sigma = 0.$$

* Utilisons l'inégalité (3), on obtient:

$$\int_{\|\vec{OM}\| \cong t_k} \cong C \int_{\|\vec{OM}\| \cong t_k} h(A_{t_k}) \frac{\|\vec{OM}\|^{1-n} t_k^{n-1} t_k \beta_F(M)}{\|A_{t_k} \vec{M}\|^n} d\sigma(M) \\ \cong Ch(A_{t_k}) \int_{\|\vec{OM}\| \cong t_k} \frac{\beta_F(M)}{\|\vec{OM}\|^{n-1}} d\sigma(M)$$

or

$$\lim_{t_k \rightarrow 0} \int_{\|\vec{OM}\| \cong t_k} \frac{\beta_F(M)}{\|\vec{OM}\|^{n-1}} d\sigma(M) = 0 \text{ car } \int \frac{\beta_F(M)}{\|\vec{OM}\|^{n-1}} d\sigma(M) < \infty.$$

Par suite à l'aide de (4), (5) et (6), on obtient:

$$h(A_{t_k}) \cong S_k h(A_{t_k}),$$

S_k étant une suite qui tend vers 0. Cette dernière inégalité est fautive dès que $S_k < 1$ et $h(A_{t_k}) > 0$ ce qui achève notre raisonnement par l'absurde.

Il nous reste à voir que

$$\int_{\partial B(A_{t_0}, t_0)} \frac{\beta_F(M)}{\|\vec{OM}\|^{n-1}} d\sigma(M) = +\infty \Rightarrow \dim P_\Omega(O) = 1.$$

Comme précédemment raisonnons par l'absurde et supposons que $\dim P_\Omega(O) = 2$. Soit h la minimale de $P_\Omega(O)$ adhérente à $[A_{t_0}O, [$. La formule de la moyenne montre que

$$(8) \quad h(A_{t_0}) \cong C \int_{\partial B(A_{t_0}, t_0)} h(M) d\sigma(M).$$

Evaluons $h(M)$ à l'aide de $\beta_F(M)$:

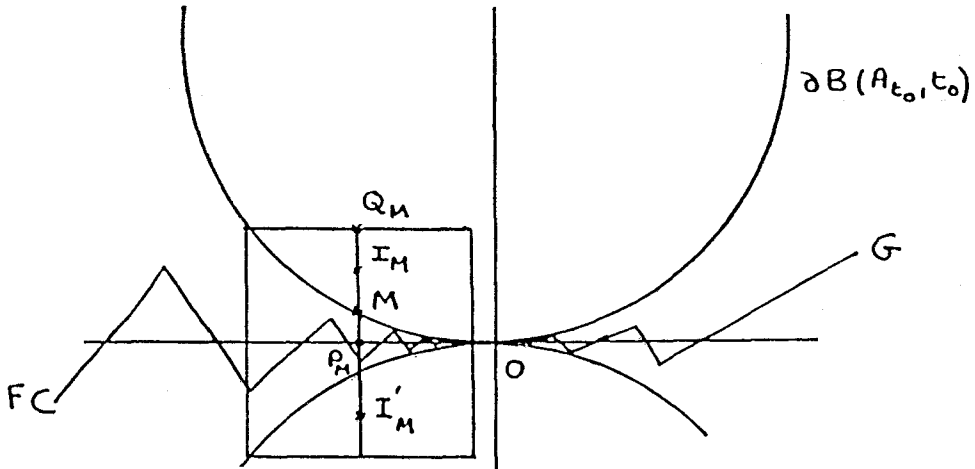
* D'après le théorème 3, on a

$$(9) \quad h(A_t) \cong \frac{C}{t^{n-1}}.$$

* Notons $\beta'_F(M)$ la mesure harmonique en M , dans l'ouvert U_M , de la face supérieure du cylindre $T(P_M, Q_M, \alpha \|\vec{OP}_M\|)$ on a:

Lemme. $\frac{1}{C} \beta_F(M) \cong \beta'_F(M).$

Preuve du lemme. Soit I_M le milieu de $[P_M, Q_M]$, et soit I'_M le symétrique de I_M par rapport à P_M . Grâce aux inégalités de Harnack à la frontière, on voit que le lemme se ramène à montrer l'inégalité suivante $G(M, I_M) \cong CG(M, I'_M)$ où G est la fonction de Green de U_M . Or cette inégalité est une conséquence du lemme 2.2, ce qui prouve le lemme.



Ainsi d'après le lemme et l'inégalité (9) on a

$$h(M) \cong C \frac{\beta_F(M)}{\|\vec{OM}\|^{n-1}}$$

et donc l'inégalité (8) prouve que :

$$h(A_{t_0}) \cong C \int \frac{\beta_F(M)}{\|OM\|^{n-1}} d\sigma(M) = +\infty.$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

Remarque. Tous les résultats du paragraphe sont valables dans le cas où F est contenu dans une hypersurface de classe C^2 , car l'ouvert complémentaire de F vérifie la propriété (*).

4. Existence du point Martin double, relation avec les mesures de Hausdorff

Notre but est de trouver une condition simple sur la taille du fermée F définissant $\Omega = T_F(0, A, r)$ pour qu'au moins en un point M de F on ait $\dim P_\Omega(M) = 2$. Examinons tout d'abord deux exemples.

1°) L'ensemble de Cantor

Appelons K l'ensemble triadique de Cantor, et soit Ω l'ouvert $\mathbb{C} \setminus K$. En tout point M de K on peut trouver une suite de couronnes $C_n = \{P \in \mathbb{C}, \lambda r_n \leq d(M, P) \leq r_n\}$ avec $\lambda \in]0, 1[$, dont les rayons tendent vers 0, et incluses dans Ω . Les inégalités de Harnack montrent alors que $\dim P_\Omega(M) = 1$ en tout M de K .

En généralisant la construction de l'ensemble triadique de Cantor, on voit que pour tout $\alpha < 1$ on peut trouver un fermé $F \subset \mathbb{R}$ de dimension de Hausdorff supérieur à α , dont tous les points sont des points Martin simples de l'ouvert $\mathbb{C} \setminus F$.

2°) Point de densité simple

Prenons $F = \mathbb{R} \setminus \left\{ \bigcup_{n \geq 1} \left[2^{-n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right), 2^{-n} \right] \right\}$, 0 est un point de densité de F pour la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . La proposition 2.6, et le lemme 2.7 montre que $\dim P_{\mathbb{C} \setminus F}(0) = 1$.

Existence de point Martin double

Dans tout ce qui suit nous allons faire les hypothèses suivantes :

- $U = T_F(O, A, r)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n
- le fermé F est inclus dans le cylindre moitié $T(O, A^+, r/2)$
- le fermé F est de mesure de Hausdorff $n-1$ dimensionnelle strictement positive.

Notre but est de voir que F contient au moins un point Martin double, ou ce qui revient au même, un point M tel que $\dim P_U(M) = 2$.

Appelons Δ la frontière de Martin de U , les inégalités de Harnack faibles, et le fait que les minimales de $H^+(U)$ ne sont pas bornées (lemme 1.7), montrent qu'il existe une application j continue de Δ dans ∂U qui à chaque fonction h de Δ associe l'unique point M de ∂U au voisinage duquel h n'est pas bornée ($h \in P_U(M)$). On remarque alors que la mesure harmonique sur ∂U est obtenue en prenant l'image par j de la mesure μ (définie sur Δ_1) qui représente la fonction 1.

Notons U^+ l'ouvert constitué des points de $T_F(O, A, r)$ au-dessus du graphe G , et μ^+ la mesure harmonique de U^+ . De même, notons U^- les points de $T_F(O, A, r)$ au-dessous du graphe G , et μ^- la mesure harmonique de U^- .

Dans ce qui suit la mesure de Lebesgue désigne la mesure de Lebesgue du graphe G supportant F . Nous allons voir que tout compact K de F de mesure de Lebesgue strictement positive, contient au moins un point Martin double. Un résultat de Dahlberg nous apprend que sur K la mesure de Lebesgue, et la mesure harmonique de U^+ ou U^- sont équivalentes. Ainsi les mesures harmoniques de U^+ et U^- sont équivalentes sur K , et comme elles sont plus petites que la mesure harmonique de U , le théorème de Radon—Nikodym montre qu'il existe un borélien de mesure strictement positive sur lequel elles sont toutes les trois équivalentes. La régularité des mesures permet de supposer que ce borélien est un compact K' inclus dans K . On va maintenant prouver que K' contient au moins un point Martin double.

Lemme 4-1. *Dans U^+ ou U^- , si une fonction harmonique positive admet une limite fine en une minimale h , elle admet une limite non tangentielle au point de la frontière naturelle correspondant à h .*

Preuve. Cf. Hunt et Wheeden, ou Ancona [A, 1].

Raisonnons par l'absurde et supposons que K' ne contienne que des points martin simples.

Pour M et F notons C_M^+ le cône

$$\left\{ P \in U^+, \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{OA} \cong \frac{k' \|\overrightarrow{MP}\| \|\overrightarrow{OA}\|}{\sqrt{1+k'^2}}, \|\overrightarrow{MP}\| \cong \frac{\|\overrightarrow{MA}^+\|}{2(1+k)} \right\}$$

où $k' > k$ (k étant la constante de Lipschitz du graphe G).

Lemme 4-2. $\{M \in K', {}^U R_{j^{-1}(M)}^{C_M^+} = j^{-1}(M)\}$ est un borélien.

Démonstration. Normalisons toutes les minimales de $H^+(U)$ au point A^+ , les cônes C_M^+ ne rencontrent pas A^+ par suite C_M^+ est effilé en $j^{-1}(M)$ si et seulement si ${}^U R_{j^{-1}(M)}^{C_M^+}(A^+) < 1$. Il suffit donc de prouver que l'application qui à M associe

${}^u R_{j^{-1}(M)}^{C_M^+}(A^+)$ est borélienne. Pour un entier n , notons

$$C_M^n = \left\{ P \in U^+, \|\overrightarrow{MP}\| \cong \frac{\|\overrightarrow{MA^+}\|}{2(1+k)} \text{ et } \exists P' \in C_M^+, P = P' + \frac{1}{n} \overrightarrow{OA} \right\}.$$

On a

$${}^u R_{j^{-1}(M)}^{C_M^+} = \sup_n {}^u R_{j^{-1}(M)}^{C_M^n}.$$

Sous nos hypothèses l'application qui à M associe $j^{-1}(M)$ est continue pour la topologie naturelle de F , et la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de U . Par suite l'application M donne $R_{j^{-1}(M)}^{C_M^n}(A^+)$ est continue de F dans \mathbf{R} , ce qui montre que $R_{j^{-1}(M)}^{C_M^+}(A^+)$ est une application SCI donc borélienne.

Appelons K^+ l'ensemble des points M de K' tels que C_M^+ soit non effilé en $j^{-1}(M)$, et K^- l'ensemble des points M de K' tels que C_M^- soit non effilé en $j^{-1}(M)$

$$\left(C_M^- = \left\{ P \in U^-, -\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{OA} \cong \frac{k' \|\overrightarrow{MP}\| \|\overrightarrow{OA}\|}{\sqrt{1+k'^2}}, \|\overrightarrow{MP}\| \cong \frac{\|\overrightarrow{MA^+}\|}{2(1+k)} \right\} \right).$$

Le lemme 4.2 montre que K^+ et K^- sont des boréliens, et le lemme 1.3 montre que $K' = K^+ \cup K^-$. Par régularité il résulte que K^+ ou K^- contient un compact L de mesure strictement positive (il s'agit de μ^+ , μ^- et μ), par exemple K^- . Construisons maintenant à l'aide de L une fonction harmonique f qui vérifie des propriétés contradictoires.

Soit g la fonction solution du problème de Dirichlet suivant.

$$g(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in L \\ 0 & \text{si } z \in \partial U^+ \setminus L \end{cases} \quad \Delta g(z) = 0 \quad \text{si } z \in U^+.$$

g est une fonction harmonique non nulle sur U^+ , car L est de mesure strictement positive. Prolongeons g à $T_F(0, A, r) = U$ en posant $g(z) = 0$ si $z \in U^-$, on obtient ainsi une fonction sous-harmonique non nulle g sur U . g est comprise entre 0 et 1. Le choix de L montre que $\underline{\lim}_{x \rightarrow h} g(x) = 0$ finement pour presque toute fonction harmonique minimale h de $H^+(U)$. Le théorème de décomposition de Riesz montre qu'il existe un potentiel p de l'ouvert U tel que $f = g + p$ soit une fonction harmonique positive sur U , et tel que f soit comprise entre 0 et 1. Le théorème de Fatou—Naïm montre que $\underline{\lim}_{x \rightarrow h} f(x) = 0$ finement μ presque partout. La fonction f doit donc être nulle ce qui contredit le fait que g est non nulle. On a ainsi montré que K contient au moins un point Martin double. Il reste à voir que l'ensemble des points Martin doubles est borélien, et on aura prouvé que presque tous les points de F sont doubles. Or:

Lemme 4-3. Soit Ω un ouvert greenien de \mathbf{R}^n , alors l'ensemble des points de $\partial\Omega$ qui sont simples dans la frontière de Martin de Ω (c'est-à-dire l'ensemble des

points M tels que toute suite (M_n) de points de Ω convergeant naturellement vers M , converge aussi vers une unique limite dans la frontière de Martin) est un borélien.

Le lemme résulte simplement du fait le compactifié de Martin de Ω est métrisable.

En fin de compte on a démontré:

Théorème 5. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n tel que $\Omega \cap T(O, A, r) = T_F(O, A, r)$. Supposons que F soit de mesure de Hausdorff $n-1$ dimensionnelle strictement positive, alors pour presque tout point M de F on a $\dim P_\Omega(M) = 2$ (presque partout fait référence à la mesure de Hausdorff $n-1$ dimensionnelle).

Corollaire. Sous les hypothèses du théorème 5, toute fonction harmonique positive admet des limites finies presque partout sur F suivant les cônes C_M^+ et C_M^- .

Corollaire. Sous les mêmes hypothèses, on peut résoudre le problème de Dirichlet suivant.

Soit f^+ et f^- deux fonctions boréliennes bornées sur F , alors il existe une fonction harmonique bornée sur Ω telle que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow z} f(x) &= 0 \quad \text{pour tout } z \in \partial\Omega \setminus F \\ \lim_{x \rightarrow z, x \in C_z^+} f(x) &= f^+(z) \quad \text{presque partout sur } F \\ \lim_{x \rightarrow z, x \in C_z^-} f(x) &= f^-(z) \quad \text{presque partout sur } F \end{aligned}$$

(NB: la fonction f n'est en général pas unique).

Bibliographie

- A, 1. ANCONA, A., Principe de Harnack à la frontière et le théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine Lipschitzien, *Ann. Inst. Fourier* **28** (1978), 163—213.
- A, 2. ANCONA, A., Une propriété de la compactification de Martin d'un domaine euclidien, *Ann. Inst. Fourier* **29** (1979), 71—90.
- A, 3. ANCONA, A., Régularité d'accès des bouts et frontière de Martin d'un domaine euclidien, *J. Math. Pures et Appl.* **63** (1984), 215—260.
- B. BENEDICKS, M., Positive harmonic functions vanishing on the boundary of certain domains in \mathbb{R}^n , *Ark. Mat.* **18** (1980), 53—72.
- DO. DOMAR, Y., On the existence of a largest subharmonic minorant of a given function, *Ark. Mat.* **3** (1957), 429—440.
- G. GOWRISANKARAN, K., Fatou—Naïm—Doob theorems in the axiomatic system of Brelot, *Ann. Inst. Fourier* **16** (1966), 455—467.
- H. HELMS, L. L., *Introduction to potential theory*, Wiley, New York—London—Sydney, 1963.

- N NAIM, L., Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel, *Ann. Inst. Fourier* **7** (1957), 183—283.
- DA DAHLBERG, B., Estimates of harmonic measure, *Arch. Rational Mech. Anal.* **65** (1977), 275—288.

*Reçu le 5 mai 1986,
révisé en avril et en septembre 1987*

Nicolas Chevallier
Unité Associée 757
Analyse Harmonique
Université du Paris-Sud
Mathématiques (Bât. 425)
F—91504 Orsay
France

Nouvelle adresse:
Université de Haute Alsace
Faculté des sciences et techniques
4 rue des Frères Lumière
F—968093 Mulhouse
France