Dualité dans les espaces de Bergman

Bernard Coupet

Nous caractérisons le dual des espaces de Bergman $B^{1,s}$ à poids associés à un domaine strictement pseudo-convexe de classe C^3 dans $\mathbf{C}^n$ et celui des espaces B^p pour p inférieur à un.

Dans le cas de la boule unité de $\mathbf{C}^n$, le dual de $B^{1,s}$ s'identifie, pour tout réel s strictement supérieur à -1, à l'espace de Bloch $\mathscr{B}$, la dualité induite sur $B^{2,s}$ étant la dualité naturelle et d'espace de Hilbert. D. Bekollé a généralisé ce résultat pour des domaines de Siegel [2].

Si on se place sur un domaine strictement pseudo-convexe, le dual de $B^{1,s}$ s'identifie aussi à l'espace de Bloch pour $s=0$ d'après [11] et [5] et pour s entier naturel d'après [10]. Il est donc naturel de se demander si ce résultat subsiste pour tout s. Ce travail traite de ce problème et apporte une réponse positive.

La méthode suivie est analogue à celle de [5] et [11]. L'idée est d'exprimer la projection orthogonale P_s sur $B^{2,s}$ en fonction d'un projecteur oblique P comme dans [5], [7], [9] et [11]. Pour appliquer cela à la dualité, il est nécessaire de savoir que $P-P^*$ définit un endomorphisme compact de L^∞.

Le plus simple pour construire P serait d'utiliser les projecteurs construits à partir des formules de représentation avec poids d'Anderson—Berndtsson [1] comme dans [4]. Malheureusement ces derniers ne conviennent pas, $P-P^*$ n'opérant pas sur L^∞. Aussi dans le paragraphe II, nous nous sommes attachés à établir des formules de représentation avec poids, du type Cauchy—Fantappiè en reprenant une idée exposée dans le livre de W. Rudin [13]. Les opérateurs ainsi construits ne fournissent pas des projecteurs sur les fonctions holomorphes et il est donc nécessaire de « corriger » les noyaux. C'est l'objet du paragraphe III; c'est évidemment une méthode de $\bar\partial$ mais nous avons été obligés d'utiliser une résolution du $\bar\partial$ régulière sur les $(0, 1)$ formes différentielles à coefficients bornés.

La dualité de $B^{1,s}$ et de l'espace de Bloch découle alors d'une part de la continuité de la projection de Bergman P_s de L^∞ sur $\mathscr{B}$ et d'autre part de la construction d'opérateurs différentiels comme dans [5].

Une application intéressante de ce résultat est la caractérisation du dual de B^p $(p<1)$ comme un espace de fonction hölderiènnes. Le résultat dépend de la régularité du domaine, mais pour un domaine C^∞ nous obtenons que le dual de B^p s'identifie à l'espace des fonctions holomorphes sur le domaine appartenant aussi à Λ_s avec $s=(n+1)(1-p)/p$, pour la dualité naturelle L^2.

I. Notations et rappels

D désigne un domaine borné strictement pseudo-convexe de classe C^3 dans $\mathbf{C}^n$, défini par une fonction ϱ de classe C^3 strictement pluri-sousharmonique sur un voisinage U de $\bar{D}$ et dont le gradient est non nul sur le bord de D. D_ε est le domaine $\varrho^{-1}(]-\infty, -\varepsilon[)$.

La mesure de Lebesgue est notée dm et la mesure $|\varrho|^s\, dm$ (s réel) par $d\mu_s$.

L'espace de Bergman $B^{p,s}$ est l'espace vectoriel des fonctions holomorphes sur D appartenant à $L^p(\mu_s)$ dont la norme est notée $\|\ \|_{p,s}$.

$$\forall f\in L^p(\mu_s)\quad \|f\|_{p,s} = \left(\int |f(w)|^p |\varrho(w)|^s\, dm(w)\right)^{1/p}.$$

La projection de Bergman P_s relativement à la mesure μ_s est la projection orthogonale de $L^2(\mu_s)$ sur $B^{2,s}$. C'est un opérateur intégral.

L'espace de Bloch $\mathscr{B}$ est l'ensemble des fonctions holomorphes sur D dont le gradient ∇f est $O(-1/\varrho)$. La norme d'un élément f de $\mathscr{B}$ est définie par

$$\|f\|_{\mathscr{B}} = \sup_{D_{\varepsilon_0}} |f| + \sup_{w\in D} |\varrho(w)\nabla f(w)|.$$

$\mathscr{B}$ est un espace de Banach.

Le polynôme de Levi P est défini de la façon suivante:

$$P(z, w) = \sum_{j=1}^n P_j(z, w)(w_j-z_j)$$

où

$$P_j(z, w) = \frac{\partial\varrho}{\partial w_j}(w) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2\varrho}{\partial w_j \partial w_k}(w)(w_k-z_k).$$

P est un polynôme en z pour w fixé et est de classe C^1 en w. Une propriété fondamentale et classique de P est la suivante: il existe des réels ε et c strictement positifs tels que pour (z, w) dans $\mathbf{C}^n\times U$ vérifiant $|z-w|<\varepsilon$:

$$2\,\mathrm{Re}\, P(z, w) \geqq \varrho(w)-\varrho(z)+c|z-w|^2.$$

Nous définissons maintenant une « fonction support » en introduisant une fonction $\chi \in C^\infty$ à support compact dans $\mathbf{R}$ telle que:

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |t| \leqq \varepsilon/2 \\ 0 & \text{si} \quad |t| \geqq \varepsilon. \end{cases}$$

Posons

$$F(z, w) = \sum_{j=1}^n F_j(z, w)(w_j - z_j),$$

avec

$$F_j(z, w) = \chi(|z-w|) P_j(z, w) + \big(1 - \chi(|z-w|)\big)(\overline{w_j - z_j}).$$

Pour terminer nous introduisons A définie par:

$$A(z, w) = F(z, w) - \varrho(w).$$

Les propriétés essentielles de F et A sont résumées dans la proposition suivante [12].

Proposition 1.

1) *A appartient à $C^{\infty,1}(\mathbf{C}^n \times U)$.*

2) *A est holomorphe en z pour $|z-w| < \varepsilon/2$.*

Il existe une constante C de $]0, 1[$ telle que:

$$\forall (z, w) \in \bar{D} \times \bar{D} \quad \operatorname{Re} A(z, w) \geqq C[-\varrho(w) - \varrho(z) + |z-w|^2].$$

Nous terminons ce paragraphe par des estimations relatives aux intégrales $I(\lambda, s)$ où:

$$I(\lambda, s) = \int_D \frac{|\varrho(w)|^\lambda}{|A(z, w)|^{n+s}}\, dm(w).$$

Proposition 2. *Pour tous réels s et λ $(-1 < \lambda)$:*

a) Si $\lambda + 1 < s$ $I(\lambda, s) \lesssim |\varrho(z)|^{\lambda+1-s}$.

b) Si $\lambda + 1 = s$ $I(\lambda, s) \lesssim \operatorname{Log} |\varrho(z)|$.

c) Si $\lambda + 1 > s$ $I(\lambda, s) \lesssim 1$.

Ces estimations permettent d'établir:

Proposition 3. *Soit T un operateur intégral défini, pour les fonctions continues sur D, par:*

$$T(f)(z) = \int K(z, w) f(w)\, d\mu_s(w).$$

a) *Si le noyau K vérifie: $|K| \lesssim |A|^{-(n+s+1)}$, T se prolonge en un opérateur continu de $L^p(\mu_s)$ dans lui-même pour tout réel p strictement supérieur à 1.*

b) *Si le noyau K vérifie $|K| \lesssim |A|^m$ avec $m < n+s+1$, T est compact de $L^\infty(\mu_s)$ dans $L^\infty(\mu_s)$.*

II. Formule de représentation avec poids des fonctions holomorphes

Des formules de représentation avec poids pour les fonctions holomorphes ont déjà été démontrées par Forelli et Rudin [8] pour la boule et Berndtsson—Anderson [1] en général. Celles de Forelli et Rudin découlent par interpolation du calcul explicite du noyau de Bergman pour la boule de $\mathbf{C}^n$. L'intérêt des formules de Berndtsson—Anderson très simples pour des domaines strictement convexes, vient du fait que ces formules définissent des projecteurs sur les fonctions holomorphes [4]. Toutefois ceux-ci ne conviennent pas pour notre étude car ils sont « trop loin » de la projection de Bergman dans le sens que la différence entre cet opérateur et son adjoint n'opère pas sur L^∞. C'est pourquoi nous allons tout d'abord établir une formule de représentation avec poids à partir des formes de Cauchy—Fantappiè en reprenant une technique exposée dans [13], chapitre 7.

Rappelons pour commencer une proposition qui est implicitement dans [13].

Proposition 4. *Soit g une fonction holomorphe sur le demi-plan complexe, $\mathcal{P}=\{s;\ \operatorname{Re} s>-1\}$, constante sur* $\mathbf{N}$, *et telle que pour des réels positifs A et c:*

$$(*)\qquad \forall s\in\mathcal{P}\quad |g(s)| \leqq A|s+1|^n e^{(\pi/2)|\operatorname{Im} s|} c^{-\operatorname{Re} s}.$$

Alors g est constante.

Démonstration. Une fonction constante vérifiant l'estimation $(*)$ avec $c=1$ nous pouvons supposer que g est nulle sur $\mathbf{N}$. Introduisons G définie par

$$G(s)=\frac{C^s g(s)}{(s+1)^n \sin((\pi/2)s)}$$

avec $C=\inf(1, c)$.

G est holomorphe sur $\mathcal{P}$ et vérifie l'estimation:

$$|G(s)| \leqq A\frac{e^{(\pi/2)|\operatorname{Im} s|}}{\operatorname{sh}((\pi/2)|\operatorname{Im} s|)+|\sin((\pi/2)\operatorname{Re} s)|}.$$

Il en découle que G est bornée sur $\{s\in\mathbf{C};\ \operatorname{Re} s\geqq 0\}$. En effet,

$$\text{si } |\operatorname{Im} s|\geqq 1,\quad 4|\operatorname{sh}((\pi/2)\operatorname{Im} s)| \geqq e^{(\pi/2)|\operatorname{Im} s|}\quad \text{d'où}\quad |G(s)|\leqq 2A;$$

$$\text{si } |\operatorname{Im} s|\leqq 1,\quad \text{pour}\quad \operatorname{Re} s = 1+2p\,(p\in\mathbf{N}),\quad |\sin(\pi/2)s|\geqq 1,$$

donc d'après le principe du maximum $|G(s)|\leqq Ae^{\pi/2}$ sur tout rectangle $[0, 1+2p]\times[-1, 1]$, donc aussi sur la bande $[0, +\infty[\times[-1, 1]$.

La fonction G étant nulle sur les entiers impairs, ses zéros ne vérifient pas la condition de Blaschke (la série des inverses des modules des zéros est convergente) et par suite G est nulle d'où g aussi.

Nous sommes en mesure de démontrer:

Théorème 1. *Soit α la forme différentielle de type* $(1, 0)$ *en* w $\sum F_j(z, w)\, dw_j$. *Pour toute fonction f holomorphe sur un voisinage de $\bar{D}$, tout z de D et tout nombre complexe s de partie réelle strictement supérieure à* -1

$$f(z) = C_n \frac{\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(s+1)} \int_D f(w) \frac{[-\varrho(w)]^s}{[A(z, w)]^s} \bar{\partial} \left[\frac{\alpha \wedge (\bar{\partial}\alpha)^{n-1}}{A(z, w)^n} \right]$$

où

$$C_n = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{n!\,(2\pi)^n}.$$

Démonstration. Elle comporte deux étapes totalement différentes. La première consiste à vérifier cette formule pour les valeurs entières de s et la seconde à établir celle-ci par interpolation en appliquant la proposition 4.

1° étape. s entier.

Introduisons le domaine $\tilde{D}$ de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^s$ défini par:

$$\tilde{D} = \{\tilde{w} = (w, w') \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^s / \varrho(w) + |w'|^2 < 0\}$$

$\tilde{D}$ est un domaine strictement pseudo-convexe de $\mathbf{C}^{n+s}$, défini par la fonction $\tilde{\varrho}(\tilde{w}) = \varrho(w) + |w'|^2$.

Posons:

$$\tilde{F}(\tilde{z}, \tilde{w}) = F(z, w) + \sum_{j=1}^{s} \overline{w'_j}(w'_j - z'_j).$$

D'après la proposition 1, $\tilde{F}$ vérifie:

$$\operatorname{Re} \tilde{F}(\tilde{z}, \tilde{w}) - \tilde{\varrho}(\tilde{w}) \geqq C[-\varrho(z) - \varrho(w) + |z-w|^2] + \frac{|w'-z'|^2 - |z'|^2 - |w'|^2}{2}$$

où l'on a posé $\tilde{z} = (z, z')$ et $\tilde{w} = (w, w')$.

Faisons remarquer l'égalité:

$$\tilde{F}(\tilde{z}, \tilde{w}) = A(z, w) \quad \text{si} \quad \tilde{z} = (z, 0) \quad \text{et} \quad \tilde{\varrho}(\tilde{w}) = 0.$$

Soit Q la $(1, 0)$ forme en $\tilde{w}$ définie par:

$$Q = \sum_{j=1}^{n} F_j\, dw_j + \sum_{j=1}^{s} w'_j\, dw'_j.$$

$\dfrac{Q \wedge (\bar{\partial}Q)^{n+s-1}}{\tilde{F}^{n+s}}$ est une forme de Cauchy—Fantappiè représentant les fonctions holomorphes au voisinage $\tilde{D}$ au point $\tilde{z} = (z, 0)$ pour z dans D. Par conséquent, toute fonction f holomorphe au voisinage de $\bar{D}$ se prolongeant de manière évidente au voisinage de $\bar{\tilde{D}}$ nous avons:

$$f(z) = (2i\pi)^{-n-s} \int_{b\tilde{D}} f(w) \frac{Q \wedge (\bar{\partial}Q)^{n+s-1}}{[\tilde{F}(\tilde{z}, \tilde{w})]^{n+s}} = (2i\pi)^{-n-s} \int_{b\tilde{D}} f(w) \frac{Q \wedge (\bar{\partial}Q)^{n+s-1}}{[A(z, w)]^{n+s}}.$$

En appliquant la formule de Stokes, nous obtenons finalement:

$$f(z) = (2i\pi)^{-n-s} \int_{\bar{D}} f(w) \bar{\partial} \left[\frac{Q \wedge (\bar{\partial} Q)^{n+s-1}}{A(z, w)^{n+s}} \right].$$

Explicitons maintenant la forme γ figurant dans l'intégrale ci-dessus. D'après sa définition Q est somme de deux formes α et β, α en w et β en w'. Par suite:

$$(\bar{\partial} Q)^{n+s-1} = (\bar{\partial}\alpha + \bar{\partial}\beta)^{n+s-1} = \sum_{k=0}^{n+s-1} \binom{n+s-1}{k} (\bar{\partial}\alpha)^k \wedge (\bar{\partial}\beta)^{n+s-k}$$

$$= \binom{n+s-1}{n} (\bar{\partial}\alpha)^n \wedge (\bar{\partial}\beta)^{s-1} + \binom{n+s-1}{n-1} (\bar{\partial}\alpha)^{n-1} \wedge (\bar{\partial}\beta)^s$$

pour des raisons de bidegré.

D'où:

$$Q \wedge (\bar{\partial} Q)^{n+s-1} = \binom{n+s-1}{n} (\bar{\partial}\alpha)^n \wedge \beta \wedge (\bar{\partial}\beta)^{s-1} + \binom{n+s-1}{n-1} \alpha \wedge (\bar{\partial}\alpha)^{n-1} \wedge (\bar{\partial}\beta)^s$$

et donc:

$$\gamma = \bar{\partial} \left[\frac{Q \wedge (\bar{\partial} Q)^{n+s-1}}{A(z, w)^{n+s}} \right] = \binom{n+s-1}{n} \frac{(\bar{\partial}\alpha)^n \wedge (\bar{\partial}\beta)^s}{A(z, w)^{n+s}}$$

$$+ \binom{n+s-1}{n-1} \bar{\partial} \left[\frac{\alpha \wedge \bar{\partial}(\partial)^{n-1}}{A(z, w)^{n+s}} \right].$$

Soit aussi:

$$\gamma = \binom{n+s}{s} \left[\frac{(\bar{\partial}\alpha)^n}{A(z, w)^{n+s}} - n \frac{\bar{\partial}[A(z, w)] \wedge \alpha \wedge (\bar{\partial}\alpha)^{n-1}}{A(z, w)^{n+s+1}} \right] \wedge (\bar{\partial}\beta)^s$$

$$= \binom{n+s}{s} \times \frac{1}{A(z, w)^s} \times \bar{\partial} \left[\frac{\alpha \wedge (\bar{\partial}\alpha)^{n-1}}{A(z, w)^n} \right] \wedge (\bar{\partial}\beta)^s.$$

Appliquant maintenant le théorème de Fubini, nous obtenons:

$$f(z) = (2i\pi)^{-n-s} \int_D \frac{f(w)}{A(z, w)^s} \left[\int_{B(0, |\varrho(w)|^{1/2})} (\bar{\partial}\beta)^s \right] \bar{\partial} \left[\frac{\alpha \wedge (\bar{\partial}\alpha)^{n-1}}{A(z, w)^n} \right].$$

D'où la formule de l'énoncé en achevant les calculs pour s entier naturel.

2° *étape: interpolation.*

Introduisons, z et f étant toujours fixés, la fonction g définie sur

$$\mathscr{P} = \{s \in \mathbf{C};\ \operatorname{Re} s > -1\}$$

par la formule de l'énoncé:

$$g(s) = C_n \frac{\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(s+1)} \int_D \frac{f(w)}{A(z, w)^s} \bar{\partial} \left[\frac{\alpha \wedge (\bar{\partial}(\alpha))^{n-1}}{A(z, w)^n} \right].$$

g est bien définie d'après les estimations sur A, holomorphe en s sur $\mathscr{P}$ et constante à $f(z)$ sur N d'après la première étape.

$\dfrac{\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(s+1)}$ étant un polynôme en s de degré n, $\left|\dfrac{\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(s+1)}\right| \lesssim |s+1|^n$ et donc

$$|g(s)| \leqq C|s+1|^n \int_D \frac{|\varrho(w)|^{\mathrm{Re}\, s}}{|A(z,w)|^{n+s+1}}\, dm(w).$$

D'après la proposition 1 l'argument de $A(z,w)$ appartenant à $[-\pi/2, \pi/2]$ et $|A(z,w)|$ étant supérieur à $C|\varrho(w)|$, $|g(s)|$ est majoré par:

$$|g(s)| \leqq C \frac{|s+1|^n}{C^{\mathrm{Re}\, s}} e^{(\pi/2)|\mathrm{Im}\, s|} \operatorname{mes}(D).$$

La proposition 4 permet de conclure que $g(s)$ est constante à $f(z)$ d'où le théorème.

Terminons par une estimation:

Proposition 5. *Il existent des formes C_0 et C_1 dans $C^{\infty,0}(\bar{D}\times\bar{D})$ telles que:*

$$\mu = \bar{\partial} \frac{\alpha \wedge (\bar{\partial}\alpha)^{n-1}}{[A(z,w)]^n} = \frac{C_0(z,w)}{A(z,w)^n} + \frac{C_1(z,w)}{A(z,w)^{n+1}}.$$

De plus $C_1(z,w) = \bar{\partial}\varrho(w) \wedge \partial\varrho(w) \wedge (\bar{\partial}\partial\varrho(w))^{n-1} + O(|z-w|)$.

Démonstration. En développant:

$$\mu = \frac{(\bar{\partial}\alpha)^n}{A(z,w)^n} - n \frac{\bar{\partial}A(z,w) \wedge \alpha \wedge (\bar{\partial}\alpha)^{n-1}}{A(z,w)^{n+1}}.$$

D'après la définition de F, $\alpha(w,w) = \partial\varrho(w)$ et $\bar{\partial}\alpha(w,w) = \bar{\partial}\partial\varrho(w)$ et donc ϱ étant C^3: $\bar{\partial}A(z,w) \wedge \alpha \wedge (\bar{\partial}\alpha)^{n-1} = \bar{\partial}\varrho(w) \wedge \partial\varrho(w) \wedge (\bar{\partial}\partial\varrho(w))^{n-1} + O(|z-w|)$.

III. Construction des projections sur les fonctions holomorphes

Les formules de représentation obtenues dans le paragraphe précédent ne fournissent pas des projections sur les fonctions holomorphes car le noyau n'est pas holomorphe en z. Il nous faut donc « corriger » le noyau. Nous abandonnons maintenant le langage des formes différentielles pour revenir à celui des mesures et nous poserons:

$$\mu = \bar{\partial}\left[\frac{\alpha \wedge (\bar{\partial}\alpha)^{n-1}}{A(z,w)^n}\right] = \frac{B(z,w)}{A(z,w)^{n+1}}\, dm(w).$$

Démontrons le résultat suivant:

Théorème 2. *Pour tout réel* $s \geqq 0$, *il existe une fonction* Q_s *vérifiant les propriétés suivantes:*

a) Q_s *est continue sur* $\bar{D}\times\bar{D}$;

b) $\left|\frac{\partial Q_s}{\partial z_j}(z,w)\right| \leqq |\varrho(z)|^{-1/2}$;

c) $K_s = C_n \frac{\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(s+1)} \frac{(-\varrho)^s}{A^{n+s+1}} B + Q_s(-\varrho)^s$

est holomorphe sur D par rapport à la première variable pour tout w dans $\bar{D}$.

d) *Pour toute fonction f holomorphe au voisinage de* $\bar{D}$ *et tout z de D*

$$f(z) = \int_D K_s(z,w) f(w)\, dm(w).$$

Démonstration. Posons $L_s = C_n \frac{\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(s+1)} \frac{B}{A^{n+s+1}}$.

La forme $\bar{\partial}_z L_s$ est définie au voisinage de $\bar{D}\times\bar{D}$, les coefficients de L_s étant holomorphes en z pour $|z-w|<\varepsilon/2$ (Proposition 1). Elle est donc continue sur $\bar{D}\times\bar{D}$.

Introduisons un opérateur intégral T qui résoud le problème $\bar{\partial}$ (c'est-à-dire que pour une $(0,1)$ forme g $\bar{\partial}$-fermée sur D $\bar{\partial}T(g)=g$) vérifiant de plus pour z dans D

$$|T(g)(z)| \leqq C\|g\|_\infty,$$

$$|\nabla T(g)(z)| \leqq \frac{C}{|\varrho(z)|^{1/2}} \|g\|_\infty,$$

pour tout $(0,1)$-forme g $\bar{\partial}$-fermée sur D à coefficients dans L^∞ [12].

Nous posons: $Q_s(z,w) = -T(\bar{\partial}_z L_s(.,w))(z)$.

Les estimations pour l'opérateur T entraînent, $\bar{\partial}_z L_s$ étant bornée sur $\bar{D}\times\bar{D}$, que Q_s est 1/2-Lipschitzienne par rapport à z uniformément par rapport à w. $\bar{\partial}_z L_s$ étant continue en w sur $\bar{D}$ et T étant un opérateur intégral borné sur L^∞, $Q_s(z,.)$ est continue sur $\bar{D}$. Les deux propriétés entraînent que Q_s est continue sur $\bar{D}\times\bar{D}$.

De même nous avons:

$$\left|\frac{\partial Q_s}{\partial z_j}(z,w)\right| = \left|\frac{\partial}{\partial z_j} T(\bar{\partial}_z L_s(.,w))(z)\right|$$

et donc:

$$\leqq \frac{C}{|\varrho(z)|^{1/2}} \|\bar{\partial}_z L_s(.,w)\|_\infty \lesssim \frac{1}{|\varrho(z)|^{1/2}}.$$

Par construction le noyau K_s est holomorphe par rapport à z pour w fixé dans $\bar{D}$. Vérifions que K_s représente toute fonction f holomorphe au voisinage de $\bar{D}$. Il suffit pour cela d'établir la relation:

$$\int_D Q_s(z, w) f(w)\, d\mu_s(w) = 0.$$

T étant un opérateur intégral à noyau intégrable, cette intégrale est égale à:

$$T\left[\int_D -\bar{\partial}_z L_s(z, w) f(w)\, d\mu_s(w)\right].$$

Or

$$\int_D \bar{\partial}_z L_s(z, w) f(w)\, d\mu_s(w) = \bar{\partial}_z \int_D L_s(z, w) f(w)\, d\mu_s(w) = \bar{\partial}_z f(z) = 0,$$

car L_s représente les fonctions holomorphes au voisinage de $\bar{D}$. D'où le théorème.

IV. Régularité de la projection de Bergman P_s sur L^∞

Comme dans le cas $s=0$ [5], la dualité entre $B^{1,s}$ et $\mathscr{B}$ dépend de la régularité de la projection de Bergman P_s de L^∞ dans $\mathscr{B}$. Démontrons:

Théorème 3. *La projection de Bergman P_s est une application continue de L^∞ dans $\mathscr{B}$.*

Démonstration. Celle-ci est semblable à celle donnée pour P_0 dans [5].

L'idée est d'exprimer la projection P_s à l'aide de l'opérateur K_s construit dans le théorème 2.

Vérifions que K_s définit un opérateur de $L^2(\mu_s)$ sur $B^{2,s}$. Par définition pour f

$$K_s(f)(z) = \int [L_s(z, w) + Q_s(z, w)] f(w)\, d\mu_s(w).$$

Le noyau de K_s est majoré en module par $C|A(z, w)|^{-(n+s+1)}$. La proposition 3 permet d'affirmer que K_s se prolonge en un opérateur continu de $L^2(\mu_s)$ dans $L^2(\mu_s)$. K_s étant holomorphe en z, $K_s(f)$ appartient à $B^{2,s}$ pour tout f de $L^2(\mu_s)$; K_s représentant les fonctions holomorphes au voisinage de $\bar{D}$, par densité K_s est une projection de $L^2(\mu_s)$ sur $B^2(\mu_s)$.

Vérifions maintenant que l'opérateur $K_s - K_s^*$ est un endomorphisme compact de $L^\infty(\mu_s)$.

Le noyau de $K_s - K_s^*$ est $L_s(z, w) - \overline{L_s(w, z)} + Q_s(z, w) - \overline{Q_s(w, z)}$. La fonction Q_s étant continue sur $\bar{D} \times \bar{D}$, l'opérateur de noyau $Q_s(z, w) - \overline{Q_s(w, z)}$ est compact sur $L^\infty(\mu_s)$ et il suffit de vérifier le résultat analogue pour l'opérateur de noyau $L_s(z, w) - \overline{L_s(w, z)}$.

D'après la proposition 5 le noyau de L_s s'écrit $\frac{C_0}{A(z,w)^{n+s}}+\frac{C_1}{A(z,w)^{n+s+1}}$, le premier terme définissant un opérateur compact sur L^∞, nous nous intéressons seulement au second. Nous avons les relations suivantes pour

$$M=\frac{C_1}{A^{n+s+1}}-\frac{C_1^*}{A^{*(n+s+1)}};$$

$$\left|\frac{C_1(z,w)}{A(z,w)^{n+s+1}}-\frac{\overline{C_1(w,z)}}{\bar{A}(w,\bar{z})^{n+s+1}}\right| \leqq \frac{|C_1(z,w)-\overline{C_1(w,z)}|}{|A(z,w)|^{n+s+1}}$$

$$+|C_1(z,w)|\left|\frac{1}{A(z,w)^{n+s+1}}-\frac{1}{A(\bar{w},\bar{z})^{n+s+1}}\right|.$$

D'après la proposition 5 $C_1(z,w)-\overline{C_1(w,z)}=O(|z-w|)$. Une application de la formule de Taylor donne la relation:

$$A(z,w)-\overline{A(w,z)}=O(|z-w|^3)$$

et comme $|z-w|^2 \leqq |A(z,w)|$ et $|A(w,z)| \lesssim |A(w,z)|$, nous obtenons la majoration:

$$|M(z,w)| \leqq \left[\frac{|z-w|}{|A(z,w)|^{n+s+1}}+\frac{|z-w|^3}{|A(z,w)|^{n+s+2}}\right] \lesssim \frac{1}{|A(z,w)|^{n+s+1/2}}.$$

Ce qui démontre que M définit un opérateur compact sur $L^\infty(\mu_s)$ d'après la proposition 5. L'opérateur $\mathrm{Id}+(K_s-K_s^*)$ et donc un opérateur de Fredholm sur $L^\infty(\mu_s)$ sans valeur propre réelle, étant anti-autoadjoint sur $L^2(\mu_s)$; par suite c'est un opérateur inversible sur $L^\infty(\mu_s)$ et nous avons la relation sur $L^\infty(\mu_s)$:

$$P_s=K_s(\mathrm{Id}+K_s-K_s^*)^{-1}.$$

Par conséquent, la continuité de P_s de $L^\infty(\mu_s)$ dans $\mathscr{B}$ découle de celle de K_s. Il suffit de vérifier:

$$\int_D |\nabla_z K_s(z,w)|\, d\mu_s(w) \lesssim \frac{1}{|\varrho(z)|}.$$

Or $|\nabla_z K_s| \leqq |\nabla_z L_s|+|\nabla_z Q_s|$. D'où d'après les estimations sur L_s et le théorème 2:

$$\int_D |\nabla_z K_s(z,w)|\, d\mu_s(w) \lesssim \int_D \frac{|\varrho(w)|^s}{|A(z,w)|^{n+s+1}}\, dm(w)$$

$$+\frac{1}{|\varrho(z)|^{1/2}}\int_D |\varrho(w)|^s\, dm(w) \lesssim \frac{1}{|\varrho(z)|}$$

d'après la proposition 3. Ceci achève la démonstration du théorème.

V. Dualité entre $B^{1,s}$ et $\mathscr{B}$

Nous sommes, maintenant, en mesure détablir le théorème annoncé dans l'introduction. Nous allons tout d'abord définir la dualité entre $B^{1,s}$ et $\mathscr{B}$, ce qui découle de la proposition:

Proposition 6. *Il existe un opérateur continu L de B dans L^∞ tel que $P_s L = \mathrm{Id}$.*

Démonstration. Suivant S. Bell [3], considérons des ouverts $(O_j)_{1\leq j\leq n}$ dont la réunion recouvre le bord de D et tels que sur chaque O_j $\left|\frac{\partial \varrho}{\partial z_j}\right|$ soit minoré par une constante $c>0$. Soit (α_j) une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. L'opérateur L est défini par:

$$L(g) = g + \frac{(-\varrho)^s}{s+1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j}\left[(-\varrho)^{s+1} g\alpha_j \left(\frac{\partial \varrho}{\partial z_j}\right)^{-1}\right].$$

$L(g)$ s'écrit en développant:

$$L(g) = g(1-\sum \alpha_j) - \frac{1}{s+1} \sum_{j=1}^n \varrho \frac{\partial g}{\partial z_j} \alpha_j \left(\frac{\partial \varrho}{\partial z_j}\right)^{-1} + \varrho g h$$

avec

$$h = -\frac{1}{s+1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j}\left(\alpha_j \left(\frac{\partial \varrho}{\partial z_j}\right)^{-1}\right).$$

Ce qui démontre que $L(g)$ appartient à L^∞ si g appartient à $\mathscr{B}$ et que L est continu comme opérateur de $\mathscr{B}$ dans L^∞.

Le second terme figurant dans la définition de $L(g)$ est orthogonal à $B^{2,s}$. En effet, si f est holomorphe au voisinage de $\bar{D}$, en posant $\beta = \alpha_j \left(\frac{\partial \varrho}{\partial z_j}\right)^{-1}$,

$$\left|\int_D f \frac{\partial}{\partial z_j}[(-\varrho)^{s+1} g\beta]\, dm(w)\right| = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{D_\varepsilon} f \frac{\partial}{\partial z_j}[(-\varrho)^{s+1} g\beta] \bigwedge_{j=1}^n \left(\frac{dw_j \wedge d\bar{w}_j}{(2i\pi)^n}\right)$$

et par application de la formule de Stokes, en posant $V = dw_j \wedge \left(\bigwedge_{k\neq j} dw_k \wedge d\bar{w}_k\right)$

$$\left|\int_{D_\varepsilon} f \frac{\partial}{\partial z_j}[(-\varrho)^{s+1} g\beta] \bigwedge_{j=1}^n (dw_j \wedge d\bar{w}_j)\right| = \left|\int_{bD_\varepsilon} f(-\varrho)^{s+1} g\beta V\right|.$$

f étant bornée sur D et g étant $O(\mathrm{Log}\, 1/\varepsilon)$ sur bD_ε, cette dernière intégrale est $O(\varepsilon^{s+1} \mathrm{Log}\, 1/\varepsilon)$ d'où le résultat pour f holomorphe au voisinage de $\bar{D}$.

Par densité des fonctions holomorphes au voisinage de $\bar{D}$ dans $B^{2,s}$, le résultat reste vrai pour tout élément f de $B^{2,s}$ et il en découle l'égalité $P_s L = \mathrm{Id}$.

De même nous avons:

Proposition 7. *Il existe une constante* $c>0$ *telle que pour* f *dans* $B^{2,s}$ *et* g *dans* $\mathscr{B}$:

$$\left|\int_D f\bar{g}\,d\mu_s\right| \leqq C\|f\|_{1,s}\|g\|_{\mathscr{B}}.$$

Démonstration.

$$\left|\int_D f\bar{g}\,d\mu_s\right| = \left|\int f\overline{P_s L(g)}\,d\mu_s\right| = \left|\int f\overline{L(g)}\,d\mu_s\right| \leqq \|f\|_{1,s}\|L(g)\|_\infty \leqq C\|f\|_{1,s}\|g\|_{\mathscr{B}},$$

car L est continu de $\mathscr{B}$ dans L^∞.

La dualité entre $\mathscr{B}$ et $B^{1,s}$ est définie par g dans $\mathscr{B}$ et f dans $B^{1,s}$ par:

$$\langle f, g\rangle = \int_D f\overline{L(g)}\,d\mu_s,$$

cette dualité prolonge la dualité naturelle entre $B^{2,s}$ et $\mathscr{B}$.

Nous pouvons préciser.

Proposition 8. *Pour* f *dans* $B^{1,s}$ *et* g *dans* B

$$\langle f, g\rangle = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{D_\varepsilon} f(w)\overline{g(w)}|\varrho(w)+\varepsilon|^s\,dm(w).$$

Démonstration. Sur D_ε introduisons l'opérateur L_ε construit de façon analogue à celle de L en remplaçant ϱ par $\varrho+\varepsilon$. Il est aisé de voir que $L_\varepsilon(g)$ converge vers $L(g)$ quand ε tend vers 0. f étant holomorphe au voisinage de $\bar{D}_\varepsilon$:

$$\int_{D_\varepsilon} f(w)\overline{g(w)}|\varrho(w)+\varepsilon|^s\,dm(w) = \int_{D_\varepsilon} f(w)\,\overline{L_\varepsilon(g)}(w)|\varrho(w)+\varepsilon|^s\,d\mu(w).$$

D'où le résultat en faisant tendre ε vers 0.

Démontrons maintenant:

Théorème 4. *La dualité* $(f,g)\to\langle f,g\rangle$ *permet d'identifier le dual de* $B^{1,s}$ *à l'espace de Bloch* $\mathscr{B}$.

Démonstration. D'après la proposition 7, tout élément g de $\mathscr{B}$ définit une forme linéaire continue φ_g sur $B^{1,s}$ en posant

$$\varphi_g(f) = \langle f, g\rangle.$$

Réciproquement, soit φ une forme linéaire continue sur $B^{1,s}$. D'après le théorème de Hahn—Banach, φ se prolonge en une forme linéaire continue sur $L^1(\mu_s)$ et d'après la dualité de $L^1(\mu_s)$ avec L^∞, il existe h dans L^∞ telle que:

$$\forall f\in B^{1,s} \quad \varphi(f) = \int_D f(w)\overline{h(w)}\,d\mu_s(w).$$

Pour tout f de $B^{2,s}$ nous avons donc:

$$\varphi(f) = \int_D f(w)\overline{P_s(h)}(w)\,d\mu_s(w).$$

$g=P_s(h)$ appartient à $\mathscr{B}$ d'après le théorème 3 et donc pour f dans $B^{2,s}$

$$\varphi(f)=\int_D f(w)\overline{g(w)}\,d\mu_s(w).$$

Ainsi φ et φ_g coïncident sur $B^{2,s}$. $B^{2,s}$ étant dense dans $B^{1,s}$, φ est égale à φ_g.

Remarquons pour terminer que l'application $g\to\varphi_g$ est injective car on a:

$$\varphi_g(g)=\|g\|_{2,s}^2.$$

L'application $g\to\varphi_g$ identifie donc le dual de $B^{1,s}$ à $\mathscr{B}$.

VI. Applications

Nous donnons une application du théorème 4 à la dualité des espaces B^p. Nous pouvons énoncer immédiatement:

Proposition 8. *Le dual de B^p s'identifie à $\mathscr{B}$ pour la dualité:*

$$(f,g)\to\int_D f\bar{g}(-\varrho)^s,\quad s=(n+1)\frac{1-p}{p}.$$

Démonstration. D'après les résultats de [4], B^p et $B^{1,s}$ $\big(s=(n+1)(1-p)/p\big)$ ont le même dual. Il suffit donc d'appliquer le théorème 4 à $B^{1,s}$.

Nous allons démontrer que, comme dans le cas de H^p, le dual de B^p s'identifie à un espace de fonctions holomorphes höldériennes sur D. Introduisons les notations nécessaires. HA_s désigne l'espace vectoriel des fonctions holomorphes sur D qui sont aussi dans A_s, muni de la norme de A_s [14]. Comme dans le cas du disque unité [6], une autre description peut être donnée en terme de croissance des dérivées: f appartient à HA_s si et seulement si elle est holomorphe sur D et son gradient d'ordre $[s]+1$ est $O\big(|\varrho(s)|^{s-1+[s]}\big)$. Nous avons alors:

Théorème 5. *Soit D un domaine strictement pseudo-convexe de classe C^{4+k}. Pour p dans $\left[\frac{n+1}{k+n+1},1\right[$, la dualité naturelle L^2 permet d'identifier le dual de B^p à HA_s avec $s=(n+1)\frac{(1-p)}{p}$.*

Corollaire 1. *Si D est C^∞, le dual de B^p $(0<p<1)$ s'identifie à HA_s avec $s=(n+1)\frac{(1-p)}{p}$.*

Corollaire 2. *Il existe des réels strictement positifs a et b tels que pour tout g de HA_s*

$$a\|g\|_{A_s} \leqq \sup_f \frac{\left|\int f\bar{g}\right|}{\|f\|_p} \leqq b\|g\|_{A_s}$$

où s *est égal à* $(n+1)\frac{(1-p)}{p}$.

Commençons par un résultat auxilliaire, généralisation de la proposition 7, inspiré de S. Bell [3].

Proposition 9. *Soit p vérifiant:* $\frac{n+1}{k+n+1} \leqq p < 1$ *et D un domaine de classe* C^{4+k}.

Il existe une constante $c>0$ *telle que pour toute function f holomorphe au voisinage de* $\bar{D}$ *et tout g de* HA_s $\left(s=(n+1)\frac{(1-p)}{p}\right)$:

$$\left|\int f\bar{g}\right| \leqq C\|f\|_p\|g\|_{A_s}.$$

Démonstration. Supposons pour commencer que p vérifie: $\frac{n+1}{n+2} < p < 1$ et donc s appartient à $]0, 1[$. Nous avons alors pour f holomorphe au voisinage de $\bar{D}$ et g dans HA_s

$$\int_D f\bar{g} = \int_D f\overline{L_0(g)} = \int_D f|\varrho|^s\overline{L_0(g)|\varrho|^{-s}}.$$

Pour g dans HA_s, $L_0(g)|\varrho|^{-s}$ est bornée. En effet, d'après la définition de L_0:

$$|\varrho|^{-s}L(g) = ga|\varrho|^{-s} - \sum_{j=1}|\varrho|^{1-s}\frac{\partial g}{\partial z_j}b_j + |\varrho|^{1-s}gh$$

où a est C^∞ à support compact dans D, b_j C^1 sur $\mathbf{C}^n$ et h de classe C^{2+k} au voisinage de $\bar{D}$. D'après la définition de HA_s, g et $|\varrho|^{-1}\frac{\partial g}{\partial z_j}$ sont bornés en fonction de $\|g\|_{A_s}$ et par suite:

$$\left|\int f\bar{g}\right| \leqq C\,\|f|\varrho|^s\|_1\|g\|_{A_s}.$$

Comme d'après [4], B^p se plonge continûment dans $B^{1,s}$, le résultat annoncé est vérifié.

Pour le cas général, nous construisons de nouveaux opérateurs. En conservant les notations de la proposition 6, nous écrivons:

$$g = g\left(1-\sum_{j=1}^n \alpha_j\right) + \sum \alpha_j g.$$

$\left(1-\sum \alpha_j\right)$ étant à support compact, il suffit de vérifier le résultat pour $h=\alpha_j g$ qui est à support dans un ouvert où $\left|\frac{\partial \varrho}{\partial z_j}\right| > 0$.

Posons

$$\tilde{h} = \sum_{t=0}^{l} \frac{\partial}{\partial z_j} [(-\varrho)^{t+1}\theta_t],$$

l étant la partie entière de s et la fonction θ_t étant définie par récurrence:

$$\theta_0 = h\left(\frac{\partial \varrho}{\partial z_j}\right)^{-1},$$

$$\theta_{t+1} = (t+2)^{-1}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial z_j}\right)^{-1} \frac{\partial \theta_t}{\partial z_j}.$$

$\tilde{h}$ est orthogonale à B^2 et nous avons:

$$\tilde{h} = h+(-\varrho)^{l+1}\frac{\partial \theta_l}{\partial z_j}$$

et

$$\left|\frac{\partial \theta_l}{\partial z_j}\right|(-\varrho)^{l+1-s} \leqq C_s\|g\|_{A_s}.$$

Par suite:

$$\int_D f\tilde{h} = \int_D f(-\varrho)^{l+1}\overline{\frac{\partial \theta_l}{\partial z_j}} = \int_D f(-\varrho)^s(-\varrho)^{l+1-s}\overline{\frac{\partial \theta_l}{\partial z_\varrho}}.$$

En utilisant l'inclusion de B^p dans $B^{1,s}$, le résultat est démontré.

Démonstration du théorème 5. Soit g dans HA_s et appelons φ_g l'application:

$$f \to \int_D f\bar{g}.$$

D'après la proposition précédente φ_g est continue sur B^p et sa norme vérifie:

$$\|\varphi_g\| \leqq C\|g\|_{A_s}$$

où C est indépendante de g.

Réciproquement soit φ une forme linéaire continue sur B^p. D'après les résultats de [4], φ est une forme linéaire continue sur $B^{1,s}$ avec $s=(n+1)(1-p)/p$. D'après le théorème 4, il existe h dans $\mathscr{B}$ telle que pour tout f de $B^{1,s}$:

$$\varphi(f) = \int_D f(-\varrho)^s\bar{h} = \int_D f\overline{P[(-\varrho)^s h]},$$

P étant la projection de Bergman de L^2 sur B^2.

Pour h dans $\mathscr{B}$ $(-\varrho)^s h$ appartient à A_s. En effet, pour p dans $\left[\frac{n+1}{k+n+1}, 1\right[$, s appartient à $]0, k[$. D'après la règle de Leibniz, les dérivées d'ordre $l=[s]+1$ sont des sommes de produits d'une dérivée d'ordre $l-q$ de $(-\varrho)^s$ et d'une dérivée d'ordre q de h $(q \leqq l)$ et sont donc majorées par $(-\varrho)^{s-l}$. P opérant continument sur Λ_α ($\alpha \leqq k$) d'après E. Ligocka [11], $g=P[(-\varrho)^s h]$ appartient à Λ_s et nous avons donc $\varphi=\varphi_g$.

D'où le résultat.

Remarques. a) On peut établir un résultat analogue pour les espaces avec poids $B^{p,r}$. Il suffit pour cela d'utiliser la régularité de P_r sur Λ_α.

b) L'ensemble des valeurs de p pour lesquelles le théorème est vrai dépend effectivement de la régularité du domaine. Pour s'en convaincre il suffit d'appliquer le théorème aux fonctions $B(.,w)$ (B désignant le noyau de Bergman). On obtient ainsi une estimation $|D_{|s|}B(\,,\,)| \leqq O(d(w)^{-\alpha})$, O uniforme en w. Toutefois l'auteur ne sait pas si l'intervalle $\left[\frac{n+1}{k+n+1}, 1\right[$ est optimal.

References

1. Andersson, M. et Berndtsson, B., Henkin—Ramirez with weight factors, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **32** (1982), 91—110.
2. Bekollé, D., Le dual de l'espace des fonctions holomorphes intégrables dans des domaines de Siegel, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **34** (1984), 125—154.
3. Bell, S., A duality theorem for harmonic functions, *Michigan Math. J.* **29** (1983), 123—128.
4. Coupet, B., *Thèse d'état*, Université de Provence, Marseille.
5. Coupet, B., Sur le dual des fonctions holomorphes intégrables, *Proc. Amer. Math. Soc.* (à paraître).
6. Duren, P., *Theory of H^p*, Academic Press, New-York, 1970.
7. Fefferman, C., The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudo-convex domains, *Invent. Math.* **26** (1973), 1—65.
8. Forelli, F. et Rudin, W., Projections on spaces of holomorphic functions in balls, *Indiana Univ. Math. J.* **24** (1974), 593—602.
9. Kerzman, N. et Stein, E., The Szegö kernel in terms of Cauchy—Fantappiè kernels, *Duke Math. J.* **45** (1978), 197—224.
10. Krantz, S. et Ma, D., Bloch functions on strongly pseudo-convex domains (à paraître).
11. Ligocka, E., The Hölder continuity of the Bergman projection and proper holomorphic mappings, *Studia Math.* **80** (1984), 89—107.
12. Range, M., *Holomorphic functions and integral representation in several complex variables*, Springer-Verlag, 1986.
13. Rudin, W., *Function theory in the unit ball of* $\mathbf{C}^n$, Springer-Verlag, 1980.
14. Stein, E., *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

Received March 18, 1988

Bernard Coupet
Université de Provence et U. A. 225
3, Place Victor Hugo
13003 MARSEILLE CEDEX 3
FRANCE