Une classe d'espaces fonctionnels de type BMO. Application aux intégrales singulières

Martin Meyer

0. Introduction

Par analogie avec le « théorème $T(1)$ », c'est à dire la condition nécessaire et suffisante de continuité sur l'espace $L^2(\mathbf{R}^N)$ établie par G. David et J. L. Journé [3], on donne ici des conditions nécessaires et suffisantes de continuité des opérateurs d'intégrales singulières sur certains espaces de Besov homogènes. Il intervient naturellement dans ces critères de nouveaux espaces qui y jouent un rôle semblable à celui de BMO dans le théorème $T(1)$. Les espaces de ce type sont apparus pour la première fois dans l'étude, par David A. Stegenga [13], des multiplicateurs d'espaces de Sobolev généralisés. Dans le théorème de David et Journé, l'opérateur d'intégrale singulière T et son transposé T^* jouent un rôle symétrique et la condition essentielle pour la continuité-L^2 de T s'énonce:

$$T(1) \quad \text{et} \quad T^*(1) \in \mathrm{BMO}.$$

On verra que dans notre résultat principal (théorème 4), la condition de continuité sur l'espace de Besov homogène $\dot{B}^s_{pq}$ est que $T(1)$ appartienne à un espace BMO^s_{pq} (que nous définissons), sans qu'intervienne $T^*(1)$ — sauf pour des valeurs extrémes des indices s, p, q — (voir théorème 5). La première définition que nous donnons des espaces BMO^s_{pq} (définition 4), en termes du paraproduit de Bony, est assez compliquée. Au paragraphe III on trouvera des descriptions plus concrètes (voir par ex. le théorème 10) de ces espaces, qui sont tous inclus dans l'espace BMO classique (théorème 9).

Ce travail a été fait sous la direction de M. Yves Meyer à qui j'exprime ma profonde reconnaissance.

1. Les opérateurs et le problème de continuité-Besov

A tout operateur linéaire faiblement continu T de $\mathscr{D}(\mathbf{R}^N)$ dans $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^N)$ correspond un noyau-distribution $K\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N)$; on suppose toujours que la restriction de ce noyau au complémentaire Ω de la diagonale est une fonction intégrable $K(x, y)$, vérifiant l'estimation suivante sur Ω

$$(\mathrm{R}_0) \qquad |K(x,y)| \leqq C\,|x-y|^{-N}.$$

On fait aussi une hypothèse de régularité en la première variable

$$(\mathrm{R}_{1\varepsilon}) \qquad |K(x,y)-K(x',y)| \leqq C\,|x-x'|^{\varepsilon}|x-y|^{-N-\varepsilon} \quad (0<\varepsilon\leqq 1)$$

dès que $(x,y)\in\Omega$, $|x-x'|\leqq\frac{1}{2}|x-y|$ (auquel cas $(x',y)\in\Omega$).

Une propriété incontournable dans les problèmes de continuité des opérateurs d'intégrales singulières est la *propriété d'action bornée* du groupe affine $\mathscr{G}$, que nous allons rappeler. Un élément λ de $\mathscr{G}$ est un couple (t, u) $(t\in\mathbf{R}^*, u\in\mathbf{R}^N)$, agissant sur $\mathbf{R}^N$ par $\lambda\cdot x=u+tx$. Si f est une fonction sur $\mathbf{R}^N$, on définit $\lambda\cdot f=f_\lambda$ par $f_\lambda(x)=t^{-N}f((x-u)/t)$ $(x\in\mathbf{R}^N)$. Si $T\colon \mathscr{D}(\mathbf{R}^N)\mapsto\mathscr{D}'(\mathbf{R}^N)$ est un opérateur, on définit $\lambda\cdot T=T_\lambda$ par

$$\langle T_\lambda f, g\rangle = t^N\langle Tf_\lambda, g_\lambda\rangle \quad (f, g\in\mathscr{D})$$

de sorte que si le noyau distribution de T a la densité $K(x, y)$ hors de la diagonale, celui de T_λ a la densité $t^N K(u+tx, u+ty)$.

Définition 1. *On dit que l'opérateur* $T\colon \mathscr{D}\mapsto\mathscr{D}'$ *vérifie la propriété d'action bornée si l'ensemble des opérateurs* T_λ $(\lambda\in\mathscr{G})$ *est borné (dans l'espace des opérateurs faiblement continus de* $\mathscr{D}$ *dans* $\mathscr{D}'$*); autrement dit, si l'ensemble des réels* $\langle T_\lambda f, g\rangle$ *est borné lorsque* f *et* g *parcourent une partie bornée de* $\mathscr{D}$.

Rappelons enfin la définition de la distribution (modulo les constantes) $T(1)\in\mathscr{D}'/\mathbf{C}$, qui joue un rôle essentiel ici comme dans le théorème de David et Journé. Soit T un opérateur vérifiant R_0 et $R_{1\varepsilon}$; pour toute fonction $g\in\mathscr{D}_0$ (i.e. g est une fonction de $\mathscr{D}$ d'intégrale nulle), la distribution T^*g, où T^* est le transposé de T, coïncide hors du support de g avec une fonction intégrable (plus précisément, une fonction dont la décroissance à l'infini est en $|x|^{-N-\varepsilon}$). On peut donc définir la valeur de T^*g sur la fonction C^∞ bornée 1.

Définition 2. *On désigne par* $T(1)$ *l'élément de* $(\mathscr{D}_0)'=\mathscr{D}'/\mathbf{C}$

$$\langle T(1), g\rangle = \langle 1, T^*g\rangle \quad (g\in\mathscr{D}_0).$$

Plus généralement, si f est une fonction C^∞ bornée, on peut définir Tf comme élément de $\mathcal{D}'/\mathbf{C}=(\mathcal{D}_0)'$ par la formule suivante

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, T^*g\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle f\varphi_\varepsilon, T^*g\rangle \quad \text{pour} \quad g\in\mathcal{D}_0$$

où $\varphi\in\mathcal{D}$ est égale à 1 au voisinage de 0, $\varphi_\varepsilon(x)=\varphi(\varepsilon x)$.

Rappelons très brièvement l'énoncé du théorème de David et Journé: Pour qu'un opérateur $T\colon \mathcal{D}\to\mathcal{D}'$, dont le noyau vérifie les conditions R_0, $R_{1\varepsilon}$ et $R_{1\varepsilon}^*$ énoncées plus haut se prolonge en un endomorphisme de L^2, il faut et il suffit qu'il vérifie la propriété d'action bornée (WBP), que $T(1)$ et $T^*(1)$ appartiennent à l'espace BMO.

On s'intéresse ici à la continuité des opérateurs sur les *espaces de Besov homogènes* $\dot{B}^s_{pq}$, que nous définirons à l'aide des blocs dyadiques de la *décomposition de Littlewood—Paley* discrète. Rappelons que celle ci se définit au moyen d'une fonction $\psi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^N)$, ayant pour support la couronne $C_{[1/2,2]}=\{u;\ 1/2\leqq|u|\leqq 2\}$, strictement positive sur la couronne ouverte, et telle que $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi(2^{-k}u)\equiv 1$ pour $u\neq 0$. On définit alors l'opérateur Δ_k sur $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ par transformation de Fourier: $\widehat{\Delta_k f}(u)=\psi(2^{-k}u)\hat{f}(u)$. Si f est un polynôme, $\hat{f}(u)$ est portée par $\{0\}$ et $\Delta_k f$ est nulle.

Définition 3. *Une distribution tempérée modulo les polynômes $f\in\mathcal{S}'/\mathbf{C}[X]$ appartient à $\dot{B}^s_{pq}$ si et seulement si la suite $(2^{sk}\|\Delta_k f\|_p)_{k\in\mathbf{Z}}$ appartient à $l^q(\mathbf{Z})$, et l'on note*

$$\|f\|^s_{pq} = \Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty}(2^{sk}\|\Delta_k f\|_p)^q\Big]^{1/q}.$$

Dans ce travail, nous supposerons toujours $s\in[0, 1[$.

Dans cette large classe d'espaces de Besov, deux espaces « extrêmes » vont jouer un rôle primordial pour l'étude des opérateurs: ce sont l'espace fonctionnel « minimal » $\dot{B}^0_{11}$ et son dual (donc « maximal ») $\dot{B}^0_{\infty\infty}$. L'immense intérêt pratique de $\dot{B}^0_{11}$ tient à la possibilité de jongler avec diverses définitions, que voici

- $\dot{B}^0_{11}$ *est constitué des fonctions $f\in L^1_0$ (i.e. intégrables et d'intégrale nulle) telles que $\sum_{-\infty}^{\infty}\|\Delta_k f\|_1<\infty$.*

Par rapport à la définition précédente, on a simplement précisé la nature des classes de distributions tempérées considérées: chaque classe contient une fonction intégrable d'intégrale nulle et une seule.

●● Définition analogue, mais avec une *décomposition de Littlewood—Paley continue:* soit $\theta\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ une fonction radiale, dont la transformée de Fourier $\hat{\theta}(u)$ est positive, nulle hors d'une couronne $\{a\leqq|u|\leqq b\}$ $(0<a<b<\infty)$ et normalisée par la condition $\int_0^\infty\hat{\theta}(tu)\,dt/t=1$ pour $u\neq 0$ (comme θ est radiale, cette intégrale ne dépend pas de $u\neq 0$). Soit Q_t l'opérateur de convolution avec $t^{-N}\theta(x/t)$, $t>0$. Alors

$\dot{B}^0_{11}$ *est l'espace des fonctions $f\in L^1_0$ telles que $\int_0^\infty\|Q_t f\|_1\,dt/t<\infty$.*

De plus, cette intégrale fournit une norme équivalente à la norme précédente (le rapport des deux normes étant borné par des constantes universelles).

●●● L'espace $\dot{B}^0_{11}$ peut être décrit par une *décomposition atomique*. Remplaçons la fonction θ ci-dessus par une fonction h du même type, mais avec normalisation différente

$$\int_0^\infty |\hat{h}(tu)|^2 \frac{dt}{t} = 1 \quad \text{pour} \quad u \neq 0. \tag{1}$$

Alors *tout élément f de $\dot{B}^0_{11}$ peut s'écrire sous la forme*

$$f = \sum_n a_n \lambda_n \circ h, \quad avec \quad \lambda_n \in \mathcal{G}, \quad \sum_n |a_n| < \infty. \tag{2}$$

De plus, la borne inférieure de $\sum_n |a_n|$ pour toutes les représentations possibles de f fournit une norme équivalente aux précédentes (le rapport des normes étant borné par des constantes universelles).

En fait, il est très utile d'assouplir les hypothèses sur $h \in \dot{B}^0_{11}$. La démonstration de l'existence d'une décomposition (2) repose uniquement sur (1), et non sur les propriétés relatives au spectre de h, etc. Or un lemme classique affirme que, si $h \in L^1_0$ satisfait à $|h(x)| \leq M(1+|x|)^{-N-1}$, l'intégrale (1) est bornée en u; si h est de plus radiale, cette intégrale est une constante finie, et la relation (1) est satisfaite après normalisation. En particulier, dans la décomposition atomique de $\dot{B}^0_{11}$, on peut prendre pour fonction h *un élément radial de* $\mathcal{D}_0$, convenablement normalisé.

Pour des démonstrations de ces résultats, on pourra consulter [10], [14], où figure aussi la remarquable *propriété de minimalité* de l'espace $\dot{B}^0_{11}$:

Théorème 1. *Soit $\mathcal{E}$ un espace de Banach de fonctions localement intégrables sur $\mathbf{R}^N$, tel que l'injection naturelle de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{D}'$ soit continue, et que $\mathcal{E}$ et sa norme soient invariants sous l'action de $\mathcal{G}$.*

Supposons que $\mathcal{E}$ contienne $\mathcal{D}_0$, ou un seul élément h de $\dot{B}^0_{11}$ satisfaisant à (1). *Alors $\mathcal{E}$ contient $\dot{B}^0_{11}$ et l'injection de $\dot{B}^0_{11}$ dans $\mathcal{E}$ est continue.*

La décomposition atomique de $\dot{B}^0_{11}$ permet de caractériser facilement son dual: la notation θ ayant la même signification que plus haut, ce dual est l'espace des distributions Φ modulo les constantes, telle que

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{G}} |\langle \lambda \cdot \theta, \Phi \rangle| < \infty \quad \text{ou} \quad \sup_t \|Q_t \Phi\|_\infty < \infty$$

(propriétés équivalentes). On reconnaît sur la seconde forme la définition de $\dot{B}^0_{\infty\infty}$ au moyen d'une décomposition de Littlewood—Paley continue. On notera qu'une telle distribution Φ est toujours tempérée.

Nous aurons enfin à utiliser un résultat de P. G. Lemarié (voir [5]) dont la démonstration repose d'ailleurs sur une autre définition de $\dot{B}^s_{pq}$ pour $0 < s < 1$, au moyen des modules de continuité-L^p:

Théorème 2. *Soit* $\varepsilon\in]0, 1]$, *et soit* T *un opérateur vérifiant* R_0, $R_{1\varepsilon}$ *et possédant la propriété d'action bornée. Si en outre* $T(1)=0$, T *s'étend en un opérateur continu de* $\dot{B}^s_{pq}$ *dans lui-même, pour* $s\in]0, \varepsilon[$ *et* $p, q\in[1, \infty]$.

Dans ce travail, nous nous proposons de donner une *condition nécessaire et suffisante* de continuité-Besov, pour un opérateur T satisfaisant aux hypothèses classiques R_0, $R_{1\varepsilon}$.

Nous commencerons par remarquer que *la propriété d'action bornée est nécessaire* pour la continuité Besov:

Proposition 1. *Soit un opérateur* T *dont le noyau vérifie* R_0, *et soit* $s\in]0, 1[$. *Si* T *est continu de* $\dot{B}^s_{pq}$ *dans lui même, ou continu de* $\dot{B}^0_{11}$ *dans* L^1, T *vérifie la propriété d'action bornée.*

Preuve. Désignons par E l'espace $\dot{B}^s_{pq}$, par E' son dual, par $\| \ \|$ et $\| \ \|'$ les normes correspondantes. Remarquons que la norme de E possède la propriété d'homogénéité

$$\|f_\lambda\| = t^{N/p-s-N}\|f\| \quad \lambda=(t, u)$$

où comme précédemment $f_\lambda(x)=t^{-N}f\big((x-u)/t\big)$. De même, l'homogénéité de la norme de E' est

$$\|g_\lambda\|' = t^{s-N/p}\|g\|'.$$

Supposons que T soit continu de $\mathscr{D}$ (muni de $\| \ \|$) dans E, et soit $\|T\|$ sa norme d'opérateur. Soient B une partie bornée de $\mathscr{D}$ au sens usuel de la théorie des distributions, β de même une partie bornée de $\mathscr{D}_0$; B et β sont alors bornées dans E et E' respectivement, et on a donc pour $f\in B$, $g\in\beta$, $\lambda=(t, u)\in\mathscr{G}$, le crochet $\langle\, ,\rangle$ exprimant à la fois la dualité entre $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ et entre E et E'

$$|\langle T_\lambda f, g\rangle| = t^N|\langle T(f_\lambda), g_\lambda\rangle| \leqq t^N\|T\|\,\|f_\lambda\|\,\|g_\lambda\|' \leqq C<\infty.$$

Nous allons utiliser R_0 pour lever la restriction d'intégrale nulle imposée aux $g\in\beta$, et obtenir la propriété d'action bornée.

Soit B_1 une partie bornée de $\mathscr{D}$. On peut supposer sans perte de généralité que tous les éléments f de B et h de B_1 ont une valeur absolue $\leqq 1$ et ont leur support dans la boule unité de $\mathbf{R}^N$. Soit a un vecteur de norme 3 (par exemple), et soit $h^a(x)=h(x-a)$, $g=h-h^a$. Lorsque h parcourt B_1, g parcourt une partie bornée de $\mathscr{D}_0$, et l'inégalité précédente nous donne

$$\sup_{f,h,\lambda}|\langle T_\lambda f, h-h^a\rangle| \leqq C<\infty.$$

Il reste à majorer $\sup\limits_{f,h,\lambda}|\langle T_\lambda f, h^a\rangle|$. Or les supports de f et h^a sont disjoints, et on peut utiliser le noyau de T

$$\langle T_\lambda f, h^a\rangle = t^N \langle T(f_\lambda), (h^a)_\lambda\rangle = t^{-N} \iint K(x, y) f\left(\frac{x-v}{t}\right) h^a\left(\frac{y-v}{t}\right) dx\, dy$$

qui d'après R_0 est majoré en valeur absolue par la constante

$$Ct^{-N} \iint_{\substack{|x-v|\le t\\ |y-v-at|\le t}} |x-y|^{-N} dx\, dy.$$

Si l'on remplace la continuité Besov par la continuité de $\dot{B}^0_{11}$ dans L^1, le raisonnement doit être modifié de la manière suivante: la norme $\|\ \|$ est celle de $\dot{B}^0_{11}$ et la norme $\|\ \|'$ celle de L^∞; B est une partie bornée de $\mathcal{D}_0$, β une partie bornée de $\mathcal{D}$, et pour obtenir la propriété d'action bornée, c'est sur les éléments de B que la restriction d'intégrale nulle doit être levée. On est alors amené à majorer $|\langle T_\lambda h^a, g\rangle|$ au lieu de $|\langle T_\lambda f, h^a\rangle|$. Les détails sont laissés au lecteur.

La proposition suivante est essentielle pour toute la suite: elle explique le rôle primordial des espaces $\dot{B}^0_{11}$ et $\dot{B}^0_{\infty\infty}$ dans la caractérisation des opérateurs continus-Besov.

Proposition 2. *Si T vérifie les hypothèses R_0, $R_{1\varepsilon}$ et possède la propriété d'action bornée, $T(1)$ appartient à $\dot{B}^0_{\infty\infty}$.*

Preuve. Grâce à la décomposition atomique de $\dot{B}^0_{11}$, pour montrer que $T(1)$ appartient à $\dot{B}^0_{\infty\infty} = (\dot{B}^0_{11})'$, il suffit de montrer que l'on a

$$\sup_{\lambda\in\mathcal{G}} |\langle T(1), h_\lambda\rangle| < \infty$$

où h est un élément de $\mathcal{D}_0$ satisfaisant à la condition (1)

$$\int_0^\infty |\hat{h}(tu)|^2 \frac{dt}{t} = 1 \quad \text{pour} \quad u \neq 0.$$

On peut supposer le support de h contenu dans la boule unité fermée $\bar{B}_1(0)$. Posons $1 = \xi + \eta$, où $\xi \in \mathcal{D}$ vaut 1 sur $\bar{B}_2(0)$ et a son support dans $\bar{B}_3(0)$. Pour chaque $\lambda = (t, v) \in \mathcal{G}$ on a $1 = t^N \xi_\lambda + t^N \eta_\lambda$, et donc

$$\langle T(1), h_\lambda\rangle = t^N \langle T\xi_\lambda, h_\lambda\rangle + t^N \langle \eta_\lambda, T^* h_\lambda\rangle.$$

Le premier terme s'écrit aussi $\langle T_\lambda \xi, h\rangle$; il est borné uniformément en λ par hypothèse (propriété d'action bornée). Le second terme peut s'exprimer au moyen du noyau de T hors de la diagonale, et vaut

$$t^N \iint K(x, y)\, h_\lambda(x) \eta_\lambda(y)\, dx\, dy = t^N \iint [K(x, y) - K(v, y)]\, h_\lambda(x) \eta_\lambda(y)\, dx\, dy$$

car h_λ est d'intégrale nulle. Par construction des fonctions ξ et η, on peut restreindre le domaine d'intégration à l'ensemble $|x-v| \leqq \frac{1}{2}|y-v|$; appliquant alors $R_{1\varepsilon}$ on obtient alors un majorant

$$C\|h\|_\infty t^{-N} \iint_{\substack{|x-v|\leqq t \\ |y-v|\geqq 2t}} |x-v|^\varepsilon |x-y|^{-N-\varepsilon}\, dx\, dy = C\|h\|_\infty$$

qui ne dépend plus de λ. □

2. Caractérisation des opérateurs continus-Besov

Nous allons montrer pour commencer que le *paraproduit* de J. M. Bony conserve, lorsque le facteur appartient à $\dot{B}^0_{\infty\infty}$, les propriétés remarquables établies par G. David et J. L. Journé dans le cas où le facteur appartient à l'espace beaucoup plus restreint BMO.

Rappelons d'abord la définition du paraproduit. Reprenons la fonction $\psi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^N)$ qui nous a servi à définir la décomposition de Littlewood—Paley, et posons pour $u \neq 0$

$$\varphi(u) = \sum_{k\geqq 1} \psi(2^k u) \quad (\text{et } \varphi(0) = 1) \tag{1}$$

fonction de $\mathscr{D}$ qui vaut 1 au voisinage de 0. Définissons les opérateurs S_k par la formule

$$\widehat{S_k f}(u) = \varphi(2^{-k}u)\hat{f}(u) \tag{2}$$

où f désigne une distribution tempérée; $S_k f$ est une fonction C^∞.

Soit alors β une distribution tempérée (que nous appellerons le *facteur* du paraproduit); on définit le paraproduit $\pi(\beta, f)$ comme la somme de la série de fonctions C^∞

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta_k \beta S_{k-3} f \tag{3}$$

lorsque celle-ci converge dans $\mathscr{S}'$. Dans toute la suite, β sera un élément fixé de $\dot{B}^0_{\infty\infty}$, et Π_β désignera l'opérateur de paraproduit de facteur β.

Théorème 3. *L'opérateur Π_β satisfait à la propriété d'action bornée. Son noyau distribution L_β est de classe C^∞ dans le complémentaire Ω de la diagonale de* $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ *et vérifie les estimations*

$$|D_x^\alpha D_y^{\alpha'} L_\beta(x, y)| \leqq C_{\alpha\alpha'} \|\beta\|^0_{\infty\infty} |x-y|^{-N-|\alpha|-|\alpha'|} \tag{4}$$

(entraînant en particulier R_0 et $R_{1\varepsilon}$ pour $\varepsilon=1$). *En outre* $\Pi_\beta(1)=\beta$ *et* $\Pi_\beta^*(1)=0$.

Avant de commencer la démonstration précisons tout de suite que, si β et f sont dans $\mathscr{S}'$, le spectre du produit $\Delta_k\beta \cdot S_{k-3}f$ est contenu dans la somme des spectres des facteurs, qui est une couronne $2^{k-3}C_{[3, 2^4+1]}$, qui est à nouveau une dilatée dyadique d'une couronne fixe. Il est alors naturel d'utiliser, pour établir la propriété d'action bornée, le lemme suivant:

Lemme. *Soit $(T_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une suite bornée d'endomorphismes de L^2. Alors, si les opérateurs Δ_n sont construits à partir d'une fonction ψ à support dans une couronne $C_{[a,b]}$ de dimensions quelconques, la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} \Delta_n \circ T_n$ définit un opérateur continu de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{S}'$ possédant la propriété d'action bornée.*

En effet, supposons que f et g parcourent une partie bornée $\mathscr{B}$ de $\mathscr{S}$; alors pour chaque n, comme Δ_n est autoadjoint, on a pour $\lambda=(t, u)\in\mathscr{G}$

$$t^N |\langle \Delta_n T_n f_\lambda, g_\lambda\rangle| = t^N |\langle T_n f_\lambda, \Delta_n g_\lambda\rangle| \leqq t^N \|T_n f_\lambda\|_2 \|\Delta_n g_\lambda\|_2;$$

mais $\|T_n f_\lambda\|_2 \leqq C t^{-N/2}$ (C dépendant de $\mathscr{B}$ et de $\sup_n \|T_n\|$). Il reste donc à vérifier une inégalité de la forme $\sum_{n\in\mathbf{Z}} \|\Delta_n g_\lambda\|_2 \leqq C t^{-N/2}$. Cela se ramène d'après Plancherel à

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \|\chi_{\Gamma_n} \hat{g}_\lambda\|_2 \leqq C t^{-N/2}$$

où χ_{Γ_n} est la fonction caractéristique de la couronne $\Gamma_n = 2^n C_{[a,b]}$. Cette norme valant aussi $t^{-N/2} \|\chi_{t\Gamma_n} \hat{g}\|_2$, tout revient à borner indépendamment de t une expression de la forme

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \Big(\int_{t^{-1}2^n C_{[a,b]}} |\hat{g}(u)|^2\, du\Big)^{1/2}, \quad g\in\mathscr{B}.$$

Cette somme reprend la même valeur lorsqu'on remplace t par $t/2$, on peut se restreindre à $t\in[1, 2]$, puis éliminer t en dilatant $\mathscr{B}$. Nous laissons alors les détails au lecteur (pour $n<0$, il suffit d'utiliser le fait que $\hat{g}$ est borné dans L^∞, et pour $n>0$ une majoration uniforme $|\hat{g}(u)| \leqq C(1+|u|)^{-p}$ avec $p=(N+1)/2$).

Pour appliquer le lemme, on revient aux considérations précédant l'énoncé: on prend $T_n = \Delta_n \beta \cdot S_{n-3}$, l'opérateur Δ_n étant relatif à la famille initiale de couronnes dyadiques, non à celle du lemme, de sorte que avec les Δ_n du lemme ($C_{[a,b]}$ étant bien choisie) on a $\Pi_\beta = \sum_n \Delta_n \circ T_n$. Le point essentiel est de vérifier que $\|T_n\|$ est uniformément borné, et cela nous est assuré par la condition $\beta\in\dot{B}^0_{\infty\infty}$ (définition 3), $\Delta_n \beta$ étant uniformément borné dans L^∞.

Des estimations (4) sur le noyau L_β, nous ne détaillerons que les deux cas $|\alpha|=|\alpha'|=0$, $|\alpha|=1$, $|\alpha'|=0$ — pour l'exemple, et aussi parce que ces inégalités entraînent (R_0) et (R_{11}). On a formellement (nous justifierons ensuite)

$$L_\beta(x, y) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} 2^{N(n-3)} \Delta_n \beta(x) \check{\varphi}(2^{n-3}(x-y)) \tag{5}$$

où $\check{\varphi}(x)$ est la transformée de Fourier inverse de $\varphi(u)$, et appartient à $\mathscr{S}$. On voit sans peine que toute fonction $f\in\mathscr{S}$ satisfait, quel que soit $p\in\mathbf{N}$, à une estimation

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} 2^{k(N+p)} |f(2^k x)| \leqq C(p, f) |x|^{-N-p}. \tag{6}$$

On en tire d'abord, en faisant $f=\check{\varphi}$ et $p=0$

$$|L_\beta(x,y)| \leqq C\|\beta\|^0_{\infty\infty}|x-y|^{-N}$$

car les $\Delta_n\beta$ sont uniformément bornés par la norme de β.

L'expression de $D_jL_\beta(x,y)$ (où l'on dérive par rapport à x) comprend deux termes. L'un fait opérer la dérivée sur $\check{\varphi}$ et se traite comme ci-dessus, en utilisant l'estimation (6) pour $f=D_j\varphi$, ce qui donne bien une majoration par $C\|\beta\|^0_{\infty\infty}|x-y|^{-N-1}$. L'autre fait opérer D_j sur $\Delta_n\beta=\beta*\check{\psi}_n$, où $\psi_n(u)=\psi(2^{-n}u)$ en posant $\varrho=D_j\check{\psi}$, $D_j\Delta_n\beta=\beta*D_j\check{\psi}_n$ on a

$$D_j\Delta_n\beta(x) = 2^n\langle\beta, 2^{nN}\varrho(2^n(\cdot-x))\rangle.$$

Or ϱ appartient à $\mathscr{S}_0\subset\dot{B}^0_{11}$ et la norme de cet espace est invariante par dilatation, donc

$$\|D_j\Delta_n\beta\|_\infty \leqq 2^n\|\varrho\|^0_{11}\|\beta\|^0_{\infty\infty}.$$

En appliquant alors (6) avec $f=\check{\varphi}$ et $p=1$, on obtient pour $|\alpha|=1$

$$\|D^\alpha_xL_\beta(x,y)\| \leqq C\|\beta\|^0_{\infty\infty}|x-y|^{-N-|\alpha|}.$$

Nous sommes partis d'un calcul formel sur l'expression (5), mais ce calcul est rigoureux si l'on somme seulement pour $-\nu\leqq n\leqq\nu$. Les distributions correspondantes L^ν_β convergent dans $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N)$ vers le noyau-distribution de l'opérateur de paraproduit. Les majorations établies ci-dessus étant uniformes en ν, nous laisserons le lecteur achever la preuve.

Les inégalités que nous avons établies entraînant les estimations R_0 et R_{11}, nous savons définir $\Pi_\beta 1\in\mathscr{D}'/\mathbf{C}$ (déf. 2), et nous allons utiliser le fait que, si $h\in\mathscr{D}$ est égale à 1 au voisinage de 0, on a pour $g\in\mathscr{D}_0$

$$\text{(7)} \qquad \langle\Pi_\beta 1, g\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle h_\varepsilon, \Pi^*_\beta(g)\rangle \quad \text{où} \quad h_\varepsilon(x)=h(\varepsilon x).$$

Nous avons fait remarquer plus haut que les estimations (4) — et en particulier R_0 et R_{11} — sur les sommes partielles $L^\nu_\beta(x,y)$ de $-\nu$ à ν dans la série (5) sont uniformes en ν. Il est facile de voir alors que $\Pi^\nu_\beta 1$ tend vers $\Pi_\beta 1$, le passage à la limite étant uniforme en ν lorsque $\varepsilon\to 0$. Les estimations (4) étant symétriques en x et y, (7) on a d'ailleurs la même remarque pour $\Pi^*_\beta 1$.

On a $\Pi_\beta f=\sum_n U_nf$, où $U_nf=\Delta_n\beta\cdot S_{n-3}f$ et $U^*_nf=S_{n-3}[(\Delta_n\beta)f]$. Les remarques précédentes nous autorisent à écrire $\Pi_\beta 1=\sum_n U_n 1=\sum_n\Delta_n\beta=\beta$, et $\Pi^*_\beta 1=\sum_n U^*_n 1=0$.

Forts de ces propriétés du paraproduit, introduisons à l'aide de ce dernier une famille d'espaces fonctionnels inclus dans $\dot{B}^0_{\infty\infty}$:

Definition 4. *Soit $\beta\in\dot{B}^0_{\infty\infty}$. Nous dirons que β appartient à BMO^s_{pq} si l'opérateur de paraproduit Π_β est continu de $\dot{B}^s_{pq}$ dans lui-même, et la norme de cet opérateur sera alors, par définition, la norme de β dans BMO^s_{pq}.*

Le critère de continuité-Besov est à present un jeu d'enfant:

Théorème 4. *Soit* $T\colon \mathcal{D}\to\mathcal{D}'$ *un opérateur satisfaisant aux conditions* R_0 *et* $\mathrm{R}_{1\varepsilon}$. *Pour que T se prolonge en un endomorphisme borné de* $\dot{B}^s_{pq}$, *avec avec* $0<s<\varepsilon$, *il faut et il suffit que T possède la propriété d'action bornée, et que* $T(1)$ *appartienne à* BMO^s_{pq}.

Preuve. Nous avons vu dans la Proposition 1 du paragraphe précédent que, si T est continu de $\dot{B}^s_{pq}$ dans lui-même, T possède la propriété d'action bornée. Mais alors la Proposition 2 nous assure que $\beta=T(1)$ appartient à $\dot{B}^0_{\infty\infty}$. Le théorème 3 nous dit alors que l'opérateur $T_0=T-\Pi_\beta$ possède la propriété d'action bornée, les propriétés R_0 et $\mathrm{R}_{1\varepsilon}$, et que $T_0 1=0$. D'après le théorème de Lemarié (th. 2), T_0 est continu de $\dot{B}^s_{pq}$ dans lui-même pour $0<s<\varepsilon$. Par différence, on a la même propriété pour Π_β, et cela signifie (par définition!) que β appartient a BMO^s_{pq}.

Inversement, si T possède la propriété d'action bornée et satisfait a R_0 et $R_{1\varepsilon}$, la condition $\beta=T(1)\in\mathrm{BMO}^s_{pq}$ entraîne que $\mathbf{T}=T_0+\Pi_\beta$ est continu de $\dot{B}^s_{pq}$ dans lui-même.

Bien entendu, ce théorème n'est utilisable que si l'on a donné d'autres descriptions des espaces BMO^s_{pq}. On trouvera dans [7] une description de BMO^s_{22} analogue à la caractérisation de BMO à partir des mesures de Carleson v. théorème 12.

D'autre part, on a supposé $s>0$ dans le théorème 4. L'énoncé suivant (démontré dans [7]) montre a quel point la situation peut être différente pour $s=0$:

Théorème 5. *Supposons que T satisfasse aux conditions* R_0, $R_{1\varepsilon}$ *et* $R^*_{1\varepsilon}$. *Pour que T se prolonge en un endomorphisme borné de* $\dot{B}^0_{11}$, *il faut et il suffit que T possède la propriété d'action bornée, que* $T(1)$ *appartienne à* BMO^0_{11}, *et que l'on ait* $T^*1=0$.

L'espace BMO^0_{11} admet, lui aussi, une caractérisation en termes de mesures de Carleson.

3. Quelques remarques sur les espaces de type BMO

Enonçons d'abord une caractérisation de BMO^s_{pq}, sans paraproduit ni décomposition de Littlewood—Paley, qui se déduit sans effort de ce qui précède.

Théorème 6. *Supposons* $s\in]0,1[$, $p,q\in[1,\infty[$. *Alors*

$$\mathrm{BMO}^s_{pq} = \{\beta = T(1);\ T\in R_0, T\in R_{1\varepsilon}\ (\varepsilon > s)\ \text{et}\ T\colon \dot{B}^s_{pq} \to \dot{B}^s_{pq}\} \subset \dot{B}^0_{\infty\infty}.$$

En effet, soit T un opérateur vérifiant R_0, $R_{1\varepsilon}$ et continu de $\dot{B}^s_{pq}$ dans lui-même.

Posons $T(1)=\beta$; alors $T_0=T-\Pi_\beta$ vérifie les hypothèses du théorème de Lemarié, et donc est continu $\dot{B}^s_{pq}$; par différence il en est de même du paraproduit, donc $\beta\in\dot{B}^s_{pq}$.

Examinons le lien entre BMO^s_{pq} et les multiplicateurs ponctuels des espaces de Besov homogènes.

Théorème 7. *Les hypothèses sur s, p, q étant les mêmes que ci-dessus, l'espace $M(\dot{B}^s_{pq})$ des multiplicateurs ponctuels de $\dot{B}^s_{pq}$ est l'intersection* $\mathrm{BMO}^s_{pq}\cap L^\infty$.

En effet, si $f\in M(\dot{B}^s_{pq})$ le noyau-distribution de l'opérateur de multiplication M_f est porté par la diagonale, de sorte que les conditions $R_0, R_{1\varepsilon}, R^*_{1\varepsilon}, \ldots$ sont toutes trivialement vérifiées.

Pour que l'opérateur M_f soit continu de $\dot{B}^s_{pq}$ dans lui même, il faut et il suffit alors que $M_f 1=f$ appartienne à BMO^s_{pq}, et que M_f possède la propriété d'action bornée. Mais il est immédiat de vérifier que $\sup_{t,u}\left|\int f(x)\varphi^2((x-u)/t)dx\right|\leqq Ct^{-N}$ (où $\varphi\in\mathcal{D}$ est normalisée au sens L^2) équivaut à $|f(x)|\leqq C$ p.p.

Remarque. Nous avons supposé $s\neq 0$. Les caractères $e^{iu\cdot x}$ non triviaux *ne sont pas* des multiplicateurs de $\dot{B}^s_{pq}$, donc $L^\infty\not\subset\mathrm{BMO}^s_{pq}$. Cela contraste avec le cas $s=0$, où $\mathrm{BMO}^0_{22}=\mathrm{BMO}$ contient L^∞.

Nous allons voir maintenant comment la caractérisation de certains commutateurs continus-Besov peut mener à l'inclusion de tous nos espaces BMO^s_{pq} dans l'espace BMO classique. Nous désignons par I^γ l'opérateur potentiel de Riesz, et par $I^{-\gamma}=(-\Delta)^{\gamma/2}$ son inverse, pour $0<\gamma<1$. Soient $a\in\dot{B}^\gamma_{\infty\infty}$ (en d'autres termes, une fonction höldérienne d'exposant γ) et M_a l'opérateur de multiplication ponctuelle correspondant. On sait définir le commutateur $C^\gamma_a=[M_a, I^{-\gamma}]$, calculer son noyau hors de la diagonale

$$K^\gamma_a(x, y) = \big(a(x)-a(y)\big)|x-y|^{-N-\gamma}$$

qui vérifie les conditions R_0, $R_{1\gamma}$ et $R^*_{1\gamma}$, et calculer la distribution $C^\gamma_a(1)=-I^{-\gamma}(a)$, bien définie comme élément de $B^0_{\infty\infty}$. De plus, pour $f\cdot g\in\mathcal{D}$ on sait donner un sens à la formule $\langle C^\gamma_a f, g\rangle=\langle a, gI^{-\gamma}f-fI^{-\gamma}g\rangle$. Pour tous ces résultats, on consultera [7].

Le critère de continuité-$\dot{B}^s_{pq}$ appliqué à C^γ_a fournit alors l'énoncé suivant, par simple traduction:

Théorème 8. *Soient $\gamma\in]0, 1[$, $s\in]0, \gamma[$, $p, q\in[1, \infty[$, $a\in\dot{B}^\gamma_{\infty\infty}$. Pour que $C^\gamma_a=[M_a, I^{-\gamma}]$ soit continu-$\dot{B}^s_{pq}$, il faut et il suffit que $I^{-\gamma}(a)$ appartienne à* BMO^s_{pq}.

D'autre part, on a:

Lemme. *Si C^γ_a est continu-$\dot{B}^s_{pq}$, $I^{-\gamma}(a)$ appartient à* BMO.

En effet, le transposé de C_a^γ est $-C_a^\gamma$; la continuité-$\dot{B}_{pq}^s$ de C_a^γ entraîne donc la continuité-$B_{p'q'}^{-s}$ (où p', q' sont les exposants conjugués de p, q). Par interpolation complexe, on en déduit que C_a^γ est continu sur L^2. Mais par ailleurs, d'après un théorème de M. A. M. Murray, [11], la continuité-L^2 du commutateur C_a^γ équivaut à l'appartenance à BMO de $C_a^\gamma(1)=-I^{-\gamma}(a)$.

En combinant le théorème 8 et le lemme précédent, on obtient:

Théorème 9. *Pour* $s\in]0, 1[$, $p, q\in[1, \infty[$, *on a* $\mathrm{BMO}_{pq}^s\subset\mathrm{BMO}$.

En effet, soit $f\in\mathrm{BMO}_{pq}^s\subset\dot{B}_{\infty\infty}^0$, et soit $a=I^\gamma(f)$; il est classique (cf. par example le livre de Triebel [14] ou Peetre [12]) que a appartient à $\dot{B}_{\infty\infty}^\gamma$, et alors $I^{-\gamma}(a)=f$ appartient à BMO d'après le lemme.

Récapitulons les inclusions obtenues:

$$M(\dot{B}_{pq}^s) = L^\infty\cap\mathrm{BMO}_{pq}^s \begin{array}{c} \nearrow \mathrm{BMO}_{pq}^s \searrow \\ \searrow \quad L^\infty \quad \nearrow \end{array} \mathrm{BMO} \to \dot{B}_{\infty\infty}^0.$$

Venons-en à quelques propriétés plus ardues, en ce sens qu'elles exigent une caractérisation « à la Littlewood—Paley », mais sans paraproduit, des espaces BMO_{pq}^s. Nous ne donnerons plus de démonstrations détaillées, nous bornant à renvoyer à [7].

L'outil fondamental est le lemme suivant:

Théorème 10. *Soit* $\beta\in B_{\infty\infty}^0$: *pour que* β *appartienne à* BMO_{pq}^s, *il faut et il suffit que pour toute fonction* $f\in\dot{B}_{pq}^s$ *la suite* $\{2^{ns}\|(\Delta_n\beta)(S_{n-3}f)\|_p\}_{n\in\mathbf{Z}}$ *appartienne* ì $l^q(\mathbf{Z})$ *(la norme de cette suite définissant une norme équivalente à la norme* BMO_{pq}^s*).*

En utilisant alors des estimations précises de la suite $\|S_nf\|_\infty$ pour f dans la boule unité de $\dot{B}_{pq}^s$, $s<N/p$, on obtient les inclusions suivantes

Théorème 11. *Soient* $s\in]0, 1[$, $p, q\in[1, \infty[$. *Pour* $s<N/p$, BMO_{pq}^s *contient* $B_{p,\infty}^{N/p}$ *(avec injection continue); pour* $s\geqq N/p$, BMO_{pq}^s *est réduit à* $\{0\}$.

Nous allons terminer par des remarques sur BMO_{22}^s et BMO_{11}^0.

On peut voir directement, sans utiliser le procédé menant au théorème 9, que BMO_{22}^s est inclus dans BMO, en utilisant le théorème 10 et la caractérisation de BMO au moyen des mesures de Carleson. On voit aisément par interpolation que tout multiplicateur de l'espace de Beppo Levi $\dot{B}_{22}^s$ est aussi multiplicateur de l'espace de Sobolev (inhomogène) $B_{22}^s=L_2^s$. En utilisant la caractérisation capacitaire des multiplicateurs des espaces de potentiels de Bessel L_p^s donnée par D. A. Stegenga [13], R. Johnson a donné un critère élégant d'appartenance à $M(L_2^s)$. Nous tirons de ce travail le résultat suivant [4].

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^N$, et soit $\mathrm{Cap}_s(\Omega)=\inf\{(\|f\|_{L^2})^2; f\geqq 0, I^s(f)\geqq 1 \text{ sur } \Omega\}$ où I^s est comme ci-dessus l'opérateur potentiel de Riesz d'ordre s. Soit $\hat{\Omega}$ l'ouvert de $\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}_+$ formé des (x, t) tels que la boule $\{|y-x|<t\}$ soit contenue dans Ω. Enfin, à toute fonction $\beta\in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ associons son prolongement harmonique $\beta(x, t)$ sur $\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}_+$ et la mesure positive

$$d\mu_\beta(x, t) = t^{-Ns+2}\left|\frac{\partial}{\partial t}\beta(x, t)^2\right| dx\, dt.$$

Théorème 12. *Pour que β appartienne à $M(\dot{B}^s_{22})$, il faut et il suffit que β appartienne à L^∞, et que la mesure μ_β vérifie une condition du type*

$$\mu_\beta(\hat{\Omega}) \leqq C\,\mathrm{Cap}_s(\Omega) \quad \textit{pour tout ouvert } \Omega \textit{ de } \mathbf{R}^N.$$

Nous avons surtout considéré les espaces BMO^s_{pq} pour $s>0$; donnons quelques résultats sur BMO^0_{11}. Soit $\theta(x)$ une fonction de $S(\mathbf{R}^N)$, radiale, à transformée de Fourier positive supportée par une couronne $C_{[a,b]}$; comme d'habitude $\theta_t(x)=t^{-N}\theta(x/t)$ et Q_t est l'opérateur de convolution par θ_t.

Théorème 13. *Soit $\beta\in B^0_{\infty\infty}$; pour que β appartienne à BMO^0_{11}, il faut et il suffit que la mesure sur $\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}_+$*

$$d\lambda(x, t) = |Q_t\beta(x)|\frac{dx\, dt}{t}$$

soit une mesure de Carleson.

La démonstration de cet énoncé est assez technique, et figure dans [7].

References

1. Calderón, A. P. et Zygmund, A., Singular integral operators and differential equations, *Amer. J. Math.* 9 (1957), 801—821.
2. Coifman, R. et Meyer, Y., *Au delà des opérateurs pseudo-différentiel*, Astérisque № 57, Soc. Math. de France 1978 (2e édition).
3. David, G. et Journé, J. L., Une caractérisation des opérateurs intégraux singuliers bornés sur $L^2(\mathbf{R}^N)$, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* 296 (1983), 761—764.
4. Johnson, R., Applications of Carleson measures to partial differential equations and Fourier multiplier problems, in: *Harmonic Analysis*, Cortona 1982, Lectures Notes in Math. 992, Springer, Berlin etc. 1983.
5. Lemarié, P. G., Continuité sur les espaces de Besov des opérateurs définis par des intégrales singulières, *Ann. Inst. Fourier* 35 (1985), 175—187.
6. Maz'ya, V. G. et Šapošnikova, T. D., Theory of multipliers in spaces of differentiable functions, *Russian Math. Surveys* 38 (1983), 23—95.
7. Meyer, M., *Continuité-Besov des opérateurs intégraux singuliers*, Thèse de Doctorat 3e cycle, Université Paris XI (Orsay), Juin 1985.

8. MEYER, Y., Les nouveaux opérateurs de Calderón—Zygmund, in: *Colloque en l'honneur de Laurent Schwartz,* Vol. 1, Astérisque № 131, pp. 237—254, Soc. Math. de France, 1985.
9. MEYER, Y., *Continuité sur les espaces de Hölder et de Sobolev des opérateurs définis par des intégrales singulières,* cours, Ecole Polytechnique.
10. MEYER, Y., *La minimalité de l'espace de Besov B_{11}^{0} et la continuité des opérateurs définis par des intégrales singulières,* Monografías de Matemática № 4, Univ. Autónoma, Madrid, 1985.
11. MURRAY, M. A. M., Commutators with fractional differentiation and BMO-Sobolev spaces, *Indiana Univ. Math. J.* **34** (1985), 200—215.
12. PEETRE, J. *New thoughts on Besov spaces,* Duke Univ. Math. Series 1, Math. Dept., Duke Univ. 1976.
13. STEGENGA D. A., Multipliers of the Dirichlet space, *Illinois J. Math.* **24** (1980), 113—139.
14. TRIEBEL, H., *Theory of function spaces,* Birkhäuser, Boston—Basel—Stuttgart, 1983.

Manuscrit reçu le 18 avril 1988

Martin Meyer
Departamento de Matemática
Universidad Autónoma
Madrid 28049
España