Comparaison des projecteurs de Bergman et Szegő et applications

A. Cumenge

Introduction

Soient $\mathbf{D}$ un domaine borné strictement pseudo-convexe de $\mathbf{C}^n$, S et B les projecteurs de Szegő et Bergman relatifs à $\mathbf{D}$. Si nous voulons comparer, pour f (0, 1)-forme $\bar{\partial}$ fermée dans $\mathbf{D}$, la solution v minimale en norme $\mathbf{L}^2(\partial\mathbf{D})$ de l'équation $\bar{\partial}_b u=f$ (ou $\bar{\partial}u=f$), soit $v=u-Su$, et la solution canonique de J. J. Kohn $u-Bu$ de cette même équation $\bar{\partial}u=f$, nous sommes amenés à comparer les projecteurs B et S.

Nous allons montrer que ces deux projecteurs sont, sur certaines classes de fonctions, proches l'un de l'autre et donnerons des estimations fines sur la différence $Su-Bu$ en fonction de $\bar{\partial}u$.

Pour cela nous cherchons à «calculer» $Su-Bu$ en fonction de $\bar{\partial}u$ seulement. Pour les domaines strictement pseudo-convexes à bord suffisamment régulier N. Kerzman et E. M. Stein (respectivement E. Ligocka) ont donné des développements asymptotiques de l'opérateur et du noyau de Szegő (respectivement Bergman). Il est alors naturel d'essayer de comparer S et B par le biais de leurs développements asymptotiques, en exhibant la partie «principale» de $B-S$ sous forme d'un opérateur intégral explicite.

Cette méthode a l'avantage de permettre des estimations par calcul direct, et ce, sans limitation au cadre $\mathbf{L}^2$ puisqu'il n'est fait appel à aucune technique hilbertienne.

Les estimations que nous obtenons sont rassemblées dans le théorème 0.1. Avant d'énoncer le théorème, précisons quelques notations. Pour $\eta\geqq 0$, $D_\eta=\{z\in\mathbf{D}'\colon r(z)<-\eta\}\subset\subset\mathbf{D}'\subset\mathbf{C}^n$, où r est strictement plurisousharmonique de classe $\mathbf{C}^m$, $m\geqq 5$, dans $\mathbf{D}'$, avec $dr(z)\neq 0$ si $z\in\partial\mathbf{D}$. On note $\mathbf{D}=\mathbf{D}_0$.

$\delta(z)$ désigne la distance de z à la frontière $\partial\mathbf{D}$ de $\mathbf{D}$. $\mathbf{H}^p(\mathbf{D})$ est l'espace usuel de Hardy. La définition des espaces de mesures $\mathbf{W}^\alpha(\mathbf{D})$, où $0\leqq\alpha\leqq 1$, est rappelée un peu plus loin dans la rubrique notations.

Théorème 0.1. *Soit* $\mathbf{D}$ *un domaine borné strictement pseudo-convexe de* $\mathbf{C}^n$, *à frontière de classe* $\mathbf{C}^m$, *où* $m \geqq 5$; *S et B désignent les projecteurs de Szegő et Bergman relatifs à* $\mathbf{D}$.

Pour $1 < p < \infty$, $\varepsilon > 0$, *il existe des constantes* $C_1 = C_1(p)$, $C_2 = C_2(p, \varepsilon)$, $C_3 = C_3(\varepsilon)$ *telles que l'on ait pour toute fonction u de* $\mathbf{C}^1(\overline{\mathbf{D}})$:

a) $\|Su - Bu\|_{H^p(D)} \leqq C_1 \sup_{0 \leqq \eta < \eta_0} \||\bar\partial u|\|_{W^{1-1/p}(D_\eta)}$.

b) $\|Su - Bu\|^p_{H^p(D)} \leqq C_2 \|\delta^{p-1-\varepsilon} |\bar\partial u|^p\|_{L^1(D)}$.

c) $\|Su - Bu\|_{H^\infty(D)} \leqq C_3 \sup \operatorname{ess}_{\mathbf{D}} \delta |\log \delta|^{1+\varepsilon} |\bar\partial u|$.

Dans le paragraphe 1, nous montrons comment on peut exprimer pour $u \in \mathbf{C}^1(\overline{\mathbf{D}})$ la différence $Bu - Su$ en fonction de $\bar\partial u$, en commençant par le cas très simple de la boule.

L'objet du paragraphe 2 est de démontrer les estimations données dans le théorème 0.1.

En application, nous montrons dans le dernier paragraphe que dans bien des cas, en fait sous toutes les conditions suffisantes connues pour que l'équation $\bar\partial u = f$ (ou $\bar\partial_b u = f$) admette une solution u dans $\mathbf{L}^p(\partial \mathbf{D})$, où $1 < p < \infty$, la solution canonique $u - Bu$ de l'équation satisfait la même estimation au bord que u et $u - Su$:

Théorème 0.2. *Le domaine* $\mathbf{D}$ *satisfait les hypothèses du théorème* 0.1. *Soit* f *une* $(0, 1)$ *forme* $\bar\partial$*-fermée dans* $\mathbf{D}$ *telle que l'équation* $\bar\partial v = f$ *admette une solution u dans* $\mathbf{L}^p(\partial \mathbf{D}) \cap \mathbf{L}^{1+\varepsilon}(\mathbf{D})$, *où* $1 < p < \infty$ *et* $\varepsilon > 0$; *dans les cas suivants* (i), (ii), (iii), *la solution canonique* $u - Bu$ *de l'équation* $\bar\partial v = f$ *satisfait encore l'estimation* $u - Bu \in \mathbf{L}^p(\partial \mathbf{D})$:

(i) $\sup_{0 \leqq \eta} \|f\|_{W^{1-1/p}(D_\eta)} < \infty$ *et* $\delta^{p/2-1} |\bar\partial r \wedge f|^p \in \mathbf{L}^1(\mathbf{D})$, *avec* $1 < p \leqq 2$.

(ii) $\sup_{0 \leqq \eta} \|f\|_{W^{1-1/p}(D_\eta)} < \infty$ *et* $\delta^{-1/2} |\bar\partial r \wedge f| \in \mathbf{W}^{1-1/p}(\mathbf{D})$, *avec* $1 < p < \infty$.

(iii) $|f| \in \mathbf{L}^k(\mathbf{D})$ *avec* $2 \leqq k < 2n+2$ *et* $p = 2nk/2n+2-k$.

Le cas $p = 2$ des théorèmes 0.1 b) et 0.2 (iii) a déjà été étudié par A. Bonami et Ph. Charpentier (voir [5]) par des techniques hilbertiennes. Dans ce même travail les auteurs comparent, pour les domaines étoilés au sens de Barrett, le projecteur de Bergman et un projecteur P de type Szegő (mais différent de S) et obtiennent des estimations $\mathbf{L}^2$ fines sur la différence $P - B$; dans le cas particulier de la boule leur projecteur P coïncide avec celui de Szegő et les estimations données dans [5] sont alors valables pour tout $p > 1$.

Ces résultats appelaient une question naturelle, nous semble-t-il, qui a motivé notre travail:

Comment obtenir sur la différence $B-S$ des estimations fines de type $\mathbf{L}^p$ pour tout $p>1$ et un domaine strictement pseudo-convexe borné quelconque?

Notons que dans le cas de la boule unité de $\mathbf{C}^n$, notre méthode permet d'obtenir très simplement l'expression exacte de $Bu-Su$ en fonction de la seule composante «normale» de $\bar\partial u$, à savoir $\bar N u$, où:

$$N = \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial}{\partial z_j};$$

nous retrouvons ainsi le résultat de [5], exprimé par la proposition suivante:

Proposition 0.1. *Soit* $\mathbf{B}$ *la boule unité de* $\mathbf{C}^n$. *Pour* $\varepsilon>0$ *et* $1<p<\infty$, *il existe des constantes* $C_4=C_4(p)$ *et* $C_5=C_5(\varepsilon)$ *telles que l'on ait pour tout* u *de* $\mathbf{C}^1(\overline{\mathbf{D}})$:

a) $\|Su-Bu\|_{H^p(\mathbf{B})} \leqq C_4 \sup\limits_{0\leqq\eta\leqq\eta_0} \|\bar N u\|_{W^{1-1/p}(\mathbf{B}_\eta)}$;

b) $\|Su-Bu\|_{H^\infty(\mathbf{B})} \leqq C_5 \sup\operatorname{ess}_{\mathbf{B}} \delta|\log\delta|^{1+\varepsilon}|\bar N u|$.

Notations et définitions

$\mathbf{A}^p(\mathbf{D})$ désigne l'espace de Bergman des fonctions holomorphes dans $\mathbf{D}$ appartenant à $\mathbf{L}^p(\mathbf{D})$.

$\Gamma^\alpha(\mathbf{D})$, ou $\Gamma^\alpha(\partial\mathbf{D})$, est l'espace des fonctions holomorphes dans $\mathbf{D}$ appartenant à la classe usuelle de Lipschitz $\Lambda^\alpha(\mathbf{D})$.

$\mathbf{W}^0(\mathbf{D})$ désigne l'espace des mesures bornées sur $\mathbf{D}$, $\mathbf{W}^1(\mathbf{D})$ celui des mesures de Carleson dans $\mathbf{D}$. (La définition des mesures de Carleson est rappelée au paragraphe 2. a)).

L'interpolé réel $\mathbf{W}^\alpha(\mathbf{D})=[\mathbf{W}^0(\mathbf{D}),\mathbf{W}^1(\mathbf{D})]_{(\alpha,p)}$, où $1<p<\infty$ et $\alpha=1-1/p$, est introduit dans [3] et peut être caractérisé de la manière suivante:

$$\text{(0.1)}\qquad \begin{aligned} &\text{Pour } 1<p<\infty: \\ &v\in\mathbf{W}^{1-1/p}(\mathbf{D}) \leftrightarrow \exists\mu\in\mathbf{W}^1(\mathbf{D}),\quad \exists h\in\mathbf{L}^p(\mu)/v=h\mu. \end{aligned}$$

Nous identifierons souvent une fonction v intégrable sur $\mathbf{D}$ et la mesure $v\lambda$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{D}$.

Si w est une fonction poids positive définie sur $\mathbf{D}$, $\mathbf{L}^p(w)$ désignera l'espace des fonctions mesurables sur $\mathbf{D}$ telles que:

$$\int_{\mathbf{D}} w|u|^p\,d\lambda<\infty.$$

Si $f=\sum_{\substack{|I|=m\\|J|=q}} f_{m,q}\,dz^I\wedge d\bar z^J$ est une (m,q) forme sur $\mathbf{D}$ nous notons classiquement:

$$|f|^2 = \sum_{\substack{|I|=m \\ |J|=q}} |f_{m,q}|^2.$$

Nous identifierons souvent formes de degré total maximum et mesures. Nous désignerons par:

(0.2) $e_j(\zeta, z)$, où $j \geqq 0$, toute forme différentielle de classe $\mathbf{C}^\infty$ sur $\overline{\mathbf{D}}\times\overline{\mathbf{D}}$ telle que: $|e_j(\zeta, z)| = O(|\zeta - z|^j)$.

Lorsqu'il existe une constante A indépendante de Φ et φ telle que $\Phi \leqq A\varphi$ nous utiliserons la notation standard $\Phi \lesssim \varphi$; $\Phi \approx \varphi$ signifie que l'on a: $\Phi \lesssim \varphi$ et $\Phi \gtrsim \varphi$.

1. Expression de $(S-B)(u)$ en fonction de $\bar\partial u$

1. a) Cas de la boule unité $\mathbf{B}$ de $\mathbf{C}^n$.

Les noyaux de Szegő $\mathscr{S}$ et de Bergman $\mathscr{B}$ sont explicites:

$$\mathscr{S}(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \frac{1}{(1-\bar\zeta z)^n}, \quad \zeta \in \partial\mathbf{B}, \quad z \in \partial\mathbf{B}$$

$$\mathscr{B}(\zeta, z) = \frac{n!}{\pi^n} \frac{1}{(1-\bar\zeta z)^{n+1}}, \quad \zeta \in \mathbf{B}, \quad z \in \mathbf{B}.$$

$\mathscr{S}(\zeta, z)d\sigma(\zeta)$ peut s'écrire comme une forme de Cauchy—Fantappié associée à la section $g=(\bar\zeta_1, \dots, \bar\zeta_n)$ du fibré de Cauchy—Leray au-dessus de $\overline{\mathbf{B}}\times\overline{\mathbf{B}} - \Delta_{\partial\mathbf{B}}$:

$$(1.1) \quad \mathscr{S}(\zeta, z)\, d\sigma(\zeta) = \Omega(\zeta, z) = (2i\pi)^{-n} \frac{\left(\sum_{j=1}^n \bar\zeta_j\, d\zeta_j\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^n d\bar\zeta_j \wedge d\zeta_j\right)^{n-1}}{(1-\bar\zeta z)^n}.$$

Soit $u \in \mathbf{C}^1(\overline{\mathbf{B}})$; nous obtenons en appliquant la formule de Stokes:

$$Su(z) = \int_{\partial\mathbf{B}} u(\zeta)\Omega(\zeta, z) = \int_{\mathbf{B}} u(\zeta)\bar\partial_\zeta \Omega(\zeta, z) + \int_{\mathbf{B}} \bar\partial u(\zeta) \wedge \Omega(\zeta, z).$$

Remarquons que:

$$\bar\partial u(\zeta) \wedge \left(\sum_{j=1}^n \bar\zeta_j\, d\zeta_j\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^n d\bar\zeta_j \wedge d\zeta_j\right)^{n-1} = (n-1)!\, \bar N u \prod_{j=1}^n d\bar\zeta_j \wedge d\zeta_j$$

où

$$N = \sum_{j=1}^n \zeta_j \frac{\partial}{\partial \zeta_j}$$

et $\bar\partial_\zeta \Omega(\zeta, z) = \mathscr{B}(\zeta, z) d\lambda(\zeta)$.

Nous avons donc:

$$(S-B)u(z) = (n-1)!\,\pi^{-n} \int_{\mathbf{B}} \frac{\bar{N}u(\zeta)\,d\lambda(\zeta)}{(1-\bar{\zeta}z)^n}. \tag{1.2}$$

1. b) Cas général d'un domaine strictement pseudo-convexe borné.

Lorsque $\mathbf{D}$ est un domaine strictement pseudo-convexe borné de $\mathbf{C}^n$, $\mathscr{S}(\zeta, z)d\sigma(\zeta)$ n'est pas en général une forme de Cauchy—Fantappié; toutefois N. Kerzman et E. M. Stein ont donné dans [10] pour le noyau de Szegő un développement asymptotique dont le terme principal $\varkappa$ est donné par une forme de Cauchy—Fantappié. Suivant la même méthode, E. Ligocka a donné dans [11] un développement asymptotique pour les noyau et opérateur de Bergman.

Nous utilisons ici pour $\varkappa$ un noyau de Henkin et ferons appel au lemme ci-dessous de G. M. Henkin et J. Leiterer ([9] 3.1.1).

Nous notons $A(\zeta, z)$ le polynôme d'Övrelid relatif à $\mathbf{D}$.

$$\left[\begin{array}{l} A(\zeta, z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial \zeta_j}(\zeta)(\zeta_j - z_j) - 1/2 \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial \zeta_j \partial \zeta_k}(\zeta)(\zeta_j - z_j)(\zeta_k - z_k), \\ \qquad\qquad (\zeta, z) \in \mathbf{D}' \times \mathbf{C}^n. \end{array}\right. \tag{1.3}$$

$$\left[\begin{array}{l} \exists \varepsilon_0 > 0, \quad \exists C > 0 / \mathrm{Re}\, A(\zeta, z) \geqq \frac{r(\zeta)}{2} - \frac{r(z)}{2} + C|\zeta - z|^2, \\ \qquad\qquad \forall (\zeta, z) \in D' \times D' / |\zeta - z| \leqq 2\varepsilon_0. \end{array}\right. \tag{1.4}$$

Lemme 1.1 [9].

a) *Il existe un voisinage* $\mathbf{U}_0$ *de* $\partial\mathbf{D}$ *et des fonctions* $F_0(\zeta, z)$, $F(\zeta, z)$, $C_0(\zeta, z)$ *et* $C(\zeta, z)$ *de classe* $\mathbf{C}^{m-2}$ *sur* $\mathbf{U}_0 \times (\mathbf{U}_0 \cup \mathbf{D})$ *telles que:*

(i) $F_0(\zeta, z)$ *et* $F(\zeta, z)$ *sont holomorphes en* $z \in \mathbf{U}_0 \cup \mathbf{D}$ *pour tout* ζ *de* $\mathbf{U}_0$.

(ii) $F_0(\zeta, z) \neq 0$ *et* $F(\zeta, z) \neq 0$ *si* $\zeta \in \mathbf{U}_0$, $z \in \mathbf{U}_0 \cup \mathbf{D}$, $|\zeta - z| \geqq \varepsilon_0$.

(iii) $C_0(\zeta, z) \neq 0$ *et* $C(\zeta, z) \neq 0$ *si* $\zeta \in \mathbf{U}_0$, $z \in \mathbf{U}_0 \cup \mathbf{D}$.

(iv) $F_0(\zeta, z) = C_0(\zeta, z) A(\zeta, z)$ *et* $F(\zeta, z) = C(\zeta, z)[-r(\zeta) + A(\zeta, z)]$ *si* $\zeta \in \mathbf{U}_0$, $z \in \mathbf{U}_0 \cup \mathbf{D}$, $|\zeta - z| \leqq \varepsilon_0$.

(v) $F_0(\zeta, z) = F(\zeta, z)$ (*et* $C_0(\zeta, z) = C(\zeta, z)$) *si* $\zeta \in \partial\mathbf{D}$, $z \in \mathbf{U}_0 \cup \mathbf{D}$.

(vi) $C_0(\zeta, \zeta) = C(\zeta, \zeta) = 1$ *si* $\zeta \in \mathbf{U}_0$.

b) *Il existe un voisinage* $\mathbf{U} \subset\subset \mathbf{U}_0$ *de* $\partial\mathbf{D}$ *et des fonctions* $f_j(\zeta, z)$, $j = 1, \ldots, n$, *de classe* $\mathbf{C}^{m-2}$ *sur* $\mathbf{U} \times (\mathbf{U} \cup \mathbf{D})$ *holomorphes en* $z \in \mathbf{U} \cup \mathbf{D}$ *telles que:*

$$F_0(\zeta, z) = \sum_{j=1}^{n} f_j(\zeta, z)(\zeta_j - z_j).$$

(La propriété (vi) n'est pas mentionnée dans [9] mais il n'est pas contraignant de la supposer vérifiée.)

Il a été remarqué dans [10] que l'on a:

$$-r(\zeta)+A(\zeta,z)+r(z)-\overline{A(z,\zeta)} = O(|\zeta-z|^3) \quad \text{pour} \quad (\zeta,z)\in\overline{\mathbf{D}}\times\overline{\mathbf{D}}.$$

Nous aurons alors en tenant compte du lemme 1.1:

$$(1.5)\quad \begin{aligned} F_0(\zeta,z)-\overline{F_0(z,\zeta)} &= O(1)[|\zeta-z|^3+|\zeta-z|\,|F_0(\zeta,z)|], \quad \text{si} \quad \zeta\in\partial\mathbf{D}, \quad z\in\partial\mathbf{D} \\ F(\zeta,z)-\overline{F(z,\zeta)} &= O(1)[|\zeta-z|^3+|\zeta-z|\,|F(\zeta,z)|], \quad \text{si} \quad (\zeta,z)\in\overline{\mathbf{D}}\times\overline{\mathbf{D}}. \end{aligned}$$

Posons:

$$f(\zeta,z) = \sum_{j=1}^n f_j(\zeta,z)\,d\zeta_j$$

$$(1.6)\quad \varkappa(\zeta,z) = (2i\pi)^{-n}\frac{f\wedge(\bar\partial_\zeta f)^{n-1}}{F_0(\zeta,z)^n} = \frac{v_0(\zeta,z)}{F_0(\zeta,z)^n}, \quad \zeta\in\partial\mathbf{D}, \quad z\in\mathbf{D}$$

$$\mathscr{L}(\zeta,z) = (2i\pi)^{-n}\bar\partial_\zeta\left[\frac{X(\zeta)f(\zeta,z)\wedge\left(\bar\partial_\zeta(X(\zeta)f(\zeta,z))\right)^{n-1}}{F(\zeta,z)^n}\right] = \frac{v(\zeta,z)}{F(\zeta,z)^{n+1}},$$

$$(\zeta,z)\in\overline{\mathbf{D}}\times\overline{\mathbf{D}}\setminus\Delta_{\partial\mathbf{D}},$$

où $X(\zeta)\equiv 1$ sur $\mathbf{U}'$ ouvert $\subset\subset \mathbf{U}, \mathbf{U}'$ voisinage de $\partial\mathbf{D}$

$X(\zeta)\equiv 0$ hors de $\mathbf{U}$ et $X\in C^{m-2}(\mathbf{U}\cup\mathbf{D}, [0,1])$.

Nous avons (cf. [10] 2.5):

$$v_0(\zeta,z) = \gamma_n\left(i\partial r(\zeta)\right)\wedge\left(i\partial\bar\partial r(\zeta)\right)^{n-1}+e_1(\zeta,z) \quad (\text{où } \gamma_n\in\mathbf{R})$$

$$v_0(\zeta,z) = a_0(\zeta)\,d\sigma(\zeta)+e_1(\zeta,z)$$

(1.7) où $a_0(\zeta)\in\mathbf{R}_+^*$, $\forall\zeta\in\mathbf{U}$; $a_0\in\mathbf{C}^{m-2}(\mathbf{U})$

e_1 est une forme différentielle telle que $|e_1(\zeta,z)| = O(|\zeta-z|)$

de même:

$$v(\zeta,z) = \gamma_n nX(\zeta)C(\zeta,\zeta)\bar\partial r(\zeta)\wedge i\partial r(\zeta)\wedge\left(i\partial\bar\partial r(\zeta)\right)^{n-1}+e_1'(\zeta,z)$$

(1.8)

$$v(\zeta,z) = nX(\zeta)a_0(\zeta)\,d\lambda(\zeta)+e_1'(\zeta,z)$$

où e_1' est telle que $|e_1'(\zeta,z)| = O(1)[|F(\zeta,z)|+|\zeta-z|]$.

Définissons pour $u\in\mathbf{L}^p(\partial\mathbf{D})$, $p>1$, la fonction Hu par:

$$(1.9)\quad Hu(z) = \int_{\partial\mathbf{D}} u(\zeta)\varkappa(\zeta,z), \quad \text{où} \quad z\in D.$$

D'après [10] (Th. 2.4.4, Th. 3.2.1, Th. 3.3.2 et § 2.5) la fonction Hu appartient à l'espace de Hardy $\mathbf{H}^p(\mathbf{D})$ et admet une valeur au bord (par limite non tangentielle) $\check{H}u$, où l'opérateur $\check{H}$ est défini par une intégrale singulière et représente la partie principale du projecteur de Szegő S; dans la suite nous noterons encore H et non $\check{H}$ cette partie principale. Nous avons plus précisément:

Proposition 1.1 [10].

a) *Pour tout* $k\in\mathbf{N}$, *le projecteur* S *de* $\mathbf{L}^2(\partial\mathbf{D})$ *sur* $\mathbf{H}^2(\mathbf{D})$ *s'écrit sous la forme:*

$$S = H+H\Gamma+\ldots+H\Gamma^k+S\Gamma^{k+1}$$

où Γ *est un opérateur continu de* $\mathbf{L}^p(\partial\mathbf{D})$ *dans* $\mathbf{L}^q(\partial\mathbf{D})$ *pour* $1<p<+\infty$ *et* $1/q=1/p-1/2n$, *de* $\mathbf{L}^p(\partial\mathbf{D})$ *dans* $\Lambda^c(\partial\mathbf{D})$ *pour* $p>2n$ *et* $c=1/2-n/p$, *de* $\Lambda^c(\partial\mathbf{D})$ *dans* $\Lambda^{c+1/2}(\partial\mathbf{D})$ *pour* $0<c<m-4$.

Le noyau $\mathscr{G}$ *de* Γ *est défini pour* $(\zeta, z)\in\partial\mathbf{D}\times\partial\mathbf{D}-\Delta_{\partial\mathbf{D}}$ *par:*

$$\mathscr{G}(\zeta, z) = \frac{e_1(\zeta, z)}{F_0(\zeta, z)^n}+\frac{e_1(\zeta, z)}{\overline{F_0(z, \zeta)}^n}+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left(F_0(\zeta, z)-\overline{F_0(z, \zeta)}\right)e_0(\zeta, z)}{F_0(\zeta, z)^{n-j}\overline{F_0(z, \zeta)}^{j+1}}.$$

b) *H et S sont des projecteurs continus de* $\mathbf{L}^p(\partial\mathbf{D})$ *dans* $\mathbf{H}^p(\mathbf{D})$ *pour* $1<p<\infty$, *de* $\Lambda^c(\partial\mathbf{D})$ *dans* $\Gamma^c(\partial\mathbf{D})$ *pour* $0<c<m-4$.

Remarque 1.1. Dans le développement asymptotique de S, nous avons considéré S et H comme des opérateurs de $\mathbf{L}^p(\partial\mathbf{D})$ $(1<p<+\infty)$ dans $\mathbf{H}^p(\mathbf{D})$ ce qui est justifié grâce aux théorèmes de [10] invoqués plus haut. Par ailleurs dans [10] le domaine D est supposé à frontière de classe $\mathbf{C}^\infty$ mais les résultats de la proposition 1.1 restent valables avec $\partial\mathbf{D}$ de classe $\mathbf{C}^m$, $m\geqq 5$.

L'opérateur L défini pour $u\in\mathbf{L}^p(\mathbf{D})$, où $p>1$, par:

$$Lu(z) = \int_{\mathbf{D}} u(\zeta)\mathscr{L}(\zeta, z) \tag{1.10}$$

représente la partie principale du projecteur de Bergman.

L'opérateur L' envisagé dans [11] n'est pas exactement celui envisagé ici mais (1.5), (1.6), (1.8) et le lemme 1.1 prouvent que L satisfait les mêmes propriétés que L' et nous avons:

Proposition 1.2 [11].

a) *Pour tout* $k\in\mathbf{N}$, *le projecteur de Bergman de* $\mathbf{L}^2(\mathbf{D})$ *sur* $\mathbf{A}^2(\mathbf{D})$ *s'écrit:*

$$B = L+L\Delta+\ldots+L\Delta^k+B\Delta^{k+1}$$

où Δ *est un opérateur continu de* $\mathbf{L}^p(\mathbf{D})$ *dans* $\mathbf{L}^q(\mathbf{D})$ *pour* $1<p<2n+2$ *et* $1/q=1/p-1/(2n+2)$, *de* $\mathbf{L}^p(\mathbf{D})$ *dans* $\Lambda^{1/2-(n+1)/p}(\mathbf{D})$ *si* $p>2n+2$, *de* $\Lambda^c(\mathbf{D})$ *dans* $\Lambda^{c+1/2}(\mathbf{D})$ *pour* $0<c<m-4$.

Le noyau $\mathscr{D}$ de Δ s'écrit pour $(\zeta, z)\in \mathbf{D}\times\overline{\mathbf{D}}$:

$$\mathscr{D}(\zeta, z) = \frac{e_1(\zeta, z)}{F(\zeta, z)^{n+1}} + \frac{e_1(\zeta, z)}{\overline{F(z, \zeta)}^{n+1}} + \sum_{j=0}^{n} \frac{(F(\zeta, z)-\overline{F(z, \zeta)})e_0(\zeta, z)}{F(\zeta, z)^{n+1-j}\overline{F(z, \zeta)}^{j+1}}.$$

b) *L et B sont des projecteurs continus de* $\mathbf{L}^p(\mathbf{D})$ *sur* $\mathbf{A}^p(\mathbf{D})$ $(1<p<+\infty)$ *de* $\Lambda^c(\mathbf{D})$ *dans* $\Gamma^c(\mathbf{D})$ *pour* $0<c<m-4$.

Posons pour $(\zeta, z)\in\overline{\mathbf{D}}\times\overline{\mathbf{D}}\setminus\Delta_{\partial D}$:

(1.11) $$\mathscr{E}(\zeta, z) = \frac{1}{(2i\pi)^n}\frac{X(\zeta)f(\zeta, z)\wedge[\bar\partial_\zeta(X(\zeta)f(\zeta, z))]^{n-1}}{F(\zeta, z)^n}.$$

Tenant compte de (1.6), nous déduisons de la formule de Stokes, pour $u\in\mathbf{C}^1(\overline{\mathbf{D}})$, $z\in\mathbf{D}$:

$$Hu(z) = \int_{\partial\mathbf{D}} u(\zeta)\varkappa(\zeta, z) = \int_{\partial\mathbf{D}} u(\zeta)\mathscr{E}(\zeta, z) = \int_{\mathbf{D}} u(\zeta)\mathscr{L}(\zeta, z)+\int_{\mathbf{D}}\bar\partial u(\zeta)\wedge\mathscr{E}(\zeta, z).$$

Les fonctions Hu et Lu admettant, pour $u\in\mathbf{C}^1(\overline{\mathbf{D}})$, des valeurs au bord par limite non tangentielle, nous pouvons valider la formule ci-dessus pour $z\in\partial\mathbf{D}$ et écrire:

(1.12) $$\begin{cases}(H-L)(u) = E(\bar\partial u) \quad \text{pour} \quad u\in\mathbf{C}^1(\overline{\mathbf{D}})\\ \text{où} \quad E(\bar\partial u)(z) = \int_{\mathbf{D}}\bar\partial u(\zeta)\wedge\mathscr{E}(\zeta, z), \quad z\in\overline{\mathbf{D}}.\end{cases}$$

Notons $R=S-H$, $R'=B-L$ et vérifions que $(R-R')(u)$ ne dépend que de $\bar\partial u$. D'après les formules de type Koppelman—Leray, u admet une décomposition de la forme:

(1.13) $$u = Pu+M(\bar\partial u), \quad \text{où } Pu \text{ est holomorphe dans } \mathbf{D}.$$

Pu est, par exemple, dans $\mathbf{C}^0(\overline{\mathbf{D}})$ si $u\in\mathbf{C}^1(\overline{\mathbf{D}})$;

Comme

$$(S-B)(Pu) = 0 = (H-L)(Pu),$$

nous aurons:

$$(R-R')(u) = (R-R')M(\bar\partial u)$$

et

(1.14) $$\begin{cases}\text{Pour} \quad u\in\mathbf{C}^1(\overline{\mathbf{D}}): \\ \qquad (S-B)(u) = E(\bar\partial u)+RM(\bar\partial u)-R'M(\bar\partial u)\\ \text{où} \quad R = H\Gamma+\ldots+H\Gamma^k+S\Gamma^{k+1}, \quad R' = L\Delta+\ldots+L\Delta^{k'}+B\Delta^{k'+1}, \quad k, k'\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$$

Remarque 1.2. Il est possible par des procédés standard d'affaiblir les hypothèses faites sur u; la formule (1.14) et tous les résultats du paragraphe 2 ci-après sont valables dès que u satisfait, par exemple, les hypothèses suivantes, avec $p>1$:

$$u\in\mathbf{C}^0(\mathbf{D}), \quad \sup\{\|u\|_{L^p(\partial D_\eta)}+\||\bar\partial u|\|_{W^{1-1/p}(D_\eta)}, \ 0\leq\eta\leq\eta_0\}<+\infty.$$

2. Estimations sur $(B-S)(u)$

Nous allons prouver le théorème 0.1 en étudiant successivement la partie principale $E(\bar\partial u)$, puis le terme d'erreur $(R-R')M(\bar\partial u)$.

2. a) Etude de $E(\bar\partial u)$.

Proposition 2.1. *Soient* $1<p<+\infty$, $\varepsilon>0$, $1<k\leqq q\leqq+\infty$; *il existe des constantes* $C=C(p,\varepsilon)$, $C'=C'(\varepsilon)$, $C''=C''(k,q)$, $C'''=C'''(k)$ *telles que l'on ait pour toute* $(0,1)$*-forme* v *sur* $\mathbf{D}$:

a) $\|E(v)\|_{H^p(D)}^p \leqq C\|\delta^{p-1-\varepsilon}|v|^p\|_{L^1(D)}$

b) $\|E(v)\|_{H^\infty(D)} \leqq C' \sup\operatorname{ess}_{\mathbf{D}} \delta|\log\delta|^{1+\varepsilon}|v|$

c) $\|E(v)\|_{H^q(D)} \leqq C''\||v|\|_{L^k(D)}$, *si* $1<k\leqq n+1$ *et* $k\leqq q<nk/(n+1-k)$

$\|E(v)\|_{\Gamma^c(D)} \leqq C'''\||v|\|_{L^k(D)}$, *si* $k>n+1$ *et* $c=1-(n+1)/k$.

Nous avons l'estimation classique suivante dans laquelle $\Phi(\zeta,z)=-r(\zeta)+A(\zeta,z)$:

$$\text{Pour}\quad (\zeta,z)\in\mathbf{U}\times\overline{\mathbf{D}},\quad |\zeta-z|<\varepsilon_0$$

$$|F(\zeta,z)| \approx -r(\zeta)-r(z)+|\operatorname{Im}A(\zeta,z)|+|\zeta-z|^2 \approx |\Phi(\zeta,z)|. \tag{2.1}$$

$$\text{Pour}\quad (\zeta,z)\in\mathbf{U}\times\mathbf{U},\quad |\zeta-z|<\varepsilon_0:\quad |F(\zeta,z)|\approx|F(z,\zeta)|.$$

Le changement de variables usuel $(\zeta_1,\dots,\zeta_n)\mapsto(t_1+it_2,\dots)$

$$\text{où}\quad t_1=r(\zeta)-r(z),\quad t_2=\operatorname{Im}A(\zeta,z),\quad t_{2k-1}+it_{2k}=\zeta_{j_k}-z_{j_k},\quad k=2,\dots,n \tag{2.2}$$

a un jacobien $J_z(\zeta)$ non nul et uniformément borné en

$$z\in\overline{\mathbf{D}}-\mathbf{D}_{\eta_0},\quad \zeta\in B(z,\sigma)\quad (\eta_0>0,\ \sigma>0).$$

Pour $\eta\in[0,\eta_0]$, $\partial\mathbf{D}_\eta\cap B(z,\sigma)$ peut de même être paramétré par $(t_2,t_3,\dots,t_{2n})$.

Rappelons les estimations, très classiques, suivantes (voir par exemple [7], [8]).

Pour $\alpha>-1$, $\beta\in\mathbf{R}$ et $z\in\mathbf{D}$:

$$\int_{\mathbf{D}}\frac{(-r(\zeta))^\alpha\,d\lambda(\zeta)}{|F(\zeta,z)|^{n+1+\beta}} = \begin{cases} O(1) & \text{uniformément en } z\in\overline{\mathbf{D}} \text{ si } \alpha>\beta\\ O(1)\,|\log(-r(z))| & \text{si } \alpha=\beta\\ O(1)(-r(z))^{\alpha-\beta} & \text{si } \alpha<\beta.\end{cases} \tag{2.3}$$

Pour $\alpha>-1$, $\beta\in\mathbf{R}$ et $z\in\mathbf{D}$:

$$\sup_{0\leqq\eta\leqq\eta_0}\int_{\partial\mathbf{D}_\eta}\frac{d\sigma_\eta(\zeta)}{|F(\zeta,z)|^{n+\beta}} = \begin{cases} O(1) & \text{uniformément en } z\in\overline{\mathbf{D}} \text{ si } \beta<0\\ O(1)\,|\log(-r(z))| & \text{si } \beta=0\\ O(1)(-r(z))^{-\beta} & \text{si } \beta>0.\end{cases} \tag{2.4}$$

Preuve de a) et b)

$E(v)$ étant une fonction holomorphe, il suffit d'évaluer lorsque $1<p<\infty$:

$$\sup_{0\leqq\eta\leqq\eta_0} \|E(v)\|_{L^p(\partial D_\eta)}.$$

L'estimation du a) découle immédiatement de (2.3) et (2.4) après application de l'inégalité de Hölder; le b) s'obtient aisément à l'aide du changement de variables (2.2).

Remarque. L'estimation a) est en fait conséquence de la proposition 2.2 b) ci-après. En effet, il est immédiat de vérifier en utilisant la caractérisation (0.1) des espaces $\mathbf{W}^\alpha(\mathbf{D})$ l'inclusion suivante:

$$L^p(\delta^{1-1/p-\varepsilon/p})\subset \mathbf{W}^{1-1/p}(\mathbf{D}) \quad \text{où} \quad \varepsilon>0 \quad \text{et} \quad 1<p<+\infty.$$

L'analogue de cette inclusion pour D_η $(\eta>0)$ reste vraie et l'on a de plus pour toute fonction mesurable g:

$$\sup_{0\leqq\eta\leqq\eta_0} \||g|\|^p_{W^{1-1/p}(D_\eta)} \lesssim \|\delta^{p-1-\varepsilon}|g|^p\|_{L^1(D)}. \tag{2.5}$$

Preuve de c)

Supposons $1<k\leqq q<nk/(n+1-k)$ et posons:

$$1/q_1=1/q, \quad 1/q_2=1-1/k, \quad 1/q_3=1/k-1/q.$$

Nous déduisons de l'inégalité de Hölder:

$$|E(v)|^q \lesssim (\||v|\|_{L^k(D)})^{q/q_3}\left[\int_{\mathbf{D}} \frac{|v(\zeta)|^k\, d\lambda(\zeta)}{|F(\zeta,z)|^{n-\theta q}}\right]\left[\int_{\mathbf{D}} \frac{d\lambda(\zeta)}{|F(\zeta,z)|^{y}}\right]^{q/q_2}$$

où

$$y=n\frac{k\cdot(q-1)}{q\cdot(k-1)}+\theta\frac{k}{k-1}.$$

Il suffit de choisir $\theta>0$ et de tenir compte de (2.3) et (2.4) pour obtenir l'estimation cherchée.

Lorsque $k>n+1$, il suffit de vérifier l'estimation suivante:

$$|\operatorname{grad} E(v)(z)|=O(1)(-r(z))^{-(n+1)/k}.$$

Remarque 2.1. La proposition 0.1 b) n'est autre que le b) de la proposition 2.1, si l'on tient compte de l'expression (1.2) de $S-B$ dans le cas de la boule unité de $\mathbf{C}^n$.

Proposition 2.2. *Pour* $1<p<+\infty$, *il existe* $C>0$ *telle que pour toute* $(0,1)$ *forme* v:

a) $\|E(v)\|_{L^p(\partial D)} \leqq C \| |v| \|_{W^{1-1/p}(D)}$

b) $\sup\limits_{0\leqq\eta\leqq\eta_0} \|E(v)\|_{L^p(\partial D_\eta)} \leqq C \sup\limits_{0\leqq\eta\leqq\eta_0} \| |v| \|_{W^{1-1/p}(D_\eta)}$.

Nous ne détaillerons que la preuve du a), celle du b) étant analogue. Le noyau $\mathscr{E}$ défini par (1.11) s'écrit, compte-tenu de (1.5) et (2.1), sous la forme:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 + \mathscr{E}_1,$$

où

$$\mathscr{E}_0(\zeta, z) = \left(\frac{X(\zeta)}{2\pi}\right)^n \frac{i\partial r(\zeta) \wedge \left(i\partial\bar{\partial} r(\zeta)\right)^{n-1}}{\overline{F(z,\zeta)}^n} = \frac{\beta(\zeta)}{\overline{F(z,\zeta)}^n}$$

et

$$|\mathscr{E}_1(\zeta, z)| \leqq \frac{cste}{|F(\zeta, z)|^{n-1/2}}.$$

Posons: $E_j v(z) = \int_{\mathbf{D}} v(\zeta) \wedge \mathscr{E}_j(\zeta, z)$ pour $j=0$ ou 1.

► Le noyau $\mathscr{E}_1$ étant très régulier, le terme $E_1 v$ s'estime aisément grâce au lemme 2.1 ci-après.

► Le noyau $\mathscr{E}_0$ portant toute la singularité de $\mathscr{E}$, l'étude de $E_0 v$ demande un lemme plus technique.

Faisons tout d'abord la remarque suivante:

$$v(\zeta) \wedge \beta(\zeta) = \mu_v(\zeta)\, d\lambda(\zeta)$$

où

$$\| |\mu_v|\, d\lambda \|_{W^{1-1/p}(D)} \leqq cste(\mathbf{D}) \| |v| \|_{W^{1-1/p}(D)}.$$

Le fait que E_0 est un opérateur continu de $\mathbf{W}^{1-1/p}_{(0,1)}(\mathbf{D})$ dans $\mathbf{L}^p(\partial\mathbf{D})$ découle du théorème 2 de [3], d'après lequel:

(2.6) La balayée d'une mesure de $\mathbf{W}^{1-1/p}(\mathbf{D})$, $1<p<\infty$, par un noyau $\mathscr{P}$ est dans $\mathbf{L}^p(\partial\mathbf{D})$ dès que $\mathscr{P}$ satisfait la condition $(\mathscr{C}_1)$ rappelée dans la définition 2.2 donnée ci-après.

Le lemme 2.2 ci-dessous prouve que $\mathscr{E}_0$ satisfait $(\mathscr{C}_1)$.

Avant d'énoncer les lemmes 2.1 et 2.2, précisons quelques notations.

Définition 2.1. On appelle noyau de type α tout noyau $\mathscr{P}$ sur $\overline{\mathbf{D}}\times\overline{\mathbf{D}}$ tel que

$$|\mathscr{P}(\zeta, z)| = O(1)|F(\zeta, z)|^{-n+\alpha} \quad \text{sur} \quad \mathscr{U}_{\varepsilon_0},$$

$$|\mathrm{grad}_z \mathscr{P}(\zeta, z)| = O(1)|F(\zeta, z)|^{-n+\alpha-1} \quad \text{sur} \quad \mathscr{U}_{\varepsilon_0},$$

$$|\mathscr{P}(\zeta, z)| + |\mathrm{grad}_z \mathscr{P}(\zeta, z)| = O(1) \quad \text{sur} \quad \overline{\mathbf{D}}\times\overline{\mathbf{D}} - \mathscr{U}_{\varepsilon_0}$$

avec

$$\mathscr{U}_{\varepsilon_0} = \{(\zeta, z) \in U_0 \times U_0 / |\zeta - z| < \varepsilon_0\}.$$

Si $\mathscr{P}$ est un noyau sur $\bar{\mathbf{D}} \times \bar{\mathbf{D}}$, μ une mesure positive sur D nous noterons:

$$\mathscr{P}^*\mu(z) = \int_{\mathbf{D}} \mathscr{P}(\zeta, z)\, d\mu(z).$$

ϱ désigne la pseudo-distance de Koranyi sur $\partial\mathbf{D}$.

Si $\zeta \in \mathbf{D}$, ζ' est la projection normale de ζ sur $\partial\mathbf{D}$; posons pour $\alpha > 1$ et $w \in \partial\mathbf{D}$:

$$\Omega_\alpha(w) = \left\{\zeta \in \mathbf{D} / \varrho(\zeta', w) \leqq \frac{\alpha}{2}(-r(\zeta))\right\}.$$

Définition 2.2. Un noyau $\mathscr{P}$ sur $\bar{\mathbf{D}} \times \bar{\mathbf{D}}$ vérifie la condition $(\mathscr{C}_1)$ si pour $\alpha > 1$ et $1 < q < \infty$, il existe une constante $C(\alpha, q)$ telle que l'on ait pour toute fonction g de $\mathbf{L}^q(\partial\mathbf{D})$:

$$\|\mathscr{M}_\alpha[g]\|_{L^q(\partial D)} \leqq C(\alpha, q) \|g\|_{L^q(\partial D)}$$

où

$$\mathscr{M}_\alpha[g](w) = \sup_{\zeta \in \Omega_\alpha(w)} \left|\int_{\partial\mathbf{D}} \mathscr{P}(\zeta, z) g(z)\, d\sigma(z)\right|.$$

Lemme 2.1. *Soient $\mathscr{P}$ un noyau de type* $1/2$ *sur* $\bar{\mathbf{D}} \times \bar{\mathbf{D}}$, *$\mu$ une mesure positive sur* $\mathbf{D}$.

a) *Pour* $1 < p \leqq 2n$ *et* $1/p - 1/2n < 1/k \leqq 1/p$:

$$\|\mathscr{P}^*\mu\|_{L^k(\partial D)} \leqq cste(\mathbf{D}, p, k) \|\mu\|_{W^{1-1/p}(D)}.$$

b) *Pour* $2n < p \leqq +\infty$, $c = 1/2 - n/p$

$$\|\mathscr{P}^*\mu\|_{\Lambda^c(\partial D)} \leqq cste(\mathbf{D}, p) \|\mu\|_{W^{1-1/p}(D)}.$$

Lemme 2.2. *Le noyau $\mathscr{E}_0$ satisfait la condition $(\mathscr{C}_1)$ de la définition* 2.2.

Preuve du lemme 2.1

Soit μ une mesure de $\mathbf{W}^{1-1/p}(\mathbf{D})$;

$$\mu = h\nu \quad \text{où} \quad h \in \mathbf{L}^p(\nu), \quad \nu \in \mathbf{W}^1(\mathbf{D}), \quad \|\mu\|_{W^{1-1/p}(D)} = \|h\|_{L^p(\nu)}.$$

Vérifions tout d'abord le résultat auxiliaire classique (2.7) suivant (cf. [3], [13]) dans lequel on a noté $\tilde{F}$ pour $X(\zeta)F$:

$$(2.7) \quad \text{Pour} \quad \nu \in \mathbf{W}^1(\mathbf{D}) \quad \text{et} \quad a > 0 \begin{cases} \sup_{z \in \bar{\mathbf{D}}} \int_{\mathbf{D}} |\tilde{F}(\zeta, z)|^{-n+\alpha}\, d\nu(\zeta) = O(1) \\ \int_{\mathbf{D}} |\tilde{F}(\zeta, z)|^{-n-\alpha}\, d\nu(\zeta) = O(1)(-r(z))^{-\alpha}. \end{cases}$$

Il suffit d'effectuer les calculs pour $(\zeta, z) \in \mathscr{U}_\varepsilon$.

Pour $z \in \partial D$, $t>0$, notons $\mathscr{A}(z, t)$ la pseudo-boule de Koranyi:

$$\mathscr{A}(z, t) = \{\zeta \in \mathbf{D} / -r(\zeta) + \varrho(\zeta', z) \lesssim t\}.$$

Rappelons que ν est de Carleson dans $\mathbf{D}$ si il existe une constante C telle que l'on ait pour tout z de $\partial\mathbf{D}$ et tout $t>0$:

$$\nu(\mathscr{A}(z, t)) \leqq Ct^n.$$

Nous avons, en désignant par z' la projection normale de z sur $\partial\mathbf{D}$:

$$|F(\zeta, z)| \gtrsim -r(z) + |F(\zeta, z')|, \quad \text{sur} \quad \mathscr{U}_{\varepsilon_0}.$$

$$\int_{\mathbf{U}_0} |F(\zeta, z)|^{-n-\alpha} d\nu(\zeta)$$

$$\lesssim (-r(z))^{-\alpha-\varepsilon} \int_{\mathscr{A}(z', -r(z))} |F(\zeta, z')|^{-n+\varepsilon} d\nu(\zeta) + \int_{\mathbf{U}_0/\mathscr{A}(z', -r(z))} |F(\zeta, z')|^{-n-\alpha} d\nu(\zeta).$$

Les estimations (2.7) découlent immédiatement de (2.7'):

$$\text{(2.7')} \quad \begin{aligned} &\int_{\mathscr{A}(z_0, t)} |F(\zeta, z_0)|^{-n+\alpha} d\nu(\zeta) \lesssim t^\alpha \\ &\int_{\mathbf{U}_0/\mathscr{A}(z_0, t)} |F(\zeta, z_0)|^{-n-\alpha} d\nu(\zeta) \lesssim t^{-\alpha} \end{aligned} \qquad \text{où} \quad a > 0, \quad 0 < t \leqq t_0, \quad z_0 \in \partial\mathbf{D}.$$

Pour prouver (2.7'), il suffit d'écrire:

$$\mathscr{A}(z_0, t) = \bigcup_{j \leqq -1} \mathscr{C}_j \quad \text{et} \quad \mathbf{U}_0/\mathscr{A}(z_0, t) = \bigcup_{j \geqq 0} \mathscr{C}_j$$

où

$$\mathscr{C}_j = \mathscr{A}(z_0, 2^{j+1}t)/\mathscr{A}(z_0, 2^j t),$$

et de remarquer que l'on a:

$$|F(\zeta, z_0)| \gtrsim 2^j t \quad \text{si} \quad \zeta \in \mathscr{C}_j.$$

Preuve du lemme 2.1 a)

Supposons $1/p - 1/2n < 1/k < 1/p$.

Posons:

$$1/p_1 = 1/k, \quad 1/p_2 = 1/p - 1/k, \quad 1/p_3 = 1 - 1/p.$$

Soit ε tel que $0 < \varepsilon < nk\ (1/k - 1/p + 1/2n)$.

Nous déduisons de l'inégalité de Hölder:

$$|\mathscr{P}^* \mu(z)|^k \leqq I_1(z) I_2(z) I_3(z)$$

où

$$I_1(z) = \int_{\mathbf{D}} |h(\zeta)|^p |F(\zeta, z)|^{-n+\varepsilon} d\nu(\zeta)$$

$$I_2(z) = \left[\int_{\mathbf{D}} |h|^p \, d\nu\right]^{k/p_2} = \|\mu\|^{k-p}_{W^{1-1/p}(D)}$$

$$I_3(z) = \left[\int_{\mathbf{D}} |F(\zeta, z)|^{p_3(-n+n/k+1/2-\varepsilon/k)} d\nu(\zeta)\right]^{k/p_3}.$$

D'après (2.7), nous avons:

$$\sup_{z\in\overline{\mathbf{D}}} |I_3(z)| < +\infty$$

d'où l'estimation cherchée.

Preuve du lemme 2.1 b)

Nous avons puisque $\mathscr{P}$ est de type 1/2:

$$|\operatorname{grad} \mathscr{P}^*\mu(z)| = O(1)\|h\|_{L^p(v)}\left[1+\left(\int_{B(z,\varepsilon_0)} |F|^{-q/2-nq}\, dv(\zeta)\right)^{1/q}\right]$$

avec

$$1/p+1/q = 1 \quad \text{et} \quad \mu = hv.$$

Par suite d'après (2.7):

$$|\operatorname{grad} \mathscr{P}^*\mu(z)| = O(1)(-r(z))^{-1/2-n/p}\|h\|_{L^p(v)}.$$

$\mathscr{P}^*\mu$ appartient à l'espace de Lipschitz $\Gamma^c(\mathbf{D})$, où $c=1/2-n/p$ et se prolonge en une fonction de $\Gamma^c(\overline{\mathbf{D}})$ qui n'est autre que $\mathscr{P}^*\mu$ puisque l'on a pour tout z_0 de $\partial\mathbf{D}$:

$$\mathscr{P}^*\mu(z) \to \mathscr{P}^*\mu(z_0) \quad \text{lorsque} \quad z \to z_0, \quad z\in n(z_0)\cap\mathbf{D}.$$

$\big(n(z_0)$ est la normale à ∂D en $z_0\big)$.

Preuve du lemme 2.2

Il suffit de considérer, pour $g\in\mathbf{L}^q(\partial\mathbf{D})$, la fonction maximale:

$$\mathscr{M}_\alpha[g](w) = \sup_{\zeta\in\Omega_\alpha(w)} \left|\int_{\partial\mathbf{D}} F(z,\zeta)^{-n} g(z)\, d\sigma(z)\right|.$$

Pour $z\in\partial\mathbf{D}$: $F_0(z,\zeta)=F(z,\zeta)$, de sorte que nous avons, d'après (1.6) et (1.7):

$$\frac{g(z)\,d\sigma(z)}{F_0(z,\zeta)^n} = \frac{g(z)}{a_0(z)}\varkappa(z,\zeta)+g(z)\varkappa_1(z,\zeta)$$

où

$$|\varkappa_1(z,\zeta)| = O(1)|F_0(z,\zeta)|^{-n+1/2} \quad \text{et} \quad 1/a_0\in\mathbf{C}^{m-2}(\partial\mathbf{D}).$$

Le terme $I_1(\zeta)=\int_{\partial\mathbf{D}} g(z)\varkappa_1(z,\zeta)$ s'estime aisément car le noyau $\varkappa_1$ est très régulier; il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder en remarquant que:

si $z\in\partial\mathbf{D}$, $w\in\partial\mathbf{D}$, $\zeta\in\Omega_\alpha(w)$ et $|z-\zeta|<\varepsilon_0$:

$$|F_0(z,\zeta)| \gtrsim -r(\zeta)+\varrho(\zeta',z) \gtrsim \varrho(\zeta',w)+\varrho(\zeta',z).$$

Le terme délicat est

$$I_0(\zeta) = \int_{\partial\mathbf{D}} \frac{g(z)}{a_0(z)}\varkappa(z,\zeta).$$

L'opérateur H de noyau $\varkappa$ (cf. (1.9)) est un projecteur continu de $\mathbf{L}^q(\partial\mathbf{D})$ dans $\mathbf{H}^q(\mathbf{D})$ pour $1<q<+\infty$ (la preuve de ce résultat, non trivial, repose sur l'étude d'une intégrale singulière, voir [10] théorème 3.4.2); par suite I_0 est dans $\mathbf{H}^q(\mathbf{D})$ dès que g est dans $\mathbf{L}^q(\partial\mathbf{D})$ et, d'après le théorème de Hardy—Littlewood ([14] page 40):

$$\Big\|\sup_{\zeta\in\Omega_\alpha(w)}|I_0(\zeta)|\Big\|_{L^q(\partial D)} \lesssim \|I_0\|_{H^q(D)} \lesssim \|g\|_{L^q(\partial D)}.$$

Remarque 2.2. Dans le cas de la boule $\mathscr{E}_0(\zeta,z)\wedge\bar\partial u(\zeta)=cste\ \dfrac{\bar N u(\zeta)\,d\sigma(\zeta)}{(1-\bar z\zeta)^n}$ et on obtient la proposition 0.1.

2. b) Etude de $R'M(\bar\partial u)-RM(\bar\partial u)$.

Proposition 2.3. *Pour* $1<p\leqq+\infty$, $1<k<\infty$, *il existe des constantes* $C(p,k)>0$, $C'(p)>0$ *telles que l'on ait pour tout* u *de* $\mathbf{C}^1(\overline{\mathbf{D}})$:

a) $\|(R'-R)M(\bar\partial u)\|_{H^k(D)}\leqq C(p,k)\||\bar\partial u|\|_{W^{1-1/p}(D)}$, *où* $1<p\leqq 2n$, $1/k>1/p-1/2n$

b) $\|(R'-R)M(\bar\partial u)\|_{\Gamma^c(D)}\leqq C(p)\||\bar\partial u|\|_{W^{1-1/p}(D)}$, *où* $2n<p\leqq\infty$, $c=1/2-n/p$.

Si l'on tient compte de (2.5), on déduit de la proposition 2.3 le résultat suivant:

Corollaire 2.1. *Pour* $1<p\leqq+\infty$, $1<k<\infty$, $\varepsilon>0$, *il existe des constantes* $C=C(p,k,\varepsilon)>0$, $C'=C'(\varepsilon,p)>0$, $C''=C''(\varepsilon)>0$ *telles que l'on ait pour* $u\in\mathbf{C}^1(\overline{\mathbf{D}})$:

a) $\|(R'-R)M(\bar\partial u)\|^p_{H^k(D)}\leqq C\|\delta^{p-1-\varepsilon}|\bar\partial u|^p\|_{L^1(D)}$, *où* $1<p\leqq 2n$, $1/k>1/p-1/2n$

b) $\|(R'-R)M(\bar\partial u)\|^p_{\Gamma^c(D)}\leqq C'\|\delta^{p-1-\varepsilon}|\bar\partial u|^p\|_{L^1(D)}$, *où* $2n<p<\infty$, $c=1/2-n/p$.

c) $\|(R'-R)M(\bar\partial u)\|_{\Gamma^{1/2}(D)}\leqq C''\operatorname*{sup\,ess}_{\mathbf{D}}\delta|\log\delta|^{1+\varepsilon}|\bar\partial u|$.

Nous allons établir plusieurs lemmes avant de prouver la proposition 2.3.

$R'M(\bar\partial u)$ et $RM(\bar\partial u)$ sont explicités dans (1.14). La différence $(R-R')M(\bar\partial u)$ est plus régulière que le terme $E(\bar\partial u)$ précédemment étudié car il existe une compensation entre les termes $\Gamma M(\bar\partial u)$ et $\Delta M(\bar\partial u)$.

Nous allons en un premier temps préciser la singularité de la différence $((\Gamma-\Delta)M\bar\partial u)$.

Notons N le champ de vecteurs holomorphe "normal" à $\partial\mathbf{D}$:

$$N=\sum_{j=1}^n\frac{\partial r}{\partial\bar z_j}\frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Lemme 2.3. *Pour* $u,v\in\mathbf{C}^1(\overline{\mathbf{D}})$:

$$(\Gamma-\Delta)M(\bar\partial u)(z)=T_1(\bar N u)(z)+T_2M(\bar\partial u)(z),\quad z\in\partial\mathbf{D}$$

où

$$T_j v(z) = \int_{\mathbf{D}} \tau_j(\zeta, z) v(\zeta)\, d\lambda(\zeta)\,;$$

τ_1 (resp. τ_2) est de type 1/2 *(resp.* 0*) au sens de la définition* 2.1.

Rappelons que le noyau $\varkappa$ de l'opérateur H s'écrit pour $\zeta \in \partial\mathbf{D}$, $z \in \overline{\mathbf{D}}$, $\zeta \neq z$:

$$\varkappa(\zeta, z) = \frac{v_0(\zeta, z)}{F_0(\zeta, z)^n}, \quad \text{où} \quad v_0(\zeta, z) = \frac{1}{(2i\pi)^n} f \wedge (\bar{\partial}_\zeta f)^{n-1}.$$

Notons:

$$d\hat{\bar{\zeta}}_j = d\bar{\zeta}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{\zeta}_{j-1} \wedge d\bar{\zeta}_{j+1} \wedge \ldots \wedge d\bar{\zeta}_n$$

(2.8) $$d\zeta = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$$

$$\Omega(\zeta) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i)^n \|\text{grad } r\|^2} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial r}{\partial \zeta_j}(\zeta)\, d\hat{\bar{\zeta}}_j \wedge d\zeta.$$

Remarquons que sur $\partial\mathbf{D}$ nous avons $\Omega = d\sigma$, et par suite:

(2.9)
$$v_0(\zeta, z) = \sum_{j=1}^n \theta_j(\zeta, z)\, d\hat{\bar{\zeta}}_j \wedge d\zeta, \quad (\zeta, z) \in \overline{\mathbf{D}} \times \overline{\mathbf{D}}$$
$$v_0(\zeta, z) = \theta(\zeta, z)\, d\sigma(\zeta) = \theta(\zeta, z)\Omega(\zeta), \quad \zeta \in \partial\mathbf{D}, \quad z \in \overline{\mathbf{D}}$$

où

$$\theta(\zeta, z) = (-1)^{n(n-1)/2} (2i)^n \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial r}{\partial \bar{\zeta}_j}(\zeta) \theta_j(\zeta, z), \quad \zeta, z \in \overline{\mathbf{D}}.$$

Remarque. Nous noterons encore $\theta(\zeta, z)$ l'expression donnée dans (2.9) même lorsque $\zeta \in \mathbf{D}$.

L'opérateur $\Gamma = H - H^*$, où H^* est l'adjoint de l'endomorphisme H de $\mathbf{L}^2(\partial\mathbf{D})$, a un noyau absolument intégrable $\mathscr{G}$ donné par:

$$\mathscr{G}(\zeta, z) = \frac{\theta(\zeta, z)}{F_0(\zeta, z)^n} - \frac{\overline{\theta(z, \zeta)}}{\overline{F_0(z, \zeta)}^n}, \quad \zeta \in \partial\mathbf{D}, \quad z \in \partial\mathbf{D}, \quad \zeta \neq z.$$

D'après le lemme 1.1 et la définition de la fonction X donnée dans (1.6), nous avons pour $z \in \partial\mathbf{D}$:

$$\mathscr{G}(\zeta, z) = \tilde{\mathscr{G}}(\zeta, z) = \frac{(X(\zeta))^n \theta(\zeta, z)}{F(\zeta, z)^n} - \frac{(X(z))^n \overline{\theta(z, \zeta)}}{\overline{F(z, \zeta)}^n}, \quad \zeta, z \in \partial\mathbf{D}.$$

Pour v fonction de $\mathbf{C}^1(\overline{\mathbf{D}})$ et $z \in \partial\mathbf{D}$:

$$\Gamma v(z) = \int_{\partial\mathbf{D}} \tilde{\mathscr{G}}(\zeta, z) v(\zeta) \Omega(\zeta).$$

Appliquons la formule de Stokes en tenant compte de la convention de notation (0.2):

(2.10)
$$\Gamma v(z) = \int_{\mathbf{D}} \tilde{\mathscr{G}}(\zeta, z)\bar{\partial} v(\zeta)\wedge\Omega(\zeta)$$
$$-n\int_{\mathbf{D}} v(\zeta)\left[\frac{(X(\zeta))^n\theta(\zeta,z)\bar{\partial}_\zeta F(\zeta,z)\wedge\Omega}{F(\zeta,z)^{n+1}} - \frac{(X(z))^n\overline{\theta(z,\zeta)}\bar{\partial}_\zeta\overline{F(z,\zeta)}\wedge\Omega}{\overline{F(z,\zeta)}^{n+1}}\right]$$
$$+\int_{\mathbf{D}}\frac{v(\zeta)e_0(\zeta,z)}{F(\zeta,z)^n}+\int_{\mathbf{D}}\frac{v(\zeta)e_0(\zeta,z)}{\overline{F(z,\zeta)}^n} = \sum_{j=1}^4 \Gamma_j v(z), \quad z\in\partial\mathbf{D}.$$

Rappelons que nous avons:

(2.11)
$$\forall z\in\partial\mathbf{D},\quad X(z) = C(z,z) = 1 \quad \text{et} \quad \theta(z,z)\in\mathbf{R}.$$

En conséquence, il découle de (2.1) et de la propriété (1.5) de «presque symétrie hermitienne» de $F(\zeta, z)$ l'estimation suivante:

$$|\tilde{\mathscr{G}}(\zeta,z)| = O(1)|F(\zeta,z)|^{-n+1/2} \quad \text{sur} \quad \mathscr{U}_{\varepsilon_0} \quad \text{(cf. définition 2.1).}$$

La première intégrale $\Gamma_1 v(z)$ intervenant dans l'expression (2.10) de $\Gamma v(z)$ est donc de la forme:

(2.12)
$$\begin{cases} \Gamma_1 v(z) = \int_{\mathbf{D}} \mathscr{G}_1(\zeta,z)\bar{N}v(\zeta)\,d\lambda(\zeta), \quad z\in\partial\mathbf{D} \\ \text{où} \quad |\mathscr{G}_1(\zeta,z)| = O(1)|F(\zeta,z)|^{-n+1/2} \quad \text{si} \quad (\zeta,z)\in\mathscr{U}_{\varepsilon_0}. \end{cases}$$

Pour l'étude de la seconde intégrale $\Gamma_2 v(z)$, remarquons que nous avons pour $\zeta\in\mathbf{U}_0$, $|\zeta-z|<\varepsilon_0$:

(2.13)
$$F(\zeta,z) = C(\zeta,z)\Phi(\zeta,z) \quad \text{où} \quad \Phi(\zeta,z) = -r(\zeta)+A(\zeta,z)$$
$$\bar{\partial}_\zeta A(\zeta,z) = e_1(\zeta,z)$$
$$\bar{\partial}_\zeta\overline{\Phi(z,\zeta)} = \partial_\zeta\Phi(\zeta,z)+e_2(\zeta,z).$$

Nous en déduisons, en faisant appel comme plus haut à (2.11), (1.5) et (2.1):

(2.14)
$$\Gamma_2 v(z) = \int_{\mathbf{D}}\left[\frac{a(\zeta,z)}{F(\zeta,z)^{n+1}} - \frac{\overline{a(z,\zeta)}}{\overline{F(z,\zeta)}^{n+1}}\right]v(\zeta)\,d\lambda(\zeta)+\int_{\mathbf{D}} v(\zeta)\mathscr{R}_0(\zeta,z)$$
$$\text{où} \quad a(\zeta,z) = n(X(\zeta))^n\theta(\zeta,z)C(\zeta,z)$$
$$|\mathscr{R}_0(\zeta,z)| = O(1)|F(\zeta,z)|^{-n} \quad \text{sur} \quad \mathscr{U}_{\varepsilon_0}.$$

Explicitons à son tour $\Delta v(z)$ pour v fonction de $\mathbf{C}^1(\overline{\mathbf{D}})$.

$$\mathscr{L}(\zeta,z) = (2i\pi)^{-n}\bar{\partial}_\zeta\left[\frac{Xf\wedge(\bar{\partial}_\zeta(Xf))^{n-1}}{F(\zeta,z)^n}\right].$$

Rappelons que X est identique à 1 sur un voisinage $\mathbf{U}'$ de $\partial\mathbf{D}$, et la fonction F telle que:

$$|F(\zeta, z)| \gtrsim 1 \quad \text{si} \quad \zeta\in\mathbf{U}\setminus\mathbf{U}', \quad z\in\bar{\mathbf{D}}.$$

Par ailleurs:

$$f\wedge(\bar{\partial}_\zeta f)^{n-1} = \partial r\wedge(\bar{\partial}\partial r)^{n-1}+e_1(\zeta, z).$$

Nous avons donc, en tenant compte également de (2.13) et (2.1):

$$\mathscr{L}(\zeta, z) = n\frac{(X(\zeta))^n C(\zeta, z)\bar{\partial}r(\zeta)\wedge v_0(\zeta, z)}{F(\zeta, z)^{n+1}}$$

(2.15)

$$-n(2i\pi)^{-n}X(\zeta)^n\frac{C(\zeta, z)\bar{\partial}_\zeta A\wedge\partial r\wedge(\bar{\partial}\partial r)^{n-1}}{F(\zeta, z)^{n+1}}+\frac{X(\zeta)e_0(\zeta, z)}{F(\zeta, z)^n}.$$

Il est aisé de vérifier les égalités suivantes:

(2.16) $$\bar{\partial}r(\zeta)\wedge v_0(\zeta, z) = \theta(\zeta, z)\,d\lambda(\zeta)$$

$$\bar{\partial}_\zeta A(\zeta, z) = \sum_{j=1}^n\left(\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2 r(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}_j\partial\zeta_k}(\zeta_k-z_k)\right)d\bar{\zeta}_j+e_2(\zeta, z)$$

$$\bar{\partial}_\zeta A\wedge\partial r\wedge(\bar{\partial}\partial r)^{n-1} = \gamma_n l(\zeta)\sum_{j=1}^n\frac{\partial r}{\partial\zeta_j}(\zeta)(\zeta_j-z_j)\,d\bar{\zeta}\wedge d\zeta+e_2(\zeta, z)$$

(2.17) où $l(\zeta)$ est le produit des valeurs propres de la forme de Lévi de r

$$\gamma_n = (-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!.$$

Le noyau $\mathscr{D}$ de l'opérateur $\Delta=L-L^*$, où L^* désigne l'adjoint de l'endomorphisme L de $\mathbf{L}^2(\mathbf{D})$, s'écrit donc d'après (2.15), (2.16), (2.17) sous la forme suivante:

$$\mathscr{D}(\zeta, z) = \left(\frac{a(\zeta, z)}{F(\zeta, z)^{n+1}}-\frac{\overline{a(z, \zeta)}}{\overline{F(z, \zeta)}^{n+1}}\right)$$

$$+\left(\frac{b(\zeta, z)}{F(\zeta, z)^{n+1}}-\frac{\overline{b(z, \zeta)}}{\overline{F(z, \zeta)}^{n+1}}\right)+\frac{e_0(\zeta, z)}{F(\zeta, z)^n}+\frac{e_0(\zeta, z)}{\overline{F(z, \zeta)}^n}$$

où a est défini dans (2.14),

$$b(\zeta, z) = -n!\,\pi^{-n}X(\zeta)^n C(\zeta, z)\,l(\zeta)\sum_{j=1}^n\frac{\partial r}{\partial\zeta_j}(\zeta)(\zeta_j-z_j).$$

Nous déduisons de (2.11) et de la formule de Taylor:

$$b(\zeta, z)-\overline{b(z, \zeta)} = e_2(\zeta, z)+\gamma\big(X(z)\big)^n C(z, z)\,l(z)[r(\zeta)-r(z)], \quad \text{où} \quad \gamma\in\mathbf{R}.$$

Par suite, en tenant compte une fois encore de (2.5) (et (2.1)):

$$\mathscr{D}(\zeta, z) = \frac{a(\zeta, z)}{F(\zeta, z)^{n+1}} - \frac{\overline{a(z, \zeta)}}{\overline{F(z, \zeta)}^{n+1}} + \mathscr{R}_1(\zeta, z) \tag{2.18}$$
$$\text{où} \quad |\mathscr{R}_1(\zeta, z)| = O(1)|F(\zeta, z)|^{-n}, \quad (\zeta, z) \in \mathscr{U}_{\varepsilon_0}.$$

Le lemme 2.3 découle de (2.10), (2.12), (2.14) et (2.18).

Les lemmes suivants donnent les estimations sur $(\Delta - \Gamma)M(\bar{\partial}u)$ nécessaires à la preuve de la proposition 2.3.

Dans la décomposition (1.13) d'une fonction u de $\mathbf{C}^1(\overline{\mathbf{D}})$, nous pouvons introduire des opérateurs P et M avec noyaux à poids de type Berndtsson—Andersson (voir [4′] théorème 5). Nous choisirons plus précisément pour M l'opérateur considéré dans [6]; nous avons pour ω (0, 1)-forme sur $\mathbf{D}$:

$$M(\omega)(z) = \int_{\mathbf{D}} (-r(\zeta))^k Q(\zeta, z) \wedge \omega(\zeta),$$

où k est arbitrairement grand.

Nous noterons:

$$\mathscr{M}(\zeta, z) = (-r(\zeta))^k |Q(\zeta, z)|.$$

Si ν est une mesure positive sur $\mathbf{D}$:

$$\mathscr{M}^* \nu(z) = \int_{\mathbf{D}} \mathscr{M}(\zeta, z)\, d\nu(\zeta).$$

Rappelons quelques résultats contenus dans [6] (lemmes 2.2 et 2.3).

Lemme 2.4.

a) $\sup_{\zeta \in \mathbf{D}} \int_{\mathbf{D}} (-r(z))^{-1/2} \mathscr{M}(\zeta, z)\, d\lambda(z) < +\infty.$

b) *si ν est une mesure positive de $\mathbf{W}^{1-1/p}(\mathbf{D})$, la mesure $(-r(z))^{-1/2}\mathscr{M}^*\nu$ appartient à $\mathbf{W}^{1-1/p}(\mathbf{D})$ $(0 \leqq p \leqq +\infty)$ et:*

$$\|(-r(z))^{-1/2} \mathscr{M}^* \nu\|_{W^{1-1/p}(D)} \leqq cste(\mathbf{D}) \|\nu\|_{W^{1-1/p}(D)}.$$

Lemme 2.5. *Soient $1 < p \leqq +\infty$ et $\alpha(p) = n/p - 1/2$.*

Si $\mu \in \mathbf{W}^{1-1/p}(\mathbf{D})$, $(-r(z))^{\alpha(p)}\mathscr{M}^*\mu$ est de Carleson dans $\mathbf{D}$ et:

$$\|(-r(z))^{\alpha(p)} \mathscr{M}^* \mu\|_{W^1(D)} \leqq cste(p) \|\mu\|_{W^{1-1/p}(D)}.$$

Preuve du lemme 2.5

$$\mu = h\nu \quad \text{où} \quad \nu \in \mathbf{W}^1(\mathbf{D}) \quad \text{et} \quad h \in \mathbf{L}^p(\nu).$$

Soit $x \in \partial\mathbf{D}$ et $\mathscr{A}(x, t)$ la pseudo-boule de centre x et de rayon t. Nous déduisons du lemme 2.4 et de l'inégalité de Hölder $(1/p+1/q=1)$:

$$\int_{\mathscr{A}(x,t)} (-r(z))^{\alpha(p)} \mathscr{M}^* \mu(z)\, d\lambda(z)$$

$$= O(1)\|h\|_{L^p(\nu)} \Big[\int_{\mathscr{A}(x,t)\times \mathrm{D}} (-r(z))^{nq/p-1/2} \mathscr{M}(\zeta, z)\, d\lambda(z)\otimes d\nu(\zeta)\Big]^{1/q} = O(1)\|h\|_{L^p(\nu)} t^n$$

(puisque la mesure $(-r(z))^{-1/2}\mathscr{M}^*\nu$ est de Carleson dans **D** d'après le lemme 2.4).

Lemme 2.6.

a) *Pour* $1<p\leqq 2n$, $1/k>1/p-1/2n$: $\|T_2M(\omega)\|_{L^k(\partial D)} \lesssim \||\omega|\|_{W^{1-1/p}(D)}$

b) *Pour* $2n<p\leqq\infty$, $c(p)=1/2-n/p$: $\|T_2M(\omega)\|_{\Gamma^c(\partial D)} \lesssim \||\omega|\|_{W^{1-1/p}(D)}$.

Preuve de a)

Si $|\omega|\in \mathbf{W}^{1-1/p}(\mathbf{D})$, la mesure $m_p=(-r(z))^{\alpha(p)}M(\omega)(z)$ est de Carleson dans **D** d'après le lemme 2.5. Il est immédiat de vérifier en utilisant le lemme 2.4 a):

Pour $p=1$:

$$(-r(z))^{-\alpha(1)-\varepsilon}\in \mathbf{L}^s(m_1) \quad \text{où} \quad s=2n/(2n-1+2\varepsilon), \quad \varepsilon>0\,;$$

et

$$(-r)^{-\varepsilon}M(\omega)\in \mathbf{W}^{1-1/s}(\mathbf{D}) \quad \text{si} \quad |\omega|\in \mathbf{W}^0(\mathbf{D}).$$

nous avons de même pour $|\omega|\in \mathbf{W}^{1-1/2n}(\mathbf{D})$:

$$(-r)^{-\varepsilon}M(\omega)\in \mathbf{W}^{1-1/k}(\mathbf{D}) \quad \text{où} \quad k=1/2\varepsilon,$$

d'où par interpolation pour $1<p<2n$:

$$(-r)^{-\varepsilon}M(\omega)\in \mathbf{W}^{1-1/q}(\mathbf{D}) \quad \text{si} \quad |\omega|\in \mathbf{W}^{1-1/p}(\mathbf{D})$$

avec

$$1/q=1/q(\varepsilon)\to(1/p-1/2n)^+ \quad \text{quand} \quad \varepsilon\to 0.$$

Le noyau $(-r(z))^{\varepsilon}|\tau_2(z,w)|$ vérifiant la condition $(\mathscr{C}_1)$ de la définition 2.2, la balayée par un tel noyau d'une mesure de $\mathbf{W}^{1-1/q}(\mathbf{D})$, $1<q<\infty$, appartient à $\mathbf{L}^q(\partial\mathbf{D})$, d'après (2.6), ce qui achève la preuve du a).

Preuve de b)

La mesure $m_p=(-r)^{\alpha(p)}M(\omega)$ est de Carleson, avec $\alpha(p)<0$ puisque $p>2n$; le noyau τ_2 étant de type 0 nous aurons d'après (2.7), en tenant compte de (2.1):

$$|\mathrm{grad}\, T_2M(\omega)(w)| \lesssim (-r(w))^{-1/2-n/p}\,;$$

nous en déduisons, comme dans la preuve du lemme 2.1 b), que $T_2M(\omega)$ appartient à $\Gamma^c(\overline{\mathbf{D}})$, où $c=1/2-n/p$.

Lemme 2.7. *Soient* $1<p\leqq+\infty$, $1<k<\infty$, $\varepsilon>0$; *il existe des constantes* $C_1=C_1(p,\varepsilon)$, $C_2=C_2(p)$, $C_3=C_3(p,k)$, $C_3'=C_3'(p)$ *telles que l'on ait pour toute*

(0, 1)-forme ω de classe $\mathbf{C}^1$ *sur* $\mathbf{D}$:

a) $\|\Delta M(\omega)\|_{L^p(\delta^{-1+\varepsilon})} \leqq C_1 \| |\omega| \|_{W^{1-1/p}(D)}$

b) $\|\Gamma M(\omega)\|_{L^p(\partial D)} \leqq C_2 \| |\omega| \|_{W^{1-1/p}(D)}$

c) $\left\|E(\bar\partial \Delta M(\omega))\right\|_{H^k(D)} \leqq C_3 \| |\omega| \|_{W^{1-1/p}(D)}$, *si* $1 < p \leqq 2n$, $1/k > 1/p - 1/2n$.

$\left\|E(\bar\partial \Delta M(\omega))\right\|_{\Gamma^c(D)} \leqq C_3' \| |\omega| \|_{W^{1-1/p}(D)}$ *si* $2n < p \leqq \infty$, $c = 1/2 - n/p$.

Preuve du lemme 2.7

La preuve du a) est analogue à celle du lemme 2.1 a), si l'on remarque que

$$\delta^{-1/2} |M(\omega)| \in \mathbf{W}^{1-1/p}(\mathbf{D}).$$

Pour vérifier le b) nous écrivons d'après le lemme 2.3, le noyau $\mathscr{D}$ de Δ étant par ailleurs de type $-1/2$:

$$(2.19) \quad |\Gamma M(\omega)(z)| \lesssim \int_{\mathbf{D}} |\omega(\zeta)| \, |\tilde F(\zeta, z)|^{-n+1/2} \, d\lambda(\zeta) + \int_{\mathbf{D}} |M(\omega)| \, |\tilde F|^{-n-1/2} \, d\lambda.$$

Le second terme du deuxième membre appartient à $\mathbf{L}^p(\partial \mathbf{D})$ d'après (2.6) et le lemme 2.4 b) puisque le noyau $(-r)^{1/2} |\tilde F|^{-n-1/2}$ satisfait $(\mathscr{C}_1)$; il en est de même de l'autre intégrale d'après le lemme 2.1.

Preuve du c)

Remarquons tout d'abord que nous avons d'après le lemme 1.1 a)

$$\text{pour} \quad z \in \bar{\mathbf{D}}, \quad \zeta \in \mathbf{U}_0, \quad |\zeta - z| < \varepsilon_0:$$

$$\bar\partial_z F(\zeta, z) = 0 \quad \text{et} \quad \bar\partial_z \overline{F(z, \zeta)} = e_2(\zeta, z) + e_0(\zeta, z)[-r(z) + \overline{A(z, \zeta)}].$$

Par suite, en tenant compte de (2.1) et de l'expression de $\mathscr{D}$ donnée dans la proposition 1.2:

$$(2.20) \qquad |\bar\partial_z \mathscr{D}(\zeta, z)| = O(1) \, |F(\zeta, z)|^{-n-1}.$$

Par un raisonnement analogue à celui de la preuve du lemme 2.5, on vérifie que la mesure $n_p = (-r)^{\alpha(p)} |\bar\partial \Delta M(\omega)|$ où $\alpha(p) = n/p - 1/2$, est de Carleson dans $\mathbf{D}$ lorsque $|\omega| \in \mathbf{W}^{1-1/p}$. Les estimations c) se prouvent alors comme celles du lemme 2.6, puisque le noyau $\mathscr{E}$ de E est de type 0 comme celui de l'opérateur T_2.

Preuve de la proposition 2.3

Supposons que $|\bar\partial u| \in \mathbf{W}^{1-1/p}(\mathbf{D})$, $1 < p \leqq \infty$.

$$R' M(\bar\partial u) = L \Delta M(\bar\partial u) + \ldots + L \Delta^k M(\bar\partial u) + B \Delta^{k+1} M(\bar\partial u), \qquad \text{où} \quad k \in \mathbf{N}^*.$$

$$R M(\bar\partial u) = H \Gamma M(\bar\partial u) + \ldots + H \Gamma^{k'} M(\bar\partial u) + S \Gamma^{k'+1} M(\bar\partial u), \quad \text{où} \quad k' \in \mathbf{N}^*.$$

Le dernier terme de la décomposition de $R'M(\bar{\partial}u)$ est aussi régulier que l'on veut; en effet $\Delta M(\bar{\partial}u)\in \mathbf{L}^p(\mathbf{D})$ d'après le lemme 2.7 et il existe d'après la proposition 1.2 pour tout $\alpha>0$, un entier k_0 de $\mathbf{N}^*$ tel que:

$$\forall k \geqq k_0, \quad \Delta^{k+1}M(\bar{\partial}u)\in\Lambda^\alpha(\mathbf{D}).$$

$$\|B\Delta^{k+1}M(\bar{\partial}u)\|_{\Gamma^\alpha(D)} \lesssim \||\bar{\partial}u|\|_{W^{1-1/p}(D)}.$$

De même, si l'on tient compte de la proposition 1.1 et du lemme 2.7, il existe pour $\alpha>0$ un entier $k_1\geqq k_0$ tel que:

$$\forall k \geqq k_1: \quad H\Gamma^k M(\bar{\partial}u)\in\Gamma^\alpha(\mathbf{D}), \quad S\Gamma^k M(\bar{\partial}u)\in\Gamma^\alpha(\mathbf{D}).$$

L'étude des termes $(L\Delta^k-H\Gamma^k)M(\bar{\partial}u)$ se ramène à celle de $(L\Delta-H\Gamma)M(\bar{\partial}u)$. Écrivons:

$$\begin{aligned}(L\Delta-H\Gamma)M(\bar{\partial}u) &= (L-H)\Delta M(\bar{\partial}u)+H(\Delta-\Gamma)M(\bar{\partial}u)\\ &= E(\bar{\partial}\Delta M(\bar{\partial}u))+H(\Delta-\Gamma)M(\bar{\partial}u).\end{aligned}$$

Les lemmes 2.3, 2.1, 2.6 et 2.7 permettent de conclure.

3. Applications

Les trois propositions prouvées dans ce paragraphe correspondent aux cas (i), (ii), (iii) du théorème 0.2.

Proposition 3.1. *Soient* $1<p\leqq 2$ *et f une* $(0,1)$*-forme* $\bar{\partial}$*-fermée dans* $\mathbf{D}$ *telle que:*

$$\sup_{\varepsilon\geqq 0}\||f|\|_{W^{1-1/p}(D_\varepsilon)}<\infty \quad \text{et} \quad \delta^{p/2-1}|\bar{\partial}r\wedge f|^p\in\mathbf{L}^1(\mathbf{D}),$$

alors:

a) *l'équation* $\bar{\partial}u=f$ *admet une solution appartenant à* $\mathbf{L}^p(\partial\mathbf{D})$, *(et* $\mathbf{L}^p(\mathbf{D})$*).*

b) $u-Bu\in\mathbf{L}^p(\partial\mathbf{D})$.

Preuve du a)

B. Berndtsson a prouvé dans [4] qu'il existe une solution $u\in\mathbf{L}^2(\partial\mathbf{D})$ de l'équation $\bar{\partial}u=f$, dès que f est une (0, 1) forme $\bar{\partial}$-fermée telle que $|f|\in\mathbf{L}^2(\mathbf{D})$.

Antérieurement H. Skoda a construit un opérateur linéaire $\tilde{T}$ vérifiant: Il existe une constante $C>0$ telle que pour toute (0, 1) forme $\bar{\partial}$-fermée f dans $\mathbf{D}$:

$$\bar{\partial}_b\tilde{T}f=f \quad \text{et} \quad \|\tilde{T}f\|_{L^1(\partial D)}\leqq C\||f|+\delta^{-1/2}|\bar{\partial}r\wedge f|\|_{L^1(D)}.$$

Rappelons que E. Amar a retrouvé dans [1] et [2] le résultat de [4] en considérant une solution Tf de l'équation $\bar{\partial}_b v=f$, où T est un opérateur intégral dont le noyau diffère de celui de $\tilde{T}$ par un poids du type

$$\left[\frac{-r(\zeta)}{F(\zeta, z)}\right]^m, \quad \text{où} \quad m \geqq 1.$$

Plus précisément:

$$(3.1)\quad \begin{aligned} &Tf = T_1 f + T_2 f \quad \text{où}: \\ &T_1 f(z) = \int_{\mathbf{D}} f(\zeta) \wedge K_1(\zeta, z) \quad \text{et} \quad T_2 f(z) = \int_{\mathbf{D}} \bar{\partial} r \wedge f \wedge K_2(\zeta, z), \quad \text{pour} \quad z \in \partial D. \end{aligned}$$

Le noyau K_1 est plus régulier que K_2 et nous avons d'après [3] et [13] (le poids, borné, n'intervenant pas ici):

$$(3.2)\qquad \|T_1 f\|_{L^p(\partial D)} \lesssim \||f|\|_{W^{1-1/p}(D)} \quad \text{si} \quad 1 \leqq p \leqq 2.$$

D'après [2] pour $p=2$, [13] pour $p=1$, nous avons d'autre part:

$$(3.3)\qquad \begin{aligned} &\|T_2 f\|_{L^2(\partial D)} \lesssim \||\bar{\partial} r \wedge f|\|_{L^2(D)} \\ &\|T_2 f\|_{L^1(\partial D)} \lesssim \|\delta^{-1/2} |\bar{\partial} r \wedge f|\|_{L^1(D)}. \end{aligned}$$

Soient $1<p<2$ et $\theta=2-2/p$; nous avons:

$$\mathbf{L}^p(\partial \mathbf{D}) = [\mathbf{L}^1(\partial \mathbf{D}), \mathbf{L}^2(\partial \mathbf{D})]_{(\theta, p)} \quad \text{et} \quad \mathbf{L}^p(\delta^{p/2-1}) = [\mathbf{L}^1(\delta^{-1/2}), \mathbf{L}^2(\mathbf{D})]_{(\theta, p)}.$$

Nous pouvons donc déduire de (3.3) par interpolation:

$$(3.4)\qquad \|T_2 f\|^p_{L^p(\partial D)} \lesssim \|\delta^{p/2-1} |\bar{\partial} r \wedge f|^p\|_{L^1(D)}.$$

Pour $z \in \partial \mathbf{D}$, $Mf(z)$ s'exprime à l'aide d'un noyau à poids du même type exactement que celui de T en sorte que nous aurons encore:

$$(3.5)\qquad \|Mf\|^p_{L^p(\partial D)} \lesssim \||f|\|_{W^{1-1/p}(D)} + \|\delta^{p/2-1} |\bar{\partial} r \wedge f|^p\|_{L^1(D)}.$$

La solution $u=Mf$ de l'équation $\bar{\partial} u=f$ a l'avantage d'être définie sur $\bar{\mathbf{D}}$ et non seulement sur $\partial \mathbf{D}$ comme Tf.

Preuve du b)

Sous les hypothèses faites sur f, on vérifie aisément (en tenant compte de la caractérisation (0.1) de $\mathbf{W}^\alpha(\mathbf{D})$ que $u=Mf \in \mathbf{L}^{1+\varepsilon}(\mathbf{D})$), avec $0<\varepsilon \leqq p-1$, ce qui valide l'existence de Bu pour $1<p \leqq 2$.

Il suffit ensuite de vérifier l'appartenance à $\mathbf{H}^p(\mathbf{D})$ de $Bu-Su$, avec $u=Mf$; elle découle du théorème 0.1 a), compte-tenu de la remarque 1.2.

Proposition 3.2. *Soient* $1<p<\infty$ *et* f *une forme* $\bar{\partial}$*-fermée dans* D *telle que:*

$$\delta^{-1/2} |\bar{\partial} r \wedge f| \in \mathbf{W}^{1-1/p}(\mathbf{D}) \quad \textit{et} \quad \sup_{\eta \geqq 0} \|f\|_{W^{1-1/p}(D_\eta)} < \infty.$$

Si u est solution de $\bar{\partial}u=f$ *avec* $u\in \mathbf{L}^p(\partial\mathbf{D})$, *et, par exemple* $u\in\mathbf{L}^k(\mathbf{D})$, *où* $k>1$, *alors:* $u-Bu\in\mathbf{L}^p(\partial\mathbf{D})$.

Soit f satisfaisant les conditions de la proposition. L'existence d'une solution $v=Tf$ appartenant à $\mathbf{L}^p(\partial\mathbf{D})$ de l'équation $\bar{\partial}_b v=f$ est prouvée dans [3]. La solution $u=Mf$ de $\bar{\partial}u=f$ appartient elle aussi à $\mathbf{L}^p(\partial\mathbf{D})$ et nous avons de plus $Mf\in\mathbf{L}^p(\mathbf{D})$.

La proposition est conséquence immédiate du théorème 0.1 a).

Proposition 3.3. *Soient* $2\leqq k<2n+2$ *et* $p=2nk/2n+2-k$, f *une* $(0,1)$*-forme* $\bar{\partial}$*-fermée dans* $\mathbf{D}$ *telle que* $|f|\in\mathbf{L}^k(\mathbf{D})$. *Si u est une solution de l'équation* $\bar{\partial}u=f$, *avec* $u\in\mathbf{L}^p(\partial\mathbf{D})$ *et, par exemple,* $u\in\mathbf{L}^2(\mathbf{D})$, *alors:* $u-Bu\in\mathbf{L}^p(\partial\mathbf{D})$.

Il est montré dans [2]:

$$\|Tf\|_{L^p(\partial D)}\lesssim \||f|\|_{L^k(D)}. \tag{3.6}$$

Nous avons, ici encore, lorsque $|f|\in\mathbf{L}^k(\mathbf{D})$, $u=Mf\in\mathbf{L}^p(\partial\mathbf{D})\cap\mathbf{L}^p(\mathbf{D})$. Si $|\bar{\partial}u|\in\mathbf{L}^k(\mathbf{D})$, nous aurons également $|\bar{\partial}u|\in\mathbf{W}^{1-1/k}(\mathbf{D})$. L'appartenance de $Hu-Bu$ à $\mathbf{H}^p(\mathbf{D})$ découle alors des propositions 2.1 c) et 2.3.

Bibliographie

1. Amar, E., Estimations, par noyaux, des solutions de l'équation $\bar{\partial}u=f$, Proceedings de l'année spéciale Analyse Complexe à Maryland. *Lectures Notes in Mathematics* n° 1276 Springer-Verlag 1987.
2. Amar, E., *Communication orale.*
3. Amar, E.—Bonami, A., Mesures de Carleson d'ordre α et solutions au bord de l'équation $\bar{\partial}$, *Bull. Soc. Math. France,* **107** (1979), 23—48.

4'. Berndtsson, B., Andersson, M., Henkin—Ramirez formulas with weigth factors, *Ann. Inst. Fourier,* **32** fasc. 3 (1982), 91—110.

4. Berndtsson, B., $\bar{\partial}_b$ and Carleson type inequalities, Proceedings de l'année spéciale Analyse Complexe à Maryland, *Lectures Notes in Mathematics* n° 1276 Springer-Verlag 1987.
5. Bonami, A.—Charpentier, P., Comparaison des solutions minimales de l'équation $\bar{\partial}u=f$, *Communications orales aux congrès d'Analyse Complexe de Couixa* (Mars 87) *et Oberwolfach* (Août 87).
6. Cumenge, A., Extension dans des classes de Hardy de fonctions holomorphes et estimations de type mesures de Carleson pour l'équation $\bar{\partial}u=f$. *Ann. Inst. Fourier,* **33** (1983), 59—97.
7. Dautov, S. A.—Henkin, G. M., Zeros of holomorphic functions of finite order and weighted estimates for solutions of $\bar{\partial}$-equation, *Math. USSR Sbornik* **35** (n° 4) (1979).
8. Henkin, G. M., Integral representation of functions in strictly pseudo-convex domains and applications to the $\bar{\partial}$-problem, *Math. USSR Sbornik* **11** (1970), 273—281.
9. Henkin, G. M.—Leiterer, J., *Theory of functions on Complex Manifolds,* Birkhäuser—Boston 1984.

10. KERZMAN, N.—STEIN, E. M., The Szegő kernel in terms of Cauchy—Fantappié kernels, *Duke Math. J.*, **45** (1978), 197—224.
11. LIGOCKA, E., The Hölder continuity of the Bergman projection and proper holomorphic mappings, *Studia Math.*, **80** (1984), 89—107.
12. PHONG D. M.—STEIN, E. M., Estimates for the Bergman and Szegő projections on strongly pseudo-convex domains, *Duke Math. J.*, **44** (1977), 695—704.
13. SKODA, H., Valeurs au bord pour les solutions de l'opérateur d'' et caractérisation des zéros des fonctions de la classe de Nevanlina, *Bull. Soc. Math. Fr.*, **104** (1976), 225—299.
14. STEIN, E. M., *Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables,* Princeton University Press, 1972.

Received October 26, 1988

A. Cumenge
Laboratoire d'Analyse Complexe
Université Paul Sabatier
118 Route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex
France