Espaces de Hardy et domaines de Denjoy

Michel Zinsmeister

1. Introduction

Soit L une droite du plan complexe: Hayman et Wu [1] ont démontré qu'il existe une constante universelle $C>0$ telle que si Ω est un domaine simplement connexe propre de $\mathbf{C}$,

$$\Lambda^1(f^{-1}(L\cap\Omega)) \leqq C,$$

où Λ^1 désigne la mesure de Hausdorff linéaire et f une représentation conforme du disque unité $\mathbf{D}$ sur Ω. Lorsque Ω est à bord rectifiable, on peut paraphraser ce théorème en disant qu'il existe $C>0$ telle que

$$(1)\qquad \int_{L\cap\Omega} |F(z)|\,|dz| \leqq C\|F\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall F\in H^1(\Omega),$$

où $H^1(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions holomorphes F sur Ω telles que $\|F\|_{H^1(\Omega)}=\sup_r \int_{\Gamma_r} |F(z)|\,|dz|<+\infty$, Γ_r désignant, pour $0<r<1$, l'image par f du cercle $\{|z|=r\}$. Sous cette dernière forme, le problème peut se généraliser à des domaines Ω non simplement connexes. L'objet de cet article est l'étude de (1) dans les domaines de Denjoy, c'est-à-dire les domaines de la forme $\Omega=\mathbf{C}\setminus K$ où K est un compact de $\mathbf{R}$ de mesure positive.

Si Ω est un tel domaine, désignons par R_δ, $\delta>0$, l'adhérence de la réunion des carrés centrés sur K de côté δ, et Γ_δ le bord de R_δ. On définit alors l'espace de Hardy $H^1(\Omega)$ comme l'espace des fonctions F holomorphes dans Ω telles que $\lim_{|z|\to\infty} zF(z)=0$ et

$$\|F\|_{H^1(\Omega)} = \sup_{\delta>0} \int_{\Gamma_\delta} |F(z)|\,|dz| < +\infty.$$

Si F appartient à $H^1(\Omega)$, on vérifie facilement qu'il existe une mesure μ supportée par K telle que $\int_K d\mu=0$ et

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_K \frac{d\mu(x)}{x-z} \overset{\text{déf}}{=} \hat{\mu}(z), \quad z\in\Omega.$$

Réciproquement, si μ est une mesure sur K, alors $\hat{\mu}$ définit une fonction holomorphe dans Ω et, si $\int d\mu=0$, la restriction de $\hat{\mu}$ à $\mathbf{R}^2_\pm$ appartient à l'espace de Hardy $H^p(\mathbf{R}^2_\pm)$ si $\frac{1}{2}<p<1$. En particulier $\hat{\mu}$ admet des limites non tangentielles $\hat{\mu}_+$ et $\hat{\mu}_-$ en presque tout point de K. Ceci nous conduit à définir $H^1(K)$ comme l'espace des mesures μ à support dans K, d'intégrale nulle, telles que:

$$\|\mu\|_{H^1(K)} = \|\hat{\mu}_+\|_{L^1(K)} + \|\hat{\mu}_-\|_{L^1(K)} < +\infty,$$

et l'on vérifie que $H^1(\Omega)\subset\{\hat{\mu};\ \mu\in H^1(K)\}=\widehat{H^1(K)}$. Deux questions se posent alors: A-t-on $H^1(\Omega)=\widehat{H^1(K)}$ et pour quels compacts K a-t-on (1)? Ces deux questions sont, comme nous allons le voir, très liées.

Le résultat principal de ce travail est la caractérisation des compacts K tels que l'on ait (1) pour $\widehat{H^1(K)}$. La remarque fondamentale est que (1) est vrai si et seulement si (1) est vrai pour $L=\mathbf{R}$, car alors $H^1(K)$ est inclus dans $H^1(\mathbf{R})$, l'espace de Stein et Weiss et, par le résultat fondamental de Carleson, on aura $\iint_{\mathbf{R}^2_\pm} |\hat{\mu}(z)|\, d\nu(z) \leqq C\|\mu\|_{H^1(K)}$ pour toute mesure de Carleson ν dans $\mathbf{R}^2_\pm$. Comme corollaire, notons que si $\widehat{H^1(K)}$ vérifie (1), alors $\widehat{H^1(K)}=H^1(\Omega)$ car les mesures de longueur d'arc sur Γ_δ vérifient uniformément la propriété de Carleson.

Il nous faut donc caractériser les compacts $K\subset\mathbf{R}$, $|K|>0$, tels que $H^1(K)\subset H^1(\mathbf{R})$. Un compact $K\subset\mathbf{R}$ sera dit homogène s'il existe $\varepsilon>0$ tel que

$$\forall x\in K,\quad \forall\delta>0,\quad \delta\leqq \operatorname{diam} K,\quad |K\cap(x-\delta, x+\delta)| \geqq \varepsilon\delta.$$

Cette notion a été introduite par Carleson [2] en liaison avec le problème de la couronne pour les domaines de Denjoy.

Théorème 1. *Soit K un compact de $\mathbf{R}$ de mesure positive; sont alors équivalents:*

$$H^1(K)\subset H^1(\mathbf{R}), \tag{2}$$

$$K \textit{ est homogène.} \tag{3}$$

L'implication (2)⇒(3) est, à ma connaissance, nouvelle; sa démonstration occupera le paragraphe 2. L'implication (3)⇒(2) peut se déduire d'un résultat de Jones [3]. Cet auteur montre que si K est homogène et si $b\in L^\infty(\mathbf{R}\setminus K)$, on peut trouver F définie sur Ω telle que $\bar\partial F=b\,dx$ et $\|F\|_{L^\infty(K)}\leqq C\|b\|_\infty$. Un argument de dualité prouve alors l'implication (3)⇒(2). Nous proposons au paragraphe 3 une autre démonstration de (3)⇒(2), basée sur la méthode des majorants harmoniques. Le « cœur » de cette nouvelle approche est le théorème suivant, d'intérêt indépendant.

Théorème 2. *Soit K un compact ε-homogène; il existe alors $p_0(\varepsilon)>1$ tel que pour toute fonction $g\in L^p(K)$, $p>p_0$ on puisse trouver une fonction harmonique u dans Ω, symétrique (i.e. $u(\bar{z})=u(z)$ pour $z\in\Omega$) telle que u converge non tangentiellement vers g presque partout sur K et telle que $u^*\in L^p(K)$.*

Cet énoncé demande quelques mots d'explication. Si $x\in\mathbf{R}$ on définit $\Gamma^{\pm}(x)=\{x'+iy'\in\mathbf{R}^2_{\pm};\ |x'-x|<|y'|\}$.

On dit que u converge non tangentiellement vers $g(x)$ si

$$\lim_{z\to x,\, z\in\Gamma^{\pm}(x)} u(z) = g(x) \quad \text{et l'on note} \quad u^*_{\pm}(x) = \sup_{z\in\Gamma^{\pm}(x)} |u(z)|,$$

$u^*(x)=\sup\left(u^*_+(x), u^*_-(x)\right)$. Comme corollaire de ces résultats, nous obtenons une théorie cohérente des espaces $H^1(\Omega)$ si K est homogène.

Corollaire 1. *Si K est homogène, sont équivalents pour une fonction F holomorphe dans Ω telle que $\lim_{|z|\to\infty} zF(z)=0$,*

(4) $$F\in H^1(\Omega),$$

(5) $$F\in\widehat{H^1(K)},$$

(6) $F^*\in L^1(K)$ et $\exists\alpha>0$ tel que $|F|^\alpha$ ait un majorant harmonique.

Enfin, nous donnons au paragraphe 4 une version n-dimensionnelle des résultats précédents que nous formulons en termes d'inégalités à priori pour ne pas alourdir l'exposé.

La notion de compact homogène a un analogue évident dans $\mathbf{R}^n$. Désignons par $R_1, \ldots, R_n$ les transformées de Riesz dans $\mathbf{R}^n$ et, si $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est un multi-indice, notons $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$ et $R^\alpha=R_1^{\alpha_1}\ldots R_n^{\alpha_n}$. Enfin $H^1(\mathbf{R}^n)$ est l'espace de Hardy de Stein et Weiss [4].

Théorème 3. *Soit K un compact de $\mathbf{R}^n$ tel que*

$$\forall x\in K,\quad \varliminf_{r\to 0} r^{-n}|K\cap B(x,r)|>0.$$

(i) *Si K est ε-homogène, il existe $C(\varepsilon)$ et $N(\varepsilon)>0$ tels que:*

(7) $$\|f\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \leqq C(\varepsilon)\sum_{|\alpha|\leqq N(\varepsilon)} \|R^\alpha f\|_{L^1(K)}$$

pour toute fonction $f\in L^2(K)$ d'intégrale nulle.

(ii) *Si (7) est vrai pour une constante C et un entier N alors K est homogène.*

2. Démonstration de l'implication (2)⇒(3)

Si $x\in K$ et $\delta>0$, nous noterons $I(x, \delta)=(x-\delta, x+\delta)$. Si I est un intervalle $I(x, \delta)$ nous noterons également, pour $k\geqq 0$,

$$I^{(k)} = I(x, 2^k\delta), \quad I_{(k)} = I(x, 2^{-k}\delta).$$

Une première remarque est que si K vérifie (2) alors

$$\forall x\in K, \quad \forall\delta>0, \quad |K\cap I(x, \delta)|>0.$$

Si ce n'était pas le cas, soit $I(x, \delta)$ tel que $|K\cap I(x, \delta)|=0$. Alors la mesure $\delta_x-\dfrac{1}{|K|}1_K(x)\,dx$ appartient à $H^1(K)$ mais pas à $H^1(\mathbf{R})$.

On considère alors deux cas:

1*er cas:* Il existe une constante $C>0$ telle que pour tout intervalle I centré sur K,

$$\frac{|K\cap I^{(1)}|}{|I^{(1)}|} \leqq C\frac{|K\cap I|}{|I|}\sqrt{\operatorname{Log}\frac{e|I|}{|K\cap I|}}. \tag{8}$$

Supposons (8) vérifié et qu'il existe I centré sur K tel que $\dfrac{|K\cap I|}{|I|}\leqq\varepsilon$. Quitte à restreindre ε on peut supposer que l'une des extrémités de I, soit a, appartient à K. Soit alors J' l'intervalle de même centre que I et de longueur $\dfrac{|I|}{3}$, J'' l'intervalle centré en a et de longueur $\dfrac{|I|}{3}$ et $J=J'^{(3)}\cap J''^{(3)}$.

Alors $\dfrac{|K\cap J'|}{|J'|}\leqq 3\varepsilon$ et l'on peut supposer $|K\cap J'|>0$, $|K\cap J''|>0$ par la remarque préliminaire. Posons $f_{J'}(x)=\dfrac{1}{|K\cap J'|}1_{K\cap J'}(x)$, $f_{J''}(x)=\dfrac{1}{|K\cap J''|}1_{K\cap J''}(x)$ et $f=f_{J'}-f_{J''}$.

a) *Estimation de* $\|f\|_{H^1(K)}$. De façon évidente, $\int_K|f(x)|\,dx=2$, $\int_K f(x)\,dx=0$ et, si $x\notin J$, $|Hf(x)|\leqq C|J|(x-a)^{-2}$ où H désigne la transformée de Hilbert, d'où;

$$\int_{K\cap(\mathbf{R}\setminus J)}|Hf(x)|\,dx \leqq \int_{\mathbf{R}\setminus J}|Hf(x)|\,dx \leqq C.$$

Pour estimer $\int_{K\cap J}|Hf(x)|\,dx$ nous utilisons l'inégalité de Cauchy—Schwarz et la continuité L^2 de H:

$$\begin{aligned}\int_{K\cap J}|Hf(x)|\,dx &\leqq \int_{K\cap J}|Hf_{J'}(x)|\,dx+\int_{K\cap J}|Hf_{J''}(x)|\,dx\\ &\leqq \sqrt{|K\cap J|}\,(\|f_{J'}\|_2+\|f_{J''}\|_2)\\ &= \frac{\sqrt{|K\cap J|}}{\sqrt{|K\cap J'|}}+\frac{\sqrt{|K\cap J|}}{\sqrt{|K\cap J''|}}\\ &\leqq C\left\{\left(\operatorname{Log}\frac{e|J'|}{|K\cap J'|}\right)^{3/4}+\left(\operatorname{Log}\frac{e|J''|}{|K\cap J''|}\right)^{3/4}\right\},\end{aligned}$$

la dernière inégalité découlant de (8). Finalement,

$$\|f\|_{H^1(K)} \leqq \|f\|_{L^1(K)} + \|f\|_{L^1(K)}$$
$$\leqq C\left\{\left(\operatorname{Log}\frac{e|J'|}{|K\cap J'|}\right)^{3/4} + \left(\operatorname{Log}\frac{e|J''|}{|K\cap J''|}\right)^{3/4}\right\},$$

du moins si ε est assez petit.

b) *Estimation de* $\|f\|_{H^1(\mathbf{R})}$. Soit u l'intégrale de Poisson de f dans $\mathbf{R}^2_+$. Alors ([4]),

$$\|f\|_{H^1(\mathbf{R})} \geqq C\|u^*\|_{L^1(\mathbf{R})} \geqq C\left\{\int_{J'^{(1)}} Mf_{J'}(x)\,dx + \int_{J''^{(1)}} Mf_{J''}(x)\,dx - C\right\},$$

où u^* désigne la fonction maximale non tangentielle et Mg désigne la fonction maximale de Hardy—Littlewood de g.

Lemme 1. *Si ε est assez petit,*

$$\int_{J'^{(1)}} Mf_{J'}(x)\,dx \geqq C \operatorname{Log}\frac{e|J'|}{|J'\cap K|}.$$

Preuve du lemme 1. Si $f\in L^1(\mathbf{R})$ alors (voir [5] p. 23),

$$\left|\{Mf > \alpha\}\right| \geqq \frac{1}{2\alpha}\int_{\{|f|>\alpha\}} |f(x)|\,dx.$$

D'autre part, $Mf_{J'}(x) \leqq \frac{1}{|J'|}$ si $x\notin J'^{(1)}$, d'où

$$\int_{J'^{(1)}} Mf_{J'}(x)\,dx \geqq \int_{\{Mf_{J'}>(1/|J'|)\}} Mf_{J'}(x)\,dx$$
$$\geqq \frac{1}{2}\int_{1/|J'|}^{1/|J'\cap K|} \frac{1}{\alpha}\left(\int_\alpha^\infty \left|\{f_{J'} > t\}\right|\,dt\right) d\alpha$$
$$\geqq \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{|J'|}{|J'\cap K|} - \frac{1}{2},$$

d'où le résultat si ε est assez petit. Finalement,

$$\|f\|_{H^1(\mathbf{R})} \geqq C\left\{\operatorname{Log}\frac{e|J'|}{|J'\cap K|} + \operatorname{Log}\frac{e|J''|}{|J''\cap K|}\right\}.$$

Nous pouvons à présent conclure la preuve de (2)⇒(3) dans le cas où K vérifie (8). Si K vérifie (2), le théorème du graphe fermé implique qu'il existe M tel que

$$\|f\|_{H^1(\mathbf{R})} \leqq M\|f\|_{H^1(K)} \quad \text{pour toute} \quad f\in H^1(K).$$

Or si $\frac{|K\cap I|}{|I|} \leqq \varepsilon$ pour un intervalle I centré sur K, l'étude précédente fournit une fonction $f\in H^1(K)$ telle que

$$\|f\|_{H^1(\mathbf{R})} \geqq C(\log 1/\varepsilon)^{1/4}\|f\|_{H^1(K)}.$$

Si donc K vérifie (2) et (8) alors K est homogène avec une constante $\geqq e^{-cM^4}$

2ème cas: K ne vérifie pas (8). Pour tout $N>0$ on peut donc trouver un intervalle I_N centré sur K tel que

$$\frac{|K\cap I_N^{(1)}|}{|I_N^{(1)}|} \geqq N\frac{|K\cap I_N|}{|I_N|}\sqrt{\operatorname{Log}\frac{e|I_N|}{|K\cap I_N|}}.$$

En particulier on peut trouver, pour tout $\varepsilon>0$, un intervalle I centré sur K tel que $\frac{|K\cap I|}{|I|} \leqq \varepsilon$ et

$$\frac{|K\cap I^{(1)}|}{|I^{(1)}|} \geqq \frac{|K\cap I|}{|I|}\sqrt{\operatorname{Log}\frac{e|I|}{|K\cap I|}}. \tag{9}$$

Supposons tout d'abord que pour tout k,

$$\frac{|K\cap I_{(k)}|}{|I_{(k)}|} \geqq \frac{|K\cap I_{(k+1)}|}{|I_{(k+1)}|}\sqrt{\operatorname{Log}\frac{e|I_{(k+1)}|}{|K\cap I_{(k+1)}|}} \tag{10}$$

(cf. les notations en début de paragraphe). Alors, en posant $\psi(x)=x\sqrt{\operatorname{Log}\frac{e}{x}}$ et $\varphi(x)=\psi^{-1}(x)$ (ψ est une bijection croissante de $[0, 1]$ sur lui-même),

$$\frac{|K\cap I_{(k)}|}{|I_{(k)}|} \leqq \varphi^{(k)}(\varepsilon) \leqq 2^{-k} \quad \text{si } \varepsilon \text{ est assez petit.}$$

Soit alors $\{a\} = \bigcap_{k\geqq 0} \overline{I_{(k)}}$ et $\mu=\delta_a$. Alors $H_\mu(x)=\frac{1}{x-a}$ et

$$\int_{K\cap I}\frac{dx}{|x-a|} = \sum_k \int_{K\cap(I_{(k)}\setminus I_{(k+1)})}\frac{1}{|x-a|}\,dx$$
$$\leqq \sum_k 2^k|K\cap I_{(k)}| \leqq |I| \sum_k 2^{-k} < +\infty,$$

et l'on construit comme plus haut une fonction de $H^1(K)$ n'appartenant pas à $H^1(\mathbf{R})$.

On peut donc supposer qu'il existe un plus grand entier n_0 tel que (10) ait lieu pour $k \leqq n_0$. Appelons encore I cet intervalle $I_{(n_0)}$ et $J = I_{(n_0+1)}$. Alors I vérifie (9), $\frac{|K \cap I|}{|I|} \leqq \varepsilon$ et

$$\frac{|K \cap I|}{|I|} < \frac{|K \cap J|}{|J|} \sqrt{\operatorname{Log} \frac{e|J|}{|K \cap J|}}. \tag{11}$$

Posons $C_I = \sqrt{\operatorname{Log} \frac{e|I|}{|K \cap I|}}$; alors $|K \cap I^{(1)}| \geqq 2C_I |K \cap I|$ et désignons par k_0 le plus petit entier tel que

$$|K \cap I^{(k+1)}| \leqq 2C_I |K \cap I^k|.$$

Alors,

$$2^{k_0} |I| \geqq |K \cap I^{(k_0)}| \geqq (2C_I)^{k_0 - 1} |K \cap I| \Rightarrow k_0 \leqq 2 \frac{C_I^2}{\operatorname{Log} C_I}.$$

Soient J_1 et J_2 les deux composantes de $I^{(k_0)} \setminus \overline{I^{(k_0-1)}}$, $K_j = K \cap J_j$ $j = 1, 2$ et supposons $|K_1| \geqq |K_2|$. Alors:

$$\begin{aligned} 2|K_1| + |K \cap I^{(k_0-1)}| &\geqq |K \cap I^{(k_0)}| \geqq 2C_I |K \cap I^{k_0-1}| \\ \Rightarrow |K_1| &\geqq \frac{2C_I - 1}{2} |K \cap I^{(k_0-1)}| \\ \Rightarrow |K \cap I^{(k_0-1)}| &\leqq 2C_I |K \cap I^{(k_0)}| \\ &\leqq 2C_I (|K_1| + |K_2| + |K \cap I^{(k_0-1)}|) \\ &\leqq 2C_I \left(2 + \frac{2}{2C_I - 1}\right) |K_1|. \end{aligned}$$

Par conséquent, si ε est assez petit,

$$|K \cap I^{(k_0-1)}| \leqq 10 C_I |K_1|. \tag{12}$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour conclure. On pose $f = f_J - f_{J_1}$ où $f_J = \frac{1}{|K \cap J|} 1_{K \cap J}$ et $f_{J_1} = \frac{1}{|K \cap J_1|} 1_{K \cap J_1}$.

a) *Estimation de* $\|f\|_{H^1(K)}$. Comme dans le premier cas, $\int_K |f| = 2$, $\int_K f = 0$ et

$$\int_{K \cap I^{(k_0+1)}} |Hf(x)| \, dx \leqq C.$$

D'autre part, par Cauchy—Schwarz et (12),

$$\int_{K \cap I^{(k_0+1)}} |Hf_{J_1}(x)| \, dx \leqq \frac{\sqrt{|K \cap I^{(k_0+1)}|}}{\sqrt{|K \cap J_1|}} \leqq 2\sqrt{C_1}$$

et

$$\int_{K\cap I^{(k_0+1)}} |Hf_J(x)|\,dx = \int_{K\cap I} + \int_{K\cap(I^{(k_0+1)}I)}$$
$$\leqq \frac{\sqrt{|K\cap I|}}{\sqrt{|K\cap J|}} + 2\int_{|I|/2}^{2^{k_0}|I|} \frac{dx}{x}.$$

Mais, par (11), $\dfrac{|K\cap J|}{|J|} \geqq \varphi\left(\dfrac{|K\cap I|}{|I|}\right) \geqq C\,\dfrac{|K\cap I|}{|I|}\left(\operatorname{Log}\dfrac{e|I|}{|K\cap I|}\right)^{-1/2}$, d'où

$$\int_{K\cap I^{(k_0+1)}} |Hf_J(x)|\,dx \leqq C\sqrt{C_I} + Ck_0$$
$$\leqq C\sqrt{C_I} + C\,\frac{C_I^2}{\operatorname{Log} C_I}.$$

En regroupant les estimations, on obtient alors, si ε est assez petit,

$$\|f\|_{H^1(K)} \leqq C\,\frac{C_I^2}{\operatorname{Log} C_I}.$$

b) *Estimation de* $\|f\|_{H^1(\mathbf{R})}$. De même que pour le premier cas on a, en utilisant le lemme 1,

$$\|f\|_{H^1(\mathbf{R})} \geqq \int_I Mf_J(x)\,dx - C$$
$$\geqq C\operatorname{Log}\frac{e|J|}{|K\cap J|} \geqq C\operatorname{Log}\frac{e|I|}{|K\cap I|} = CC_I^2.$$

En résumé nous avons construit pour tout $\varepsilon > 0$ une fonction $f \in H^1(K)$

$$\|f\|_{H^1(\mathbf{R})} \geqq C\operatorname{Log}\operatorname{Log} 1/\varepsilon\, \|f\|_{H^1(K)}$$

dans le cas où K ne vérifie pas (8). Mais ceci contredit (2) et la preuve de (2)$\Rightarrow$(3) est finie.

Remarque. En suivant de plus près les constantes on montre que si $\|f\|_{H^1(\mathbf{R})} \leqq M\|f\|_{H^1(K)}$ alors K est ε-homogène avec $\varepsilon \geqq e^{-e^{e^{cM}}}$.

3. Démonstration de l'implication (3)$\Rightarrow$(2)

Nous commençons par deux observations.

La première est que si K est homogène alors K, muni de la distance induite par $\mathbf{R}$ et de la mesure de Lebesgue également induite par $\mathbf{R}$ est un espace de nature homogène au sens de Coifman et Weiss [6].

La deuxième observation est que dans un domaine de Denjoy on a un « principe de Harnack à la frontière ». Plus précisément, on a le

Théorème 4. (Ancona [7; p. 252].) *Soit $\Omega=\mathbf{C}\setminus K$ un domaine de Denjoy, $x\in K$ et $I=I(x,\delta)$. Posons $z_I=x+i|I|$. Soit alors u et v deux fonctions harmoniques positives et symétriques sur Ω s'annulant continûment sur $K\cap I(x,2\delta)$. Alors*

$$\frac{1}{C}\frac{u(z_I)}{v(z_I)}\leqq\frac{u(z)}{v(z)}\leqq C\frac{u(z_I)}{v(z_I)} \tag{13}$$

sur $\Omega\cap B(x,\delta)$, pour une constante $C>1$ universelle.

Les 3 propositions qui suivent sont des conséquences de ces deux observations.

Proposition 1. *Soit Ω un domaine de Denjoy, $\Omega=\mathbf{C}\setminus K$, $x\in K$ et I un intervalle centré en x. Alors si $F\subset I\cap K$ et si $z\in\Omega$, $|z-x|>2|I|$,*

$$\frac{1}{C}\frac{\omega(z_I,F,\Omega)}{\omega(z_I,K\cap I,\Omega)}\leqq\frac{\omega(z,F,\Omega)}{\omega(z,K\cap I,\Omega)}\leqq C\frac{\omega(z_I,F,\Omega)}{\omega(z_I,K\cap I,\Omega)}, \tag{14}$$

pour une constante $C>1$ universelle.

Preuve. Soit B_1 le disque de diamètre $[x-2|I|,x-|I|]$, B_2 le disque de diamètre $[x+|I|,x+2|I|]$ et $\mathscr{C}$ l'enveloppe convexe de $B_1\cup B_2$. Soit aussi x_j le centre de B_j et $Z_j=x_j+i\frac{|I|}{2}$. Par (13),

$$\frac{1}{C}\frac{\omega(z_j,F)}{\omega(z_j,K\cap I)}\leqq\frac{\omega(z,F)}{\omega(z,K\cap I)}\leqq C\frac{\omega(z_j,F)}{\omega(z_j,K\cap I)} \tag{15}$$

pour $z\in B_j$ et, par le principe de Harnack « classique »,

$$\frac{1}{C}\frac{\omega(z_I,F)}{\omega(z_I,K\cap I)}\leqq\frac{\omega(z,F)}{\omega(z,K\cap I)}\leqq C\frac{\omega(z_I,F)}{\omega(z_I,K\cap I)} \tag{16}$$

pour $z\in\partial\mathscr{C}\setminus(\partial B_1\cup\partial B_2)$.

Les inégalités (15) et (16) impliquent alors que (16) reste vrai pour $z\in\partial\mathscr{C}$; on conclut alors avec le principe du maximum.

Proposition 2. *Si K est homogène, la mesure $\omega=\omega(\infty,.,\Omega)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et $\omega=\omega(x)\,dx$ où $\omega(x)\in A^1(K)$, la classe de Muckenhoupt sur l'espace de nature homogène K.*

Cette proposition a été observée par Jones—Marshall [8], où un résultat plus fort est démontré.

Preuve. Considérons tout d'abord un domaine de Denjoy quelconque. Avec les notations de la proposition 1 et par le principe du maximum,

$$\omega(z_I,F,\Omega)\geqq\omega(z_I,F,\mathbf{R}^2_+)=\frac{1}{\pi}\int_F\frac{|I|\,dt}{(x-t)^2+|I|^2}\geqq C\frac{|F|}{|I|}.$$

Avec (14), cela implique

$$\frac{\omega(K\cap I)}{|I|} \leqq C\frac{\omega(F)}{|F|} \tag{17}$$

où l'on a abrégé $\omega(\infty, E, \Omega)$ en $\omega(E)$.

Si maintenant K est homogène, soit I un intervalle centré sur K (une boule de K), $x'\in K\cap I$ et J une boule de K centrée en x' et incluse dans I. Appelons également μ la mesure $1_K(x)\,dx$. La condition d'homogénéité ajoutée à (17) impliquent

$$\frac{1}{\mu(I)}\int_I d\omega \leqq C\,\frac{1}{\omega(J)}\int_J d\omega.$$

Ecrivons $d\omega=\omega\,d\mu+\nu$ la décomposition de Radon—Nikodym de ω par rapport à μ. Alors

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\mu(X'-\delta, x'+\delta)}\int_{x'-\delta}^{x'+\delta} d\omega = \omega(x') \quad \mu\text{-p.p.}$$

On en déduit que pour toute boule I de K on a

$$\frac{1}{\mu(I)}\int_I d\omega \leqq C\omega(x') \quad \mu\text{-p.p. sur } I. \tag{18}$$

Mais (18) implique aussitôt que $\nu\equiv 0$ et que le poids $\omega(X)\in A^1(K)$.

Proposition 3. *Soit* $g\in L^1(K, d\omega)$ *et* $u(z)=\int_K g\,d\omega(z, ., \Omega)$. *Alors* $u^*(x)\leqq C(\varepsilon)M_\omega g(x)$ *sur K où* $M_\omega g(x)=\sup_{I\ni x}\frac{1}{\omega(I\cap K)}\int_I |g|\,d\omega$.

Preuve. Si $z\in\Omega$ et $x\in K$, posons $K(z,x)=\dfrac{d\omega(z, ., \Omega)}{d\omega}$. Alors $u(z)=\int_K K(z,x)g(x)\,d\omega(x)$. Fixons un $x_0\in K$, et $z=x_0+iy$. Soit $M\geqq\frac{\varepsilon}{2}$ de sorte que si l'on pose $I_j=I(x, M^j y)\cap K$, $C_j=I_j\setminus I_{j-1}$ et $z_j=x_0+iM^j y$, on ait,

$$\omega(z_j, C_j, \Omega)\geqq\delta(\varepsilon)>0 \quad \text{si} \quad M^j y\leqq \operatorname{diam} K. \tag{19}$$

On écrit alors:

$$|u(z)|\leqq v(z)=\int_K K(z,x)\,|g(x)|\,\omega(x)\,dx=\sum\nolimits_{j\geqq 0}\int_{C_j}.$$

où l'on a posé, pour simplifier, $C_0=I_0$.

Par la proposition 1, si J est une petite boule $\subset C_j$,

$$\frac{\omega(z_j, J)}{\omega(J)}\leqq\frac{C}{\omega(I_j)}. \tag{20}$$

On veut maintenant comparer $\omega(z, F)$ avec $\omega(z_j, J)$.

Lemme 2. *Il existe* $\alpha=\alpha(\varepsilon)<1$ *telle que pour tout* $x\in K$ *et* $r<\operatorname{diam} K$,

$$\omega\big(z, \partial B(x, Mr),\ B(x, Mr)\cap\Omega\big) \leqq \alpha(\varepsilon)$$

pour $z\in\partial B(x, r)$.

Preuve du lemme. Soit $z\in\partial B(x,r)$ et $x_0\in K$ tel que $|z-x_0|=d(z,K)$. Soit $\mathcal{U}=B(x_0, 2|z-x_0|)\cap\Omega$. Alors

$$\begin{aligned}\omega\big(z, K\cap B(x, Mr),\ B(x, Mr)\cap\Omega\big) &\geqq \omega\big(z, K\cap B(x, Mr), \mathcal{U}\big)\\ &\geqq C\omega\big(z_0, K\cap B(x, Mr), \mathcal{U}\big)\end{aligned}$$

où $z_0=x_0+i|z-x_0|$, par le principe de Harnack. Mais

$$\omega\big(z_0, K\cap B(x, Mr), \mathcal{U}\big) \geqq \omega\big(z_0, K\cap B(x, Mr), \mathcal{U}\cap\mathbf{R}^2_+\big) \geqq C(\varepsilon)$$

car $|K\cap B(x, Mr)|\geqq C(\varepsilon)r$, ce qui termine la preuve du lemme 2.

Revenons à la preuve de la proposition 3.

Par le lemme 2 et le principe du maximum,

$$\omega(z, J) \leqq \alpha \sup_{z'\in\partial B(x_0, My)} \omega(z', J)$$

puis, en itérant

(21) $$\omega(z, J) \leqq \alpha^{j-1} \sup_{z'\in\partial B(x_0, M_y^{j-1})} \omega(z', J) \quad \text{si} \quad M_y^{j-1} \leqq \operatorname{diam} K.$$

Par une nouvelle application du théorème 4,

(22) $$\frac{\omega(z', J)}{\omega(z', C_j)} \leqq C\frac{\omega(z_{j-1}, J)}{\omega(z_{j-1}, C_j)} \leqq C\omega(z_{j-1}, J) \quad \text{sur} \quad \partial B(x_0, M_r^{j-1})$$

si $M^{j-1}y\leqq\operatorname{diam} K$, par (19).

Les inégalités (20), (21) et (22) impliquent alors

$$\begin{aligned}\frac{\omega(z, J)}{\omega(J)} &\leqq \frac{1}{\omega(J)}\alpha^{j-1} \sup_{\partial B(x_0, M^{j-1}y)} \omega(z', J)\\ &\leqq \frac{1}{\omega(J)}\alpha^{j-1}\omega(z_{j-1}, J)\\ &< \frac{C\alpha^j}{\omega(I_j)} \quad \text{si} \quad M^{j-1}y \leqq \operatorname{diam} K,\end{aligned}$$

d'où il découle que $K(z, x) \leqq C \dfrac{\alpha^j}{\omega(I_j)}$ sur C_j et donc que

$$\begin{aligned} v(z) &= \sum_{j \geqq 0} \int_{C_j} K(z, x)\, |g(x)|\, \omega(x)\, dx \\ &\leqq C \sum_{j;\, M^{j-1} y \leqq \operatorname{diam} K} \alpha^j \frac{1}{\omega(I_j)} \int_{I_j} |g(x)|\, d\omega(x) \\ &\leqq C M_\omega g(X). \end{aligned}$$

La proposition 3 se déduit maintenant de l'inégalité de Harnack appliquée à v.

Puisque le poids ω appartient à $A^1(K)$ et que K est de nature homogène, il existe $p_0(\varepsilon) > 0$ et $C(\varepsilon) > 0$ tels que $\forall I = I(x, \delta)$, $x \in K$, $\delta \leqq \operatorname{diam} K$,

$$\left(\frac{1}{\mu(I)} \int_I \omega(x)^{p_0}\, dx\right)^{1/p_0} \leqq C(\varepsilon) \frac{1}{\mu(I)} \int_I \omega(x)\, dx. \tag{23}$$

Soit p_0' l'exposant conjugué de p_0. Nous pouvons maintenant prouver le théorème 2 pour $p > p_0'$.

Soit en effet $g \in L^p(K)$, avec $p > p_0'$. Alors

$$\int_K |g|\, \omega \leqq \left(\int_K |g|^p\right)^{1/p} \left(\int_K \omega^{p'}\right)^{1/p'}$$

par Hölder et donc $g \in L^1(\omega)$ car $\omega \in L^{p'}(K) \subset L^{p_0}(K)$. Posons alors $u(z) = \int_K g(x)\, d\omega(z, x, \Omega)$. Par la proposition 3, $u^* \leqq C(\varepsilon) M_\omega g$. Mais

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega(I)} \int_I |g|\, \omega &\leqq \left(\frac{1}{|I|} \int_I |g|^{p_0'}\right)^{1/p_0'} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega^{p_0}\right)^{1/p_0} \frac{|I|}{\omega(I)} \\ &\leqq C\, [M(|g|^{p_0'})]^{1/p_0'}(x), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_K u^{*p}(x)\, dx &\leqq C \int_K [M(|g|^{p_0'})(x)]^{p/p_0'}\, dx \\ &\leqq C \int_K |g|^p(x)\, dx \end{aligned}$$

par le théorème de Hardy—Littlewood.

La fin de la preuve est alors standard.

Passons à la preuve de (3)⇒(2). Soit $\mu \in H^1(K)$ réelle et $F = \hat{\mu}$. Soit également p un exposant $> 2p_0'$ où p_0 est donné par (23).

Proposition 4. *Il existe une fonction u harmonique positive dans Ω telle que $|F(z)| \leqq u(z)^p$ sur Ω et telle que $u^* \in L^p(K)$.*

Preuve. Puisque μ est réelle, la fonction $|F(z)|$ est symétrique, F admet des valeurs au bord $F(x)$ presque partout sur K et $|F(x)|\in L^1(K)$. Soit $p>2p_0'$ et $g(x)=|F(x)|^{1/p}$; notons

$$u(z) = \int_K g(x)\, d\omega(z, x, \Omega).$$

Par le théorème 2 (où plutôt par sa démonstration), $u^*\in L^p(K)$. Il suffit donc de montrer que u est un majorant harmonique de $|F(z)|^{1/p}$.

Soit $\delta>0$ et $K_\delta=\overline{\bigcup_{x\in K} I(x,\delta)}$; on vérifie sans peine que K_δ est uniformément homogène et que $|K_\delta\setminus K|\xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$. Posons également $\Omega_\delta=\mathbf{C}\setminus K_\delta$.

Soit $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$, $\varphi\geqq 0$, d'intégrale 1, de support $\subset[-1/2, 1/2]$ et $\varphi_\delta(x)=\frac{1}{\delta}\varphi\left(\frac{x}{\delta}\right)$. On pose alors $f_\delta=\mu^*\varphi_\delta$ et $F_\delta(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{K_\delta}\frac{f_\delta(x)\,dx}{x-z}$. La fonction $|F_\delta|^{1/p}$ est alors sousharmonique dans Ω, continue jusqu'au bord tandis que $u_\delta(z)=\int_{K_\delta}|F_\delta(x)|^{1/p}\,d\omega(z, x, \Omega_\delta)$ est harmonique et continue jusqu'au bord dans Ω_δ. Par le principe du maximum, $|F_\delta(z)|^{1/p}\leqq u_\delta(z)$ dans Ω_δ. Il suffit alors, pour achever la preuve de la proposition 4, de montrer que u_δ converge simplement vers u dans Ω, car il est clair que F_δ converge vers F.

Tout d'abord $\mu\in H^q(\mathbf{R})$ si $\frac{1}{2}<q<1$. Par la théorie «variable réelle» des espaces de Hardy [9],

$$F^b(x) = \sup_{\delta>0}|F_\delta(x)|\in L^q(\mathbf{R}) \quad \text{si} \quad \tfrac{1}{2} < q < 1.$$

Soit d'autre part $z\in\Omega$. Alors $z\in\Omega_\delta$ si δ est assez petit et $d\omega(z, x, \Omega_\delta)=\omega_\delta^z(x)\,dx$ où $\omega_\delta^z(x)\in L^{p_0}(K_\delta)$ par la proposition 2 et (19), uniformément en δ. Par la théorie classique du potentiel ([10]), $\omega_\delta^z(x)\,dx$ converge vaguement vers $\omega^z(x)\,dx$ et, si $x\in K$, $\omega_\delta^z(x)\leqq\omega^z(x)$ par le principe du maximum. On en déduit facilement que $\omega_\delta(x)$ converge presque partout sur K vers $\omega^z(x)$. Le théorème de convergence dominée implique alors que

$$\lim_{\delta\to 0}\int_K |F_\delta(x)|^{1/p}\,\omega_\delta^z(x)\,dx = u(z).$$

Pour estimer $\int_{K_\delta\setminus K}|F_\delta(x)|^{1/p}\,\omega_\delta^z(x)\,dx$, on remarque tout d'abord, par Harnack, que cette expression est $\leqq C(z)\int_{K_\delta\setminus K}|F|^{1/p}\,\omega_\delta^\infty$ puis on considère des exposants q_1, q_2, q_3 tels que $p>q_1>\frac{p}{2}$, $q_2<p_0$ et $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}=1$.

Par Hölder,

$$\int_{K_\delta\setminus K}|F_\delta(x)|^{1/p}\,\omega_\delta^\infty(x)\,dx \leqq |K_\delta\setminus K|^{1/q_3}\Big(\int_{K_\delta}|F^b|^{q_1/p}\Big)^{1/q_1}\Big(\int_{K_\delta}(\omega_\delta^\infty)^{q_2}\Big)^{1/q_2}$$

$$\leqq C\,|K_\delta\setminus K|^{1/q_3}\xrightarrow[\delta\to 0]{} 0,$$

car $F^b \in L^{q_1/p}(\mathbf{R})$ et $\omega_\delta \in L^{q_2}$ uniformément en $\delta \geqq 0$. La proposition 4 est démontrée.

L'implication (3)⇒(2) découlera alors immédiatement de la proposition 4 et de la proposition 5 suivante:

Proposition 5. *Si K est ε-homogène et u est harmonique positive dans Ω alors*

$$\|u^+\|_{L^p(I)} \leqq C(\varepsilon)\|u^*\|_{L^p(K)}, \tag{24}$$

où I est l'intervalle double du plus petit intervalle J contenant K, et u^+ la fonction maximale radiale de u.

Preuve. Soient $\{I_j\}$ les composantes bornées de $\mathbf{R}\setminus K$. Pour chaque j on appelle Γ_j la réunion des deux segments non horizontaux du triangle équilateral inclus dans $\mathbf{R}^2_+$ et de base I_j. On considère de même Γ_- et Γ_+ associés aux intervalles J_- et J_+ de même longueur que J et le jouxtant à gauche et à droite respectivement. Enfin,

$$\Gamma = \left(\bigcup_j \Gamma_j\right) \cup [(\Gamma_+ \cup \Gamma_-) \cap (I \times \mathbf{R})].$$

Si $z \in \Gamma$ on note I_z. L'intervalle des $x \in \mathbf{R}$ tels que $z \in \Gamma(x)$. Par l'homogénéité de K et de la géométrie élémentaire,

$$\forall z \in \Gamma, \quad |I_z \cap K| \geqq C(\varepsilon)|I_z|. \tag{25}$$

Soit alors $\lambda > 0$ et $\mathscr{E}_\lambda = \{z \in \Gamma;\ u^+(z) > \lambda\}$ où $u^+(z) = \sup_{y' > y} u(x+iy')$ si $z = x+iy$. Alors

$$K \cap \left(\bigcup_{z \in \mathscr{E}_\lambda} I_z\right) \subset \{x \in K;\ u^*(x) > \lambda\}. \tag{26}$$

Par le lemme de Vitali, on peut extraire des I_z, $z \in \mathscr{E}_\lambda$ une sous famille au plus dénombrable (I_{z_j}) telle que les I_{z_j} soient deux à deux disjoints et que

$$\forall z \in \mathscr{E}_\lambda, \quad \forall j \in \mathbf{N}; \quad I_z \subset 5I_{z_j}. \tag{27}$$

Par (25),

$$\left|\{x \in K;\ u^*(x) > \lambda\}\right| \geqq \sum_j |I_{z_j} \cap K| \geqq C(\varepsilon) \sum |I_{z_j}|, \tag{28}$$

et, par (27), $\mathscr{E}_\lambda \subset \bigcup_j \widehat{10 I_{z_j}}$ où $\hat{I} = I \times [0, |I|]$, d'où

$$\Lambda'(\mathscr{E}_\lambda) \leqq \sum_j \Lambda'(\mathscr{E}_\lambda \cap \widehat{10 I_{z_j}}) \leqq C \sum |I_{z_j}|. \tag{29}$$

En regroupant (28) et (29),

$$\Lambda^1(\mathscr{E}_\lambda) \leqq C(\varepsilon)\left|\{x\in K;\ u^*(x) > \lambda\}\right|$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma u^+(z)^p \, d\Lambda'(z) = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\Lambda'(\mathscr{E}_\lambda)\, d\lambda \leqq C(\varepsilon)\int_K u^{*p}(x)\, dx.$$

Le fait que $u^+\in L^p(I)$ découle alors simplement de l'inégalité de Harnack.

Fin de la preuve de (3)⇒(2): Soit K homogène et $F\in\overline{H^1(K)}$. Puisque $F(z)=\frac{1}{2}\big(F(z)+\overline{F(\bar z)}\big)+\frac{1}{2}\big(F(z)-\overline{F(\bar z)}\big)$, on voit que l'on peut supposer $|F|$ symétrique.

Par la proposition 4, il existe $p>1$, u harmonique positive dans Ω telle que $|F|\leqq u^p$ et $u^*\in L^p(K)$. Par la proposition 5 on a même $u^+\in L^p(I)$ où I est l'intervalle double du plus petit intervalle contenant K. Donc $F^+\in L^1(I)$. Comme d'autre part $F^+(x)\leqq C\dfrac{|I|}{(x-x_0)^a}$ si $x_0\in K$ et $x\notin I$, il vient $F^+\in L^1(\mathbf{R})$ ce qui implique ([9]) que $F\in H^1(\mathbf{R}^2_+)$.

4. Démonstration (abrégée) du théorème 3

Tout d'abord le théorème 4 est vrai pour les « domaines de Denjoy » de $\mathbf{R}^{n+1}$, c'est-à-dire les domaines Ω de la forme $\mathbf{R}^{n+1}\setminus K$ où K est un compact de $\mathbf{R}^n$ (voir [7]). Il s'en suit que les propositions 1, 2, 3 admettent des versions n-dimensionnelles, et la démonstration est la même.

Le théorème 2 reste donc valable dans ce cadre. La seule différence provient de la proposition 4. Si u est une fonction harmonique, il n'est pas vrai que $|\nabla u|^\alpha$ est sous-harmonique dans $\mathbf{R}^{n+1}$ du moins si $\alpha<\dfrac{n-1}{n}$. Pour obtenir un analogue de la proposition 4, il nous faut donc faire usage de gradients d'ordre supérieur ([4], [9]) d'où la présence des transformées de Riesz d'ordre supérieur dans l'énoncé du théorème 3. Naturellement, plus α et petit plus grand est l'ordre nécessaire des gradients ce qui explique l'entier $N(\varepsilon)$ dans (i). Quant à la réciproque (ii) on remarque que vu l'hypothèse qualitative faite sur K, le paragraphe 2 reste valable pratiquement sans changement une fois que l'on a remarqué que les opérateurs R^α sont tous des opérateurs de Calderón—Zygmund [5].

Références

1. HAYMAN, W. and WU, J.-M., Level sets of univalent functions, *Comment. Math. Helv.* **56** (1981), 366—403.
2. CARLESON, L., On H^∞ in multiply-connected domains, *Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund,* vol. II, Wadsworth, (1983), 349—372.
3. JONES, P. W., $\bar\partial$ problems in domains with thick boundary, *à paraître.*
4. STEIN, E. M. and WEISS, G., *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces,* Princeton, 1971.
5. STEIN, E. M., *Singular integrals and differentiability properties of functions,* Princeton, 1970.
6. COIFMAN, R. and WEISS, G., Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977), 569—645.
7. ANCONA, A., Régularité d'accès des bouts et frontière de Martin d'un domaine euclidien, *J. Math. Pures Appl.* **63** (1984), 215—260.
8. JONES, P. W. and MARSHALL, D., Critical points of Green's function, harmonic measure, and the corona problem, *Inst. Mittag-Leffler, report* № 2, 1984.
9. FEFFERMAN, C. and STEIN, E. M., H^p spaces of several variables, *Acta Math.* **129** (1972), 137—193.
10. BRELOT, M., *Eléments de la théorie classique du potentiel,* Centre de documentation universitaire, Paris, 1959.

Received Dec. 22, 1987

M. Zinsmeister
Université de Rouen
76130 Mont Saint Aignan Cedex
et
Université Paris-Sud
Unité Associée 757
Analyse harmonique
Mathematiques (Bât. 425)
91405 Orsay Cedex
France