Groupes de tresses et moyennabilité intérieure

Thierry Giordano et Pierre de la Harpe

On considère un entier $k \geqq 2$ et le *groupe d'Artin* B_k des *tresses* à k brins. Il admet une présentation avec générateurs $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$ (où σ_i échange le i-ème brin et le suivant) et relations

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad i = 1, 2, \ldots, k-2$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad i, j = 1, 2, \ldots, k-1 \quad \text{avec} \quad |i-j| \geqq 2.$$

Le groupe P_k des *tresses pures* à k brins (on dit aussi «colorées» pour «pures») est le noyau de l'homomorphisme de B_k sur le groupe symétrique S_k de $\{1, 2, \ldots, k\}$ qui applique σ_i sur la transposition $(i, i+1)$. On désigne par $l_k \colon B_k \to \mathbf{Z}$ l'homomorphisme qui applique chaque σ_i sur 1. Comme les générateurs σ_i sont conjugués deux à deux dans B_k, chaque produit $\sigma_i \sigma_j^{-1}$ est un commutateur et le noyau de l_k coïncide avec le groupe dérivé DB_k de B_k. Pour les références classiques sur les groupes de tresses, voir [Mag] et [Lin].

Rappelons qu'un groupe G est *intérieurement moyennable* s'il existe une mesure finiment additive μ, définie sur toutes les parties de $G - \{1\}$ et à valeurs dans $[0, 1]$, qui est invariante par conjugaisons intérieures et telle que $\mu(G - \{1\}) = 1$. (Il y a de nombreuses définitions équivalentes [BH].) Un groupe non intérieurement moyennable est en particulier cci, ce qui veut dire que ses *classes de conjugaison* (autres que $\{1\}$) sont *infinies*. Il est essentiel pour la suite de noter qu'un groupe intérieurement moyennable G peut avoir un sous-groupe G_0 d'indice fini qui n'est pas intérieurement moyennable: c'est par exemple le cas du produit direct G d'un groupe fini non réduit à un élément et d'un groupe non intérieurement moyennable G_0. Nous montrons toutefois le résultat d'hérédité suivant.

Théorème 1. *Soient G un groupe et G_0 un sous-groupe de G d'indice fini.*

(i) *Si G_0 est intérieurement moyennable, alors G l'est aussi.*

(ii) *Si G est cci, de type fini et intérieurement moyennable, alors G_0 possède aussi ces trois propriétés.*

Comme les groupes B_k et P_k ont des centres non banals ($k \geqq 2$), ils sont intérieurement moyennables. Il est facile de vérifier que le groupe dérivé de P_k et le quotient de P_k par son centre ne sont pas intérieurement moyennables (corollaire 7). De même, DB_3 et DB_4 ne sont pas intérieurement moyennables, car on sait [GL] que DB_3 est le groupe libre F_2 à deux générateurs et que DB_4 est un produit semi-direct $F_2 \rtimes F_2$. Mais DB_k n'est pas une extension successive de groupes libres lorsque $k \geqq 5$, car c'est un groupe parfait [GL]. Toutefois:

Théorème 2. *Pour tout $k \geqq 3$, le groupe dérivé DB_k du groupe B_k des tresses à k brins et le quotient de B_k par son centre sont des groupes non intérieurement moyennables.*

Nous achevons ce travail en notant que les groupes étudiés ici n'ont jamais la *propriété* (T) *de Kazhdan,* en examinant les conséquences des résultats précédents pour certaines *algèbres d'opérateurs,* et en indiquant dans quelle mesure nos considérations valent aussi pour certains *groupes de noeuds.*

Nous remercions E. Bedos, F. Goodman, N. Habegger, G. Skandalis, C. Weber et H. Wenzl pour leurs remarques à divers stades de ce travail. Nous remercions aussi pour leur accueil nos hôtes de l'Institut Mittag-Leffler, où nous avons pu achever cette rédaction.

Preuve du théorème 1

L'assertion (i) du théorème 1 résulte d'un « théorème de Fubini » très élémentaire (voir l'ajout de [BH]). On se place donc dans les hypothèses de l'assertion (ii). Il est banal de montrer que G_0 est cci et de type fini (voir le numéro 5 de [Ba]), et il reste à montrer que G_0 est intérieurement moyennable.

Soit $l^1(G)$ l'algèbre de Banach des fonctions sommables sur G, pour le produit de convolution. Soient $\xi \in l^1(G)$ et $g \in G$. On définit $\check{\xi}$ et $\alpha(g)\xi$ dans $l^1(G)$ par

$$\check{\xi}(h) = \xi(h^{-1}) \quad \text{et} \quad (\alpha(g)\xi)(h) = \xi(g^{-1}hg)$$

pour tout $h \in G$; on a évidemment $\|\check{\xi}\|_1 = \|\alpha(g)\xi\|_1 = \|\xi\|_1$. De plus, $\alpha(g)$ est un automorphisme de $l^1(G)$ et

$$\|\alpha(g)(\xi * \eta) - \xi * \eta\|_1 \leqq \big\|\alpha(g)\xi * (\alpha(g)\eta - \eta)\big\|_1 + \big\|(\alpha(g)\xi - \xi) * \eta\big\|_1$$

pour tous $\xi, \eta \in l^1(G)$. En particulier

$$(*) \qquad \|\alpha(g)(\check{\xi} * \xi) - \check{\xi} * \xi\|_1 \leqq 2\|\alpha(g)\xi - \xi\|_1$$

pour tout $\xi \in l^1(G)$ tel que $\|\xi\|_1 \leqq 1$. Le groupe G étant discret, notons que $l^1(G)$

est un sous-espace dense de l'espace de Hilbert $l^2(G)$ des fonctions de carré sommable sur G.

Comme G est intérieurement moyennable, il existe une suite $(\xi_n)_{n\geq 1}$ de $l^1(G)^+_{0,1}$ telle que $\lim_{n\to\infty}\|\alpha(g)\xi_n-\xi_n\|_1=0$ pour tout $g\in G$ (voir BH]); on désigne ici par $l^1(G)^+_{0,1}$ le convexe de $l^1(G)$ formé des fonctions ξ à valeurs positives telles que $\xi(1)=0$ et $\|\xi\|_1=\sum_{g\in G}|\xi(g)|=1$.

Lemme 3. *Avec les notations précédentes, on peut de plus supposer que*

$$\lim_{n\to\infty}\|\xi_n\|_2 = 0.$$

Preuve. Soit $S=\{s_1, \dots, s_p\}$ un système fini de générateurs de G; on note $l_S(g)\in \mathbf{N}$ la longueur d'un élément $g\in G$ relativement à S. (Si $l_S(g)=j$, on peut donc écrire g comme produit de j éléments de $S\cup S^{-1}$, mais pas comme produit de $j-1$ tels éléments.) Quitte à passer à une suite extraite de $(\xi_n)_{n\geq 1}$, on peut supposer que

$$\max_{1\leq i\leq p}\|\alpha(s_i)\xi_n-\xi_n\|_1 \leq n^{-2}$$

pour tout $n\geq 1$. Pour tout $g\in G$, on montre par récurrence sur $l_S(g)$ que

$$\|\alpha(g)\xi_n-\xi_n\|_1 \leq l_S(g)n^{-2}$$

pour tout $n\geq 1$.

Pour tout $n\geq 1$, posons $v_n=\frac{1}{2}\sup_{g\in G}\xi_n(g)$ et choisissons $g_n\in G$ tel que $\xi_n(g_n)\geq v_n$. Comme G est cci, il existe une suite $(h_{n,k})_{k\geq 1}$ dans G telle que $l_S(h_{n,k})\leq k$ et telle que les éléments $h_{n,k}^{-1}g_nh_{n,k}$ soient distincts deux à deux. On a donc:

$$1 = \sum_{g\in G}\xi_n(g) \geq \sum_{k=1}^{n}\xi_n(h_{n,k}^{-1}g_nh_{n,k})$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n}\left(\xi_n(g_n)-l_S(h_{n,k})n^{-2}\right) \geq nv_n-n^{-2}\sum_{k=1}^{n}k \geq nv_n-\frac{1}{2}$$

et $v_n\leq\frac{3}{2n}$. Comme $\|\xi_n\|_2^2\leq 2v_n\|\xi_n\|_1$, on a bien $\lim_{n\to\infty}\|\xi_n\|_2=0$. ∎

Pour tout $n\geq 1$, on pose $\eta_n=\check{\xi}_n*\xi_n$ et $\zeta_n=\eta_n-\eta_n(1)\delta$, où δ designe la fonction caractéristique de $\{1\}$ dans G. Notons que $\alpha(g)\zeta_n-\zeta_n=\alpha(g)\eta_n-\eta_n$. On a évidemment $\zeta_n(1)=0$ et $\zeta_n(g)\geq 0$, ainsi que $\lim_{n\to\infty}\|\alpha(g)\zeta_n-\zeta_n\|_1=0$ pour tout $g\in G$ vu l'inégalité $(*)$ précédant le lemme 3. Notons ζ_n^0 la restriction de ζ_n à G_0, et f le cardinal de l'espace quotient G/G_0.

Lemme 4. *Avec les notations précédentes* $\|\zeta_n^0\|_1\geq\frac{1}{2}f^{-2}$ *pour tout entier n assez grand.*

Preuve. Soit m un entier tel que $\|\zeta_m^0\|_1\leq\frac{1}{2}f^{-2}$; nous allons montrer que m ne peut pas être grand.

Soit $(C_1, \ldots, C_f)$ une énumération des classes de la forme gG_0 dans G. On écrit G_0' pour $G_0-\{1\}$. On a d'une part

$$\|\zeta_m^0\|_1 = \sum_{x\in G_0'} \zeta_m(x) = \sum_{x\in G_0'} \sum_{y\in G} \xi_m(y)\xi_m(yx)$$
$$= \sum_{1\leqq j\leqq f} \sum_{\substack{g,h\in C_j\\ g\neq h}} \xi_m(g)\xi_m(h) \leqq \frac{1}{2} f^{-2}.$$

D'autre part $\|\xi_m\|_1=1$, de sorte qu'il existe $j\in\{1, \ldots, f\}$ tel que

$$\sum_{g\in C_j} \xi_m(g) \geqq f^{-1}.$$

Par suite

$$f^{-2} \leqq \sum_{\substack{g,h\in C_j\\ g\neq h}} \xi_m(g)\xi_m(h) + \sum_{g\in C_j} \xi_m(g)^2 \leqq \frac{1}{2} f^{-2} + \|\xi_m\|_2^2$$

et $\|\xi_m\|_2^2 \geqq \frac{1}{2} f^{-2}$. Comme $\lim_{n\to\infty} \|\xi_n\|_2=0$, ceci achève la preuve. ∎

Il résulte du lemme 4 qu'on peut définir dans le convexe $l^1(G_0)_{0,1}^+$ (voir la définition qui précède le lemme 3) une suite $(\chi_n^0)_{n\geqq 1}$ par $\chi_n^0=\zeta_n^0/\|\zeta_n^0\|_1$, et qu'on a

$$\lim_{n\to\infty} \|\alpha(g)\chi_n^0-\chi_n^0\| = 0$$

pour tout $g\in G_0$. Par suite G_0 est intérieurement moyennable, ce qui achève la preuve du théorème 1.

E. Bedos a montré que, si G est un groupe cci intérieurement moyennable, tout sous-groupe d'indice fini de G est intérieurement moyennable. Sa preuve utilise nos arguments et la théorie des algèbres de von Neumann.

Cas des groupes de tresses pures

Pour $k\geqq 2$, notons α_k: $P_k\to P_{k-1}$ l'homomorphisme qui oublie le dernier brin. (On pose naturellement $B_1=P_1=\{1\}$.) Artin [Art] a montré que le noyau de α_k est un groupe libre F_{k-1} à $k-1$ générateurs. Comme α_k possède une section évidente, le groupe P_k est un produit semi-direct $F_{k-1} \rtimes P_{k-1}$.

On doit à Chow [Cho] le calcul des centres CB_k des groupes B_k. Posons $C'B_k= CB_k$ si $k\geqq 3$, et $C'B_2=CP_2=P_2=2\mathbf{Z}$ (qui est le groupe pair de $\mathbf{Z}=B_2=CB_2$). Si $\tau=\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{k-1}\in B_k$, alors $C'B_k$ est cyclique infini de générateur τ^k. Dans la représentation géométrique des tresses attachées à k points disposés régulièrement sur un cercle, τ correspond à un k-ième de tour, et par suite τ^k à un tour complet. On voit ainsi d'une part que $C'B_k$ est dans P_k — donc dans CP_k — et d'autre part que la projection α_k: $P_k\to P_{k-1}$ se restreint en un isomorphisme de $C'B_k$ sur $C'B_{k-1}$

pour tout $k \geqq 3$. Le lemme suivant, sans doute bien connu, achève le calcul des centres CP_k des groupes P_k.

Lemme 5. *Si* $k \geqq 3$, *le centre* CP_k *de* P_k *coïncide avec le centre* CB_k *de* B_k, *et l'homomorphisme* $\alpha_k\colon P_k \to P_{k-1}$ *se restreint en un isomorphisme* $CP_k \to CP_{k-1}$.

Preuve. Il reste à montrer que $CP_k = C'B_k$ pour tout $k \geqq 2$. C'est évident pour $k=2$. On procède par récurrence sur k.

Supposons $k \geqq 3$ et $CP_{k-1} = C'B_{k-1}$. On choisit $z \in CP_k$, et il faut montrer que $z \in C'B_k$. Par hypothèse de récurrence, on a $\alpha_k(z) \in C'B_{k-1}$. Vu les faits rappelés avant le lemme, il existe $y \in C'B_k$ tel que $\alpha_k(y) = \alpha_k(z)$, donc tel que zy^{-1} soit à la fois dans le centre de B_k et dans le noyau de α_k. Mais Ker (α_k) est un groupe libre non abélien, donc $z = y \in C'B_k$. ∎

Pour $k \geqq 3$, on note désormais C_k le centre commun de B_k et de P_k; on pose $C_2 = P_2$.

Proposition 6. *On suppose* $k \geqq 3$.

(i) *La suite exacte*

$$1 \to F_{k-1} \to P_k \xrightarrow{\alpha_k} P_{k-1} \to 1$$

induit une suite

$$1 \to F_{k-1} \to F_k/C_k \to P_{k-1}/C_{k-1} \to 1$$

qui est aussi exacte.

(ii) *La suite exacte*

$$1 \to P_k \to B_k \to S_k \to 1$$

induit une suite

$$1 \to P_k/C_k \to B_k/C_k \to S_k \to 1$$

qui est aussi exacte.

Preuve. Immédiate vu le lemme 5. ∎

Corollaire 7. *Pour* $k \geqq 3$, *les groupes* P_k/C_k *et* DP_k *ne sont pas intérieurement moyennables.*

Preuve. Etant donné une suite exacte de groupes

$$1 \to G' \to G \to G'' \to 1$$

où G' et G'' ne sont pas intérieurement moyennables, on sait que G ne l'est pas non plus. Rappelons aussi que les groupes libres non abéliens ne sont pas intérieurement moyennables [BH]. Grâce à la proposition 6.i, il est donc immédiat de vérifier par récurrence sur k que P_k/C_k n'est pas intérieurement moyennable lorsque $k \geqq 3$.

Soit $G = G' \rtimes G''$ un produit semi-direct tel que l'action de G'' sur l'abélianisé de G' soit banale. (La définition de cette action est rappelée ci-dessous avant le lemme 8.) Un résultat élémentaire de théorie des groupes que nous avons appris de N. Habegger montre que la structure de produit semi-direct passe aux dérivés, c'est-à-dire que $DG = DG' \rtimes DG''$. Or Artin a analysé l'action de P_{k-1} sur $\operatorname{Ker}(\alpha_k) = F_{k-1}$, qui est en particulier banale modulo les commutateurs. Par suite $DP_k = DF_{k-1} \rtimes DP_{k-1}$, et l'assertion du corollaire concernant DP_k résulte aussi d'une récurrence sur k. ∎

Preuve du théorème 2

Pour montrer que B_k/C_k n'est pas intérieurement moyennable ($k \geqq 3$), nous allons appliquer le théorème 1.ii au sous-groupe P_k/C_k de B_k/C_k (voir la proposition 6.ii).

Au lemme suivant, on considère une suite exacte de groupes

$$1 \to H \to G \xrightarrow{\pi} S \to 1$$

et on note H_{ab} l'abélianisé H/DH de H. Rappelons comment S agit sur H_{ab}: étant donné $a \in H_{ab}$ et $s \in S$, on choisit un représentant $h \in H$ de a, un élément $g \in \pi^{-1}(s)$, et on définit $s(a)$ comme la classe de ghg^{-1} modulo DH. Pour tout $s \in S$, désignons par H_{ab}^s le sous-groupe $\{a \in H_{ab} : s(a) = a\}$ des points fixes de s.

Lemme 8. *Avec les notations précédentes, on suppose de plus que* $[H_{ab} : H_{ab}^s] = \infty$ *pour tout* $s \in S - \{1\}$. *Si H est cci, alors G est cci.*

Preuve. Pour tout $g \in G$, notons $C_H(g) = \{x \in G : \text{il existe } h \in H \text{ tel que } x = hgh^{-1}\}$ la partie de la classe de conjugaison de g due à H. Par hypothèse, $C_H(h)$ est infini pour tout $h \in H - \{1\}$.

Soit $g \in G - H$. L'action naturelle par conjugaison de H sur $C_H(g)$ est par définition transitive, et l'isotropie de g est le sous-groupe

$$Z_H(g) = \{h \in H : hgh^{-1} = g\}$$

de H. Si $Z_H(g)_{ab}$ désigne l'image canonique de $Z_H(g)$ dans H_{ab} et si on pose $s = \pi(g) \in S - \{1\}$, on a

$$[H : Z_H(g)] \geqq [H_{ab} : Z_H(g)_{ab}] \geqq [H_{ab} : H_{ab}^s] = \infty.$$

Par suite $C_H(g) = H/Z_H(g)$ est un ensemble infini. ∎

Considérons à nouveau un entier $k \geqq 3$ et la suite exacte

$$1 \to P_k/C_k \to B_k/C_k \to S_k \to 1$$

de la proposition 6.ii. Posons $A_k = (P_k/C_k)_{ab}$. On sait que A_k est un groupe abélien libre de rang $\binom{k}{2} - 1$ engendré par des générateurs commutatifs $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq k}$ soumis à la seule relation $\sum_{1 \leq i \leq j \leq k} a_{i,j} = 0$, et que l'action canonique du groupe symétrique

S_k sur A_k est donnée par

$$s(a_{i,j}) = \begin{cases} a_{s(i),s(j)} & \text{si} \quad s(i) < s(j) \\ a_{s(j),s(i)} & \text{si} \quad s(i) > s(j) \end{cases}$$

pour tout $s \in S_k$; voir [DG].

Lemme 9. *Avec les notations précédentes, on a* $[A_k : A_k^s] = \infty$ *pour tout* $s \in S_k - \{1\}$.

Preuve. Notons X l'ensemble $\{1, \dots, k\}$ et Y l'ensemble des parties à deux éléments de X. Soient V l'espace vectoriel des fonctions de Y dans $\mathbf{R}$ et V_0 l'hyperplan des fonctions satisfaisant $\sum_{y \in Y} f(y) = 0$. Le groupe S_k agit naturellement sur X, donc aussi sur Y, sur V et sur V_0. Pour tout $s \in S_k$, on note V_0^s le sous-espace de V_0 formé des vecteurs fixes par s.

Montrons que $V_0^s \neq V_0$ pour tout $s \in S_k - \{1\}$. Si s contient un cycle de longueur au moins 3, il existe des points distincts $x_1, x_2, x_3 \in X$ tels que $s(x_1) = x_2$ et $s(x_2) = x_3$; si $f \in V_0$ est la fonction qui prend la valeur 1 sur $\{x_2, x_3\}$, la valeur -1 sur $\{x_1, x_2\}$ et la valeur 0 ailleurs, on vérifie que $sf(\{x_2, x_3\}) = f(\{x_1, x_2\}) \neq f(\{x_2, x_3\})$, donc que $f \notin V_0^s$. Si s contient un cycle (x_1, x_2) de longueur 2, on procède de même en choisissant $x_3 \in X - \{x_1, x_2\}$.

Or A_k s'identifie naturellement à un réseau de V_0 et A_k^s à $A_k \cap V_0^s$. Par suite A_k^s est un groupe abélien libre de rang strictement inférieur à celui de A_k, et $[A_k : A_k^s] = \infty$ si $s \neq 1$. ∎

Pour tout $k \geqq 3$, le groupe B_k/C_k est cci en vertu des lemmes 8 et 9; il est donc non intérieurement moyennable en vertu du théorème 1.ii et du corollaire 7.

Comme $DB_k \cap C_k = \{1\}$, l'inclusion $DB_k \subset B_k$ induit une injection $\beta_k \colon DB_k \to B_k/C_k$. Nous avons déjà rappelé que DB_k est le noyau de l'homomorphisme $l_k \colon B_k \to \mathbf{Z}$ et que $C_k \approx \mathbf{Z}$ est engendré par un élément τ^k tel que $l_k(\tau^k) = k(k-1)$. Par suite l_k se factorise en un homomorphisme surjectif $B_k/C_k \to \mathbf{Z}/k(k-1)\mathbf{Z}$ dont le noyau coïncide avec l'image de β_k.

Ainsi DB_k s'identifie à un sous-groupe normal d'indice $k(k-1)$ dans B_k/C_k, et il résulte du théorème 1.i que DB_k n'est pas intérieurement moyennable.

Le preuve du théorème 2 est ainsi achevée.

Propriété (T), et algèbres d'opérateurs

A propos de la propriété (T) de Kazhdan [Kaz], rappelons ceci. Soit G un groupe localement compact séparable (par exemple un groupe discret dénombrable) et soit $\hat{G}$ son dual unitaire, qui est l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de G. Soit $\pi_0 \in \hat{G}$ la représentation unité ($\pi_0(g)$ est l'identité de $\mathbf{C}$ pour tout $g \in G$). On doit à Fell l'introduction d'une topologie sur

$\hat{G}$, et on dit que G possède la propriété (T) si π_0 est un point isolé de $\hat{G}$ pour cette topologie.

Un groupe discret qui a la propriété (T) est de type fini, et n'a pour tout entier n qu'un nombre fini de classes de représentations unitaires de degré n. La propriété (T) passe aux quotients; en particulier, un groupe qui possède la propriété (T) n'a aucun quotient qui soit cyclique infini ou qui soit un produit libre non banal. Les exemples standard de groupes infinis qui ont la propriété (T) sont $SL_n(\mathbf{Z})$ pour $n \geqq 3$ et $Sp_{2n}(\mathbf{Z})$ pour $n \geqq 2$. Pour un exposé systématique sur la propriété (T), voir [HV].

Proposition 10. *Un sous-groupe $G \neq \{1\}$ de B_k n'a pas la propriété (T). Un sous-groupe $G \neq \{1\}$ de B_k/C_k n'a pas la propriété (T).*

Preuve. Montrons d'abord par récurrence sur k qu'un sous-groupe $G \neq \{1\}$ de P_k n'a pas la propriété (T). C'est évident si $k=2$ car P_2 est cyclique infini. Supposons donc que $k \geqq 3$ et que l'affirmation est vraie pour P_{k-1}. Rappelons la suite exacte:

$$1 \to F_{k-1} \to P_k \xrightarrow{\alpha_k} P_{k-1} \to 1.$$

Si $\alpha_k(G) \neq 1$, alors $\alpha_k(G)$ n'a pas la propriété (T) par hypothèse de récurrence, donc G non plus. Si $\alpha_k(G)=1$, alors G est un groupe libre et n'a pas non plus la propriété (T).

La propriété (T) étant stable par passage à des sous-groupes d'indices finis et à des sur-groupes d'indices finis, il en résulte que les groupes suivants n'ont pas de sous-groupe (autre que $\{1\}$) ayant la propriété (T): le groupe B_k, car $[B_k:P_k]=k!<\infty$, donc a fortiori son sous-groupe DB_k, et le groupe B_k/C_k, car $[B_k/C_k:DB_k]=k(k-1)<\infty$ (voir la fin de la preuve du théorème 2). ∎

Remarques 11. (i) A la suite des travaux de V. Jones [Jon], il est facile d'écrire une famille continue «naturelle» $(\pi_x)_{x \in I}$ de représentations unitaires de dimensions finies de B_k qui dépendent continûment de x (où I est un intervalle de $\mathbf{R}$ de la forme $[0, a[$ avec $a>0$) et dont les restrictions à DP_k sont non équivalentes deux à deux ($k \geqq 3$). Pour les groupes G tels que $DP_k \subset G \subset B_k$, on obtient ainsi une autre preuve (moins performante mais peut-être plus intéressante) de la proposition 10.

(ii) A tout graphe de Coxeter X correspond un groupe de tresses B_X, et on retrouve B_n lorsque $X=A_{n-1}$; voir par exemple [Bri]. Soit f: $X \to Y$ un morphisme surjectif de graphes de Coxeter respectant le poids des arêtes, et appliquant deux sommets non voisins de X sur deux sommets de Y qui sont on bien confondus ou bien non voisins. Alors f induit un homomorphisme surjectif $B_X \to B_Y$. En particulier, si $Y=A_{n-1}$ avec $n \geqq 3$, alors DB_n est un quotient de DB_X et DB_X n'a pas la propriété (T). C'est par exemple le cas si X est l'un des graphes D_n ($n \geqq 4$) ou E_n ($n \geqq 6$, y compris $n \geqq 9$). Notons qu'on sait [Lin] que DB_X est parfait si $X=D_n$

($n \geqq 4$) ou $X = E_n$ ($n = 6, 7, 8$). Cette remarque nous a été suggérée par F. Goodman.

La représentation régulière gauche d'un groupe G sur l'espace de Hilbert $l^2(G)$ définit un morphisme λ de l'algèbre $\mathbf{C}[G]$ du groupe G dans l'algèbre $L(l^2(G))$ des opérateurs bornés sur $l^2(G)$. L'adhérence faible $W^*(G)$ de l'image de λ dans $L(l^2(G))$ est *l'algèbre de von Neumann* de G; elle contient l'adhérence normique $C_r^*(G)$ de $\mathrm{Im}(\lambda)$ qui est la *C^*-algèbre réduite* de G.

Proposition 12. (i) *Soit G l'un des groupes P_k/C_k, DP_k, B_k/C_k, DB_k où $k \geqq 3$. Alors $W^*(G)$ est un facteur de type II_1 qui est plein et qui n'a pas la propriété (T).*

(ii) *Soit G l'un des groupes P_k/C_k, DP_k, où $k \geqq 3$. Alors $C_r^*(G)$ est une C^*-algèbre simple à trace unique.*

Preuve. (i) L'algèbre de von Neumann de G est un facteur de type II_1 (car G est cci) qui est plein (car G n'est pas intérieurement moyennable [BH]) et qui n'a pas la propriété (T) de Kazhdan (car G ne l'a pas [CJ]).

(ii) L'assertion résulte d'une récurrence sur k, grâce aux suites exactes

$$1 \to F_{k-1} \to P_k/C_k \to P_{k-1}/C_{k-1} \to 1$$
$$1 \to DF_{k-1} \to DP_k \to DP_{k-1} \to 1$$

et grâce au travail de Boca et Nitica [BN]. ∎

Groupes de noeuds

Montrons pour terminer que les énoncés qui précèdent valent aussi pour certains groupes de noeuds, et ne sont en fait alors que des reformulations de résultats bien connus. Soit en effet G le groupe d'un noeud classique non banal K dans la sphère S^3.

Si K est torique, G est une extension centrale

$$1 \to \mathbf{Z} \to G \to (\mathbf{Z}/a\mathbf{Z}) * (\mathbf{Z}/b\mathbf{Z}) \to 1$$

où $a \geqq 2$ et $b \geqq 3$ sont des entiers premiers entre eux. Le groupe G est intérieurement moyennable (car il a un centre), mais DG ne l'est pas, car c'est un groupe libre à $(a-1)(b-1) \geqq 2$ générateurs (corollaire 4.11 de [BZ]). Il en résulte que $W^*(G/\mathbf{Z})$ et $W^*(DG)$ sont des facteurs pleins qui n'ont pas la propriété (T), et que $C_r^*(G/\mathbf{Z})$ et $C_r^*(DG)$ sont des C^*-algèbres simples, chacune avec trace unique.

Supposons désormais K non torique, c'est-à-dire G sans centre (théorème 6.1 de [BZ]). Thurston a montré qu'il n'y a alors que deux cas possibles: ou bien le noeud est hyperbolique, ou bien il a un compagnon (voir les explications de Shalen, section 3 du chapitre IV de [MB]). Dans le premier cas, G est isomorphe à un sous-groupe discret sans torsion de covolume fini dans $PSL_2(\mathbf{C})$ et par suite G est un groupe cci, non intérieurement moyennable, qui ne possède pas la propriété (T). Dans le second cas, G est un produit libre avec amalgamation sur $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ (proposition 3.11 de [BZ]), et nous conjecturons que G possède encore les mêmes propriétés (c'est même évident si K n'est pas premier, auquel cas G est un produit libre).

Références

Art. ARTIN, E., Theory of braids, *Ann. of Math.* **48** (1947), 101—126.

Ba. BASS, H., The degree of polynomial growth of finitely generated nilpotent groups, *Proc. London Math. Soc.* **25** (1972), 603—614.

BH. BEDOS, E. et DE LA HARPE, P., Moyennabilité intérieure des groupes, définitions et exemples, *L'Enseign. Math.* **32** (1986), 139—157.

BN. BOCA, F. et NITICA, V., Combinatorial properties of groups and simple C^*-algebras with a unique trace, *J. Operator Theory* **20** (1988), 183—196.

Bri. BRIESKORN, E., Sur les groupes de tresses (d'après V. I. Arnol'd), in: *Séminaire Bourbaki, Lecture Notes in Math.* **317**, pp. 21—44. Springer-Verlag, Berlin—New York, 1973.

BZ. BURDE, G. et ZIESCHANG, H., *Knots*, De Gruyter, 1985.

Cho. CHOW, W. L., On the algebraical braid group, *Ann. of Math.* **49** (1948), 654—658.

CJ. CONNES, A. et JONES, V., Property T for von Neumann algebras, *Bull. London Math. Soc.* **17** (1985), 57—62.

DG. DYER, J. L. et GROSSMAN, E. K., The automorphism groups of the braid groups, *Amer. J. Math.* **103** (1981), 1103—1134.

GL. GORIN, E. A. et LIN, V. YA., Algebraic equations with continuous coefficients and certain questions of the algebraic theory of braids, *Mat. Sb.* **78** (120) (1969), 579—610.

HV. DE LA HARPE, P. et VALETTE, A., La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts, *Astérisque*, n° 175, 1989.

Jon. JONES, V., Index for subfactors, *Invent. Math.* **72** (1983), 1—25.

Kaz. KAZHDAN, D., Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups, *Funct. Anal. Appl.* **1** (1967), 63—65.

Lin. LIN, V. YA., Artin braids and the groups and spaces connected with them, *J. Soviet Math.* **18** (1982), 756—788.

Mag. MAGNUS, W., Braid groups: a survey, in: *Proc. Second Internat. Conf. on the Theory of Groups, Lecture Notes Math.* **372**, pp. 463—487. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1974.

MB. MORGAN, J. W. et BASS, H. (éd.), *The Smith conjecture*, Academic Press, 1984.

Reçu, le 30 novembre 1989

Université de Genève
Section de Mathématiques
2-4, rue du Lièvre
Case postale 240
1211 Genève 24
Suisse