Ark. Mat., **32** (1994), 63–77

Isopérimétrie, décroissance du noyau de la chaleur et transformations de Riesz: un contre-exemple

Thierry Coulhon et Michel Ledoux

1. Introduction

Si M est une variété riemannienne complète non compacte, il est maintenant bien connu que l'inégalité isopérimétrique $|A|^{(N-1)/N} \le C|\partial A|$, où A décrit les sous-ensembles compacts de M à bord régulier, entraîne $\sup_{x,y\in M} p_t(x,y) \le C' t^{-N/2}$, $t>0$, où p_t est le noyau de la chaleur sur M ([17], voir aussi [6]). Une réciproque partielle à ce résultat est annoncée dans [20]: si M est à géométrie bornée (par exemple à courbure de Ricci minorée et à rayon d'injectivité positif), et si $\sup_{x,y\in M} p_t(x,y) = O(t^{-N/2})$, $t\to+\infty$ (dans cette situation on a de toute façon $\sup_{x,y\in M} p_t(x,y) = O(t^{-(\dim M)/2})$, $t\to 0$), alors $|A|^{(N'-1)/N'} \le C|\partial A|$, si $\dim M \le N' \le N/2$. Les hypothèses de géométrie bornée sont naturelles, et la restriction $\dim M \le N'$ peut être levée (cf. § 2), si l'on considère une inégalité isopérimétrique convenablement localisée à l'infini comme dans [4], [5]. Mais l'on s'attend à ce que la condition $N' \le N/2$ puisse être remplacée par $N' \le N$, comme c'est le cas en courbure de Ricci positive ou nulle ([18, § 5], voir aussi [9]).

Notre but est de montrer qu'il n'en est rien, et plus précisément de prouver le

Théorème 1. *Pour tout entier $N \ge 3$ et pour tout réel $N' > N/2$, il existe une variété riemannienne M de dimension N, à courbure sectionnelle bornée et à rayon d'injectivité positif, telle que:*

i) $\sup_{x,y\in M} p_t(x,y) = O(t^{-N/2})$, $t\to+\infty$, *où p_t est le noyau de la chaleur sur M.*

ii) *L'inégalité isopérimétrique $|A|^{(N'-1)/N'} \le C|\partial A|$, où A décrit les sous-ensembles compacts à bord régulier de M contenant une boule de rayon fixé, est en défaut pour tout C.*

Remarque. Pour une variété de dimension N à courbure de Ricci minorée et à rayon d'injectivité positif, on a *toujours* $\sup_{x,y\in M} p_t(x,y) = O(t^{-N/2})$, $t\to 0$

(voir [15]). En revanche, l'inégalité isopérimétrique $|A|^{(N'-1)/N'} \leq C|\partial A|$, où A décrit tous les sous-ensembles compacts à bord régulier de M, ne peut avoir lieu que pour $N' \geq \dim M = N$, à cause des petits ensembles. Mais le phénomène de défaut d'isopérimétrie que nous voulons faire apparaître est indépendant de cette contrainte purement locale; c'est ce qui nous amène en ii) à considérer, à la suite de Chavel et Feldman ([4], [5]), une inégalité isopérimétrique "localisée à l'infini" parce qu'elle ne porte que sur des ensembles suffisamment grands.

Nous prouverons parallèlement le

Théorème 2. *Pour tout entier $N \geq 3$ et pour tout réel $N' > N/2$, il existe un graphe connexe X, localement uniformément fini, tel que:*

i) $\sup_{x,y \in X} q_k(x,y) = O(k^{-N/2})$, *où q_k est le noyau de la marche aléatoire standard sur X.*

ii) *L'inégalité isopérimétrique $|A|^{(N'-1)/N'} \leq C|\partial A|$, où A décrit les sous-ensembles finis de X, est en défaut.*

Un point laissé en suspens par le Théorème 1 est celui de savoir si l'on peut construire, par exemple par recollement, une telle variété sur laquelle toutes les inégalités $|A|^{(N'-1)/N'} \leq C|\partial A|$, $N' > N/2$, soient fausses. La situation est bien sûr la même pour l'énoncé discret.

Le point de départ de notre travail a été exposé par l'un d'entre nous dans [9]. Les idées qui fondent le contre-exemple figurent déjà dans ce texte, exprimées en termes d'inégalités de Sobolev pondérées sur $\mathbf{N}$; nous développons ici les techniques qui permettent de passer du modèle unidimensionnel à la construction d'une véritable variété. Nous montrons aussi que sur cette variété, les transformations de Riesz ne sont pas toujours bornées sur L^p.

2. Le résultat positif

Nous démontrons dans ce paragraphe (qui est essentiellement extrait de [9]) un résultat un peu plus général que celui qui est annoncé dans [21, p. 276]. Nous en donnerons deux preuves très simples, mais très différentes: la première repose sur des arguments de semi-groupes, dans la lignée de [19], et la seconde sur un argument de discrétisation.

Proposition 1. *Soit M une variété riemannienne à courbure de Ricci minorée telle que:*

i) $\sup_{x,y \in M} p_t(x,y) = O(t^{-N/2})$, $t \to +\infty$, *pour $N > 2$, où p_t est le noyau de la chaleur sur M.*

Alors

ii) $|A|^{(N-2)/N} \le C|\partial A|$, *où* A *décrit les sous-ensembles compacts à bord régulier de* M *contenant une boule de rayon fixé.*

Preuve 1. Soit P_t le semi-groupe de la chaleur sur M. Les estimations en temps petit de Li et Yau ([15]), et les arguments de [20] permettent de voir que $\|f-P_tf\|_1 \le C\sqrt{t}\||\nabla f|\|_1$, pour $0<t\le 1$ (pour une preuve simple et détaillée, voir [14]). On en déduit facilement:

$$\|f-P_tf\|_1 \le Ct\||\nabla f|\|_1, \qquad \text{pour } t\ge 1.$$

Ecrivons maintenant, pour $\lambda>0$ et $f\in C_0^\infty(M)$,

$$|\{|f|\ge\lambda\}| \le \left|\left\{|f-P_tf|\ge\frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{|P_tf|>\frac{\lambda}{2}\right\}\right|.$$

Par hypothèse

$$\|P_tf\|_\infty \le Ct^{-N/2}\|f\|_1, \qquad \text{pour } t\ge 1.$$

Si t_0 est tel que $Ct_0^{-N/2}\|f\|_1=\lambda$ et $t_0\ge 1$, on a donc

$$|\{|f|\ge\lambda\}| \le \left|\left\{|f-P_{t_0}f|>\frac{\lambda}{2}\right\}\right| \le \frac{2}{\lambda}\|f-P_{t_0}f\|_1 \le \frac{2}{\lambda}t_0\||\nabla f|\|_1,$$

et finalement

$$|\{|f|\ge\lambda\}| \le \frac{2}{\lambda}\left(\frac{C\|f\|_1}{\lambda}\right)^{2/N}\|\nabla f\|_1.$$

Si A est un sous-ensemble de M à bord régulier de mesure supérieure ou égale à C^{-1}, on obtient, en prenant pour f une approximation C^∞ de 1_A et en choisissant $\lambda=1$,

$$|A| \le C'|A|^{2/N}|\partial A|.$$

Notons que la conclusion est légèrement plus forte que ii), puisque qu'elle s'applique en fait à tous les ensembles de mesure suffisamment grande; en fait les hypothèses de géométrie bornée faites sur M permettent sans doute toujours d'améliorer ainsi ii).

Preuve 2. Soit X un discrétisé de la variété M, c'est-à-dire une partie maximale ε-séparée de M, où $\varepsilon>0$ est fixé, munie de la structure de graphe obtenue en décidant que deux points de X sont voisins s'ils sont distants de 2ε au plus dans M. La condition

$$\sup_{x,y\in M} p_t(x,y) = O(t^{-N/2}), \quad t\to+\infty,$$

équivaut d'après [8] à

$$\|f\|_{2N/(N-2)} \le C\Big(\sum_{x\sim y} |f(x)-f(y)|^2\Big)^{1/2}, \quad \forall f \text{ à support fini sur } X.$$

En appliquant cette inégalité aux fonctions $f=1_\Omega$, où Ω décrit les sous-ensembles finis de X, on obtient

$$(\operatorname{Card}\Omega)^{(N-2)/2N} \le C(\operatorname{Card}\partial\Omega)^{1/2}.$$

Cette dernière inégalité est à son tour équivalente à l'inégalité isopérimétrique cherchée sur M (voir [4], [13]).

Remarque. En fait, i) dissimule une hypothèse sur la variété: le simple fait que $\sup_{x,y\in M} p_1(x,y)<+\infty$ équivaut, en courbure de Ricci minorée, à une minoration uniforme sur le volume des boules de rayon 1 sur M ([5], [20]). Cette minoration, qui est utilisée implicitement dans la preuve 2, est assurée, d'après les travaux de Croke, si M a un rayon d'injectivité positif. La preuve 2 montre en fait que l'on peut remplacer l'hypothèse de courbure par une majoration et une minoration uniformes des volumes des boules de rayon 1. D'après une prépublication récente de Gilles Carron ("Inégalités isopérimétriques de Faber–Krahn et conséquences"), on ne peut se passer d'une telle hypothèse.

3. Le contre-exemple

Soit $M=\mathbf{R}\times S^{n-1}$, avec $n\ge 4$. Munissons M de la métrique qui au point (x,θ) s'écrit, de façon un peu abusive mais claire, $g=\xi\times\sigma(x)g_1$, où ξ est la métrique euclidienne sur $\mathbf{R}$, g_1 la métrique standard sur S^{n-1} et σ une fonction C^∞ de $\mathbf{R}$ dans $[1,+\infty[$, paire, valant 1 sur $[-1,1]$, et telle que $\sup_{x\in\mathbf{R}} |\sigma''(x)/\sigma(x)|<+\infty$; (M,g) est alors une variété riemannienne (de révolution) à courbure sectionnelle bornée (cf. [3, p. 26]) et à rayon d'injectivité positif. Sa mesure riemannienne est, à une constante multiplicative près, $\sigma^{n-1}(x)dxd\theta$, où $d\theta$ est la mesure uniforme normalisée sur la sphère S^{n-1}. La longueur du gradient au carré $|\nabla f|^2$ vaut $(f'_x)^2+(|\nabla_\theta f|^2/\sigma^2(x))$, où $\nabla_\theta f$ désigne le gradient de f comme fonction sur S^{n-1}. On a donc

$$\||\nabla f|\|_2^2 = \int_{\mathbf{R}}\int_{S^{n-1}} |f'_x(x,\theta)|^2\sigma^{n-1}(x)\,dx\,d\theta + \int_{\mathbf{R}}\int_{S^{n-1}} |\nabla_\theta f(x,\theta)|^2\sigma^{n-3}(x)\,dx\,d\theta.$$

Nous allons montrer que si σ est comme ci-dessus et satisfait certaines conditions supplémentaires, la variété M vérifie les propriétés i) et ii) du Théorème 1.

Plus précisément, soit $\alpha_k=\int_k^{k+1}\sigma^{n-1}(x)\,dx$, pour $k\in\mathbf{Z}$, et $\beta_k=\sum_{l=0}^k\alpha_l$, pour $k\in\mathbf{N}$. Supposons que:

$$(1)\qquad \exists C>0 \quad \text{tel que } \Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}}|f_k|^a\alpha_k\Big)^{2/a}\le C\sum_{k\in\mathbf{Z}}|f_k-f_{k+1}|^2\alpha_k,$$

pour toute suite à support fini $(f_k)_{k\in\mathbf{Z}}$,
et

$$(2)\qquad \text{Il n'existe aucun } C>0 \text{ tel que } \beta_k^{1/b}\le C\alpha_k,\ \forall k\in\mathbf{N},$$

où $1<b<a/2$, autrement dit $a=2N/(N-2)$, avec $N>2$, et $b=N'/(N'-1)$ avec $N'>N/2$. Nous construirons au § 4 un poids σ vérifiant (1) et (2), pour $N>2$ et $N'>N/2$ arbitraires.

Proposition 2. *Si $n=N+1$, la variété M vérifie*

$$\sup_{x,y\in M}p_t(x,y)=O(t^{-N/2}),\quad t\to+\infty.$$

Preuve. Nous allons d'abord déduire de (1) l'inégalité

$$(3)\qquad \begin{aligned}\Big[\sum_k\Big(\int_{S^{n-1}}|f_k(\theta)|^a\,d\theta\Big)\alpha_k\Big]^{2/a}\le C\Big[&\sum_k\Big(\int_{S^{n-1}}|f_k(\theta)-f_{k+1}(\theta)|^2\,d\theta\Big)\alpha_k\\&+\sum_k\Big(\int_{S^{n-1}}|\nabla_\theta f_k(\theta)|^2\,d\theta\Big)\alpha_k^{(n-3)/(n-1)}\Big],\end{aligned}$$

pour toute suite $(f_k(\theta))$ à support fini de fonctions sur S^{n-1},

c'est-à-dire une inégalité de Sobolev "discrétisée en x" sur M. Pour cela, posons $f_k=\int f_k(\theta)\,d\theta$. On a

$$\begin{aligned}\Big[\sum_k\Big(\int_{S^{n-1}}|f_k(\theta)|^a\,d\theta\Big)\alpha_k\Big]^{1/a}\le&\Big(\sum_k|f_k|^a\alpha_k\Big)^{1/a}\\&+\Big[\sum_k\Big(\int_{S^{n-1}}|f_k(\theta)-f_k|^a\,d\theta\Big)\alpha_k\Big]^{1/a}.\end{aligned}$$

D'après (1),

$$\Big(\sum_k|f_k|^a\alpha_k\Big)^{1/a}\le C\sum_k|f_k-f_{k+1}|^2\alpha_k,$$

et

$$|f_k-f_{k+1}|^2 \leq \left(\int_{S^{n-1}} |f_k(\theta)-f_{k+1}(\theta)|\,d\theta\right)^2 \leq \int_{S^{n-1}} |f_k(\theta)-f_{k+1}(\theta)|^2\,d\theta$$

d'après l'inégalité de Jensen. Donc

$$\left(\sum_k |f_k|^a \alpha_k\right)^{2/a} \leq \sum_k \left(\int_{S^{n-1}} |f_k(\theta)-f_{k+1}(\theta)|^2\,d\theta\right)\alpha_k.$$

D'autre part, si $N \geq n-1$, l'inégalité de Poincaré–Sobolev sur S^{n-1} donne

$$\left(\int_{S^{n-1}} |f_k(\theta)-f_k|^a\,d\theta\right)^{1/a} \leq C\left(\int |\nabla_\theta f_k(\theta)|^2\,d\theta\right)^{1/2},$$

uniformément en k. Donc

$$\begin{aligned}\left[\sum_k \left(\int_{S^{n-1}} |f_k(\theta)-f_k|^a\,d\theta\right)\alpha_k\right]^{1/a} &\leq C\left[\sum_k \left(\int_{S^{n-1}} |\nabla_\theta f_k(\theta)|^2\,d\theta\right)^{a/2}\alpha_k\right]^{1/a}\\ &\leq C\left[\sum_k \left(\int_{S^{n-1}} |\nabla_\theta f_k(\theta)|^2\,d\theta\right)\alpha_k^{2/a}\right]^{1/2},\end{aligned}$$

car $a \geq 2$. Si $2/a \leq (n-3)/(n-1)$, i.e. $N \leq n-1$, on obtient ainsi, comme $\alpha_k \geq 1$,

$$\begin{aligned}&\left[\sum_k \left(\int_{S^{n-1}} |f_k(\theta)-f_k|^a\,d\theta\right)\alpha_k\right]^{1/a}\\ &\quad\leq C\left[\sum_k \left(\int_{S^{n-1}} |\nabla_\theta f_k(\theta)|^2\,d\theta\right)\alpha_k^{(n-1)/(n-3)}\right]^{1/2}.\end{aligned}$$

Finalement, (3) est démontrée si $N=n-1$.

Nous allons maintenant établir les inégalités

$$\left\{\begin{array}{ll} \|Sf\|_a & \leq C\||\nabla f|\|_2 \\ \|(I-S)f\|_2 & \leq C\||\nabla f|\|_2 \end{array}\right., \quad \forall f \in C_0^\infty(M), \tag{4}$$

où S est un opérateur de moyenne convenable.

Soit $(\varphi_k)_k$ une partition de l'unité C^∞ de $\mathbf{R}$ indexée par $\mathbf{Z}$:

$$\sum_k \varphi_k(x)=1, \quad 0 \leq \varphi_k(x) \leq 1, \ \forall x \in \mathbf{R},$$

$$\varphi_k(x) \equiv 1 \text{ sur } \left[k-\tfrac{1}{4}, k+\tfrac{1}{4}\right], \quad \operatorname{supp}\varphi_k \subset \left]k-\tfrac{3}{4}, k+\tfrac{3}{4}\right[.$$

On définit alors S par

$$Sf(x,\theta)=\sum_k f_k(\theta)\varphi_k(x),$$

où

$$f_k(\theta)=\frac{1}{\alpha_k}\int_k^{k+1} f(x,\theta)\sigma^{n-1}(x)\,dx.$$

On a alors, pour $f\in C_0^\infty(M)$,

$$\begin{aligned}\|(I-S)f\|_2^2&=\int_{\mathbf{R}}\int_{S^{n-1}}\left|\sum_k (f(x,\theta)-f_k(\theta))\varphi_k(x)\right|^2\sigma^{n-1}(x)\,dx\,d\theta\\ &\le\sum_i\int_i^{i+1}\int_{S^{n-1}}\left|\sum_{k=i}^{i+1}(f(x,\theta)-f_k(\theta))\varphi_k(x)\right|^2\sigma^{n-1}(x)\,dx\,d\theta\\ &\le 2\sum_i\int_i^{i+1}\int_{S^{n-1}}\sum_{k=i}^{i+1}|f(x,\theta)-f_k(\theta)|^2\sigma^{n-1}(x)\,dx\,d\theta\\ &=2\int_{S^{n-1}}\left(\sum_{j=0}^{1}\sum_i\int_i^{i+1}|f(x,\theta)-f_{i+j}(\theta)|^2\sigma^{n-1}(x)\,dx\right)d\theta.\end{aligned}$$

L'inégalité de Jensen donne maintenant, pour $j=0$ ou 1,

$$\begin{aligned}&\int_i^{i+1}|f(x,\theta)-f_{i+j}(\theta)|^2\sigma^{n-1}(x)\,dx\\ &\qquad\le\frac{1}{\alpha_{i+j}}\int_i^{i+1}\int_{i+j}^{i+j+1}|f(x,\theta)-f(y,\theta)|^2\sigma^{n-1}(x)\sigma^{n-1}(y)\,dx\,dy\\ &\qquad\le C\alpha_i\int_i^{i+2}\int_i^{i+2}|f(x,\theta)-f(y,\theta)|^2\,dx\,dy.\end{aligned}$$

La dernière ligne utilise le fait que $\sup_i\sup_{x,y\in[i,i+1]^2}(\sigma(x)/\sigma(y))<+\infty$. En effet, comme nous avons supposé σ minorée et $\sup_{x\in\mathbf{R}}|\sigma''(x)/\sigma(x)|<+\infty$, on a aussi $\sup_{x\in\mathbf{R}}|\sigma'(x)/\sigma(x)|<+\infty$.

Finalement, l'inégalité de Poincaré usuelle sur un intervalle réel donne

$$\int_i^{i+2}\int_i^{i+2}|f(x,\theta)-f(y,\theta)|^2\,dx\,dy\le C\int_i^{i+2}|f'_x(x,\theta)|^2\,dx,$$

indépendamment de i et θ. La deuxième inégalité dans (4) s'ensuit immédiatement.

La première découle de (3). En effet,

$$\begin{aligned}\|Sf\|_a^2 &= \left(\int_{\mathbf{R}}\int_{S^{n-1}}\Big|\sum_k f_k(\theta)\varphi_k(x)\Big|^a \sigma^{n-1}(x)\,dx\,d\theta\right)^{2/a}\\ &\leq C\left[\int_{S^{n-1}}\left(\sum_k |f_k(\theta)|^a\alpha_k\right)d\theta\right]^{2/a}.\end{aligned}$$

L'inégalité (3) donne alors

$$\begin{aligned}\|Sf\|_a^2 \leq \Bigg[&\sum_k\left(\int_{S^{n-1}}|f_k(\theta)-f_{k+1}(\theta)|^2\,d\theta\right)\alpha_k\\ &+\sum_k\left(\int_{S^{n-1}}|\nabla_\theta f_k(\theta)|^2\,d\theta\right)\alpha_k^{(n-3)/(n-1)}\Bigg].\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Jensen, d'abord en $d\theta$, puis en dx et dy, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{S^{n-1}}|f_k(\theta)-f_{k+1}(\theta)|^2\,d\theta\\ &\qquad\leq\frac{1}{\alpha_k\alpha_{k+1}}\int_{S^{n-1}}\int_k^{k+2}\int_k^{k+2}|f(x,\theta)-f(y,\theta)|^2\sigma^{n-1}(x)\sigma^{n-1}(y)\,dx\,dy,\end{aligned}$$

et cette dernière intégrale est majorée, d'après l'inégalité de Poincaré, par

$$C\int_{S^{n-1}}\int_k^{k+2}|f'_x(x,\theta)|^2\,dx\,d\theta,$$

uniformément en k. Finalement,

$$\begin{aligned}\sum_k\left(\int_{S^{n-1}}|f_k(\theta)-f_{k+1}(\theta)|^2\,d\theta\right)\alpha_k &\leq C\sum_k\left(\int_{S^{n-1}}\int_k^{k+2}|f'_x(x,\theta)|^2\,dx\,d\theta\right)\alpha_k\\ &\leq C'\int_{\mathbf{R}}\int_{S^{n-1}}|f'_x(x,\theta)|^2\sigma^{n-1}(x)\,dx\,d\theta.\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant à nouveau Jensen et $\sup_i \sup_{x,y\in[i,i+1]^2}(\sigma(x)/\sigma(y))<+\infty$, on voit que

$$\sum_k\left(\int_{S^{n-1}}|\nabla_\theta f_k(\theta)|^2\,d\theta\right)\alpha_k^{(n-3)/(n-1)}\leq C\int_{\mathbf{R}}\int_{S^{n-1}}|\nabla_\theta f(x,\theta)|^2\sigma^{n-3}(x)\,dx,$$

ce qui achève de prouver (4).

Or (4) entraîne que $\Delta^{-1/2}$ est continu de L^2 dans $L^2+L^a=L^2+L^{2N/(N-2)}$. D'après [7], ceci équivaut, si P_t désigne le semi-groupe de la chaleur sur M, à $\|P_t\|_{1\to\infty}=O(t^{-N/2})$, $t\to+\infty$, c'est-à-dire à $\sup_{x,y\in M}p_t(x,y)=O(t^{-N/2})$, $t\to+\infty$.

Nous allons maintenant déduire de la propriété (2) du poids σ la

Proposition 3. *La variété M ne vérifie pour aucun C l'inégalité isopérimétrique $|A|^{(N'-1)/N'} \leq C|\partial A|$, où A décrit les sous-ensembles compacts à bord régulier de M contenant un disque géodésique de rayon fixé.*

Preuve. Considérons la suite d'ensembles $\Omega_k = [-k, k] \times S^{n-1}$, $k \geq 1$. Le volume de Ω_k vaut $2\beta_k$, et la mesure de son bord vaut $2\sigma^{n-1}(k)$, qui est de l'ordre de α_k. L'inégalité isopérimétrique en question entraînerait donc l'estimation

$$\beta_k^{(N'-1)/N'} \leq C\alpha_k,$$

qui est fausse.

Les Propositions 2 et 3 donnent le

Théorème 1'. *Pour tout entier $N \geq 3$ et pour tout $N' > N/2$, il existe une variété riemannienne M de dimension $N+1$, à courbure sectionnelle bornée et à rayon d'injectivité positif, telle que:*

i) $\sup_{x,y \in M} p_t(x,y) = O(t^{-N/2})$, $t \to +\infty$, *où p_t est le noyau de la chaleur sur M.*

ii) *l'inégalité isopérimétrique $|A|^{(N'-1)/N'} \leq C|\partial A|$, où A décrit les sous-ensembles compacts à bord régulier de M contenant un disque géodésique de rayon fixé, est en défaut pour tout C.*

Les techniques de discrétisation ([12], [13], [4], [8]) permettent de déduire le Théorème 2 du Théorème 1'. En réépaississant le graphe ainsi obtenu, c'est-à-dire en remplaçant les arêtes par des cylindres de dimension N et de rayon fixé, on obtient le Théorème 1 (le graphe en question, obtenu comme discrétisé d'une variété à courbure de Ricci minorée, est localement uniformément fini: le nombre de voisins des sommets est borné; c'est ce qui permet d'opérer des jonctions régulières entre les cylindres, de courbure contrôlée).

Remarques.

- La variété que nous considérons est un cas particulier de ce que Bishop et O'Neill appellent dans [3] un produit tordu (warped product); les procédés présentés ci-dessus s'appliquent tels quels au produit tordu de $\mathbf{R}$ par une variété compacte. On pourrait s'intéresser plus généralement aux propriétés isopérimétriques d'un produit tordu, en fonction des inégalités de Sobolev valides sur les variétés intervenant dans le produit, et du comportement du poids.

- Nous aurions tout aussi bien pu construire une variété difféomorphe à $\mathbf{R}^n$ et non à un cylindre: il suffisait de considérer $\mathbf{R}_+^* \times S^{n-1}$, et de refermer le tube convenablement en 0. M apparaissait alors comme une déformation de $\mathbf{R}^n$ vu en coordonnées polaires.

- Nous verrons au prochain paragraphe lors de la construction de σ que le signe de $\sigma''(x)/\sigma(x)$, et donc celui de la courbure de M, est variable.

- Les graphes et les variétés que nous construisons sont à croissance polynômiale du volume.

- Dans [10], on montre que sous certaines conditions de régularité de la géométrie d'une variété, l'on peut conclure d'une minoration du volume à une inégalité isopérimétrique; on vérifierait facilement que ce n'est pas le cas ici: nous considérons un cas typique où les inégalités de "Poincaré à l'échelle" n'ont pas lieu.

- Dans une prépublication récente ("Heat kernel upper bounds on a complete non-compact manifold"), Alexander Grigor'yan montre que la décroissance du noyau de la chaleur $\sup_{x,y\in M} p_t(x,y)\leq Ct^{-N/2}$, $t>0$, équivaut à l'inégalité isopérimétrique L^2

$$|A|^{-2/N}\leq C\lambda_1(A)$$

(voir aussi le travail déjà cité de G. Carron). Le Théorème 1 montre donc l'écart entre une telle inégalité, et l'inégalité L^1 usuelle.

4. Construction du poids

Nous devons construire dans ce paragraphe une fonction σ sur $\mathbf{R}$, paire, satisfaisant certaines propriétés de régularité, et telle que ses moyennes

$$\alpha_k=\int_k^{k+1}\sigma^{n-1}(x)\,dx,$$

$k\in\mathbf{Z}$, vérifient

(1) $(\sum_{k\in\mathbf{Z}}|f_k|^a\alpha_k)^{2/a}\leq C\sum_{k\in\mathbf{Z}}|f_k-f_{k+1}|^2\alpha_k$, pour toute suite à support fini (f_k),

et

(2) $\beta_k^{1/b}\not\leq C\alpha_k$, $k\in\mathbf{N}$,

où $\beta_k=\sum_{l=0}^k\alpha_l$, et $a>2$, $1<b<a/2$ sont fixés. Nous allons commencer par montrer que la propriété (1) découle d'une estimation sur les α_k plus facile à vérifier. Cette remarque est inspirée d'un raisonnement de Gerl ([11]), voir [9].

Proposition 6. *Si* $\sum_{k\geq 0}{\alpha_k}^{-1}{\beta_k}^{2/a}<+\infty$, *alors* (1) *est satisfaite.*

Preuve. Soit f_k une fonction à support fini sur $\mathbf{N}$. Pour tout $k\geq 0$, posons $d_k=f_k-f_{k+1}$, de sorte que $f_k=\sum_{i\geq k}d_i$. On écrit alors

$$\Big(\sum_{k\geq 0}|f_k|^a\alpha_k\Big)^{1/a}=\Big(\sum_{k\geq 0}\Big|\sum_{i\geq k}d_i\Big|^a\alpha_k\Big)^{1/a}=\Big(\sum_{k\geq 0}\Big|\sum_{i\geq 0}{\alpha_k}^{1/a}d_i1_{\{i\geq k\}}\Big|^a\Big)^{1/a}.$$

En vertu de l'inégalité du triangle,

$$\Big(\sum_{k\geq 0}\Big|\sum_{i\geq 0}\alpha_k{}^{1/a}d_i 1_{\{i\geq k\}}\Big|^a\Big)^{1/a}\leq \sum_{i\geq 0}|d_i|\Big(\sum_{k\geq 0}\alpha_k 1_{\{i\geq k\}}\Big)^{1/a}=\sum_{i\geq 0}|d_i|\beta_i{}^{1/a}.$$

Finalement

$$\Big(\sum_{k\geq 0}|f_k|^a\alpha_k\Big)^{1/a}\leq\Big(\sum_{i\geq 0}|d_i|\beta_i^{1/a}\Big)^{1/a}\leq\Big(\sum_{i\geq 0}|d_i|^2\alpha_i\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i\geq 0}\alpha_i{}^{-1}\beta_i^{2/a}\Big)^{1/2},$$

par Cauchy–Schwarz. En passant d'une sommation sur $\mathbf{N}$ à une sommation sur $\mathbf{Z}$ par parité, la proposition s'ensuit.

Nous sommes maintenant en mesure de construire le poids σ. Comme $2/a<1/b<1$, nous pouvons choisir $D>2$ tel que $2/a<(D-2)/D<1/b$.

Définissons d'abord une suite de réels $(a_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de la façon suivante: $a_0=1$, $a_k=k^{D-1}$ si $1\leq k\leq 2^3$, puis, pour $l\geq 3$,

$$\begin{aligned}
a_k &= k^{D-1}2^{-(k-2^l)} && \text{si } k=2^l,\dots,2^l+l,\\
a_k &= k^{D-1}2^{k-(2^l+2l)} && \text{si } k=2^l+l+1,\dots,2^l+2l,\\
a_k &= k^{D-1} && \text{si } k=2^l+2l+1,\dots,2^{l+1}\\
\text{et enfin } a_{-k} &= a_k && \text{pour } k\in\mathbf{N}^*.
\end{aligned}$$

Notons qu'il existe $C>0$ tel que $C^{-1}a_k\leq a_{k+1}\leq Ca_k$, $\forall k\in\mathbf{Z}$.

Considérons alors la fonction $a(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_k 1_{[k,k+1[}(x)$, $x\in\mathbf{R}$, et définissons le poids σ par la relation $\sigma^{n-1}=a\star\varphi$, où φ est une fonction C^∞ positive, d'intégrale un, à support dans $[0,1]$. La fonction σ est C^∞, paire minorée par 1, elle vaut 1 sur $[-1,1]$; il est facile de voir que la condition $C^{-1}a_k\leq a_{k+1}\leq Ca_k$, $\forall k\in\mathbf{Z}$ entraîne $\sup_{x\in\mathbf{R}}|\sigma''(x)/\sigma(x)|<+\infty$.

Il reste à vérifier que σ satisfait aux conditions (1) et (2). Notons à cet effet que $\alpha_k=\int_k^{k+1}\sigma^{n-1}(x)\,dx\sim a_k$ et, par suite, $\beta_k=\sum_{l=0}^k\alpha_l\sim k^D$. Maintenant, si l'on examine $\beta_k^{1/b}$ et α_k pour $k=2^l+l$, le premier est de l'ordre de $2^{lD/b}$ et le second de l'ordre de $2^{l(D-2)}$, ce qui assure (2) puisque $D/b>D-2$. S'agissant de (1), il suffit en vertu de la Proposition 4 de vérifier que $\sum_{k\geq 0}a_k{}^{-1}k^{2D/a}<+\infty$. Mais, par construction de la suite a_k,

$$\sum_{k\geq 0}a_k{}^{-1}k^{2D/a}\leq C\sum_{k\geq 0}k^{1-D}k^{2D/a}+C\sum_{l\geq 0}l2^{-l(D-2)}2^{l2D/a},$$

et la conclusion en résulte puisque $D-2>2D/a$.

Du point de vue des inégalités de Sobolev pondérées sur $\mathbf{R}$, nous avons obtenu au passage:

Proposition 5. *Pour tout $N>2$, il existe une fonction α sur $\mathbf{R}$, C^∞, minorée par un, telle que l'inégalité*

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^{2N/(N-2)}\alpha(x)\,dx\right)^{(N-2)/N} \le C\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2\alpha(x)\,dx, \quad \forall f\in C_0^\infty(\mathbf{R})$$

soit vraie et l'inégalité

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^{N/(N-1)}\alpha(x)\,dx\right)^{(N-1)/N} \le C\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\alpha(x)\,dx, \quad \forall f\in C_0^\infty(\mathbf{R})$$

soit fausse.

5. Transformations de Riesz

Etudier la continuité L^p des transformations de Riesz pour $1<p<+\infty$ sur une variété riemannienne M revient à se demander si les quantités $\|\Delta^{1/2}f\|_p$ et $\||\nabla f|\|_p$ sont uniformément comparables pour $f\in C_0^\infty(M)$. Bakry a montré dans [1] que c'est le cas pour une variété à courbure de Ricci positive, et dans [2] que si la courbure de Ricci est seulement minorée, alors $\|\Delta^{1/2}f\|_p+\|f\|_p$ est comparable à $\||\nabla f|\|_p+\|f\|_p$ (voir aussi [16]). Nous ne connaissons pas dans la littérature d'exemple de variété où les transformations de Riesz ne soient pas bornées. Celle que nous venons de construire en fournit un. Plus précisément, nous pouvons énoncer:

Théorème 3. *Pour tout $p_0\in]1,2[$, il existe une variété riemannienne M à courbure sectionnelle bornée et à rayon d'injectivité positif vérifiant: $\forall p$, $1<p\le p_0$, il n'existe pas de constante C telle que*

$$\|\Delta^{1/2}f\|_p\le C\||\nabla f|\|_p, \quad \forall f\in C_0^\infty(M).$$

Rappelons d'une part que pour $p=2$ les transformations de Riesz sont toujours bornées, d'autre part que l'inégalité $\||\nabla f|\|_{p'}\le C\|\Delta^{1/2}f\|_{p'}$, où p' est l'exposant conjugué de p, entraîne par dualité $\|\Delta^{1/2}f\|_p\le C\||\nabla f|\|_p$; on nie donc la première en niant la seconde.

Preuve. Fixons $p_0\in]1,2[$. Considérons la variété M construite au §3: on fixe $n=\dim M\ge 4$, $N=n-1$, et on choisit $b=N/(N-p_0)$; on a bien $b<a/2=N/(N-2)$. Le semi-groupe de la chaleur P_t sur M vérifie $\|P_t\|_{1\to\infty}=O(t^{-N/2})$, $t\to+\infty$; il en résulte, d'après la théorie de Hardy–Littlewood–Sobolev abstraite ([18]), que, pour tous p,q tels que $1\le p<n$ et $1/q=(1/p)-(1/N)$, et tout opérateur $\widetilde{S}$ borné de $L^1(M)$ dans $L^\infty(M)$,

$$\|\widetilde{S}f\|_q\le C\|\Delta^{1/2}f\|_p, \quad \forall f\in C_0^\infty(M).$$

Nous choisirons ici $\widetilde{S}$, en reprenant les notations du §3, de la façon suivante:

$$\widetilde{S}f(x,\theta)=\widetilde{S}f(x)=\sum_k f_k\varphi_k(x), \qquad \text{où } f_k=\frac{1}{\alpha_k}\int_k^{k+1}\int_{S^{n-1}} f(x,\theta)\sigma^{n-1}(x)\,dx\,d\theta$$

(l'opérateur S considéré au §3 n'est pas borné de $L^1(M)$ dans $L^\infty(M)$).

Le théorème découlera alors du fait que l'inégalité

$$\|\widetilde{S}f\|_q\leq C\||\nabla f|\|_p, \quad \forall f\in C_0^\infty(M), \tag{5}$$

est en défaut. Considérons en effet une suite $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de fonctions C^∞ sur M, ne dépendant que de x, paires, telles que $0\leq f_k\leq 1$, $f_k\equiv 1$ sur $[0,k]$, $f_k\equiv 0$ sur $[k+1,+\infty[$, et $|f_k'|\leq 2$ sur $[k,k+1]$. On a alors

$$\||\nabla f|\|_p\leq\left(2\int_k^{k+1}2\sigma^{n-1}(x)\,dx\right)^{1/p}=C\alpha_k^{1/p},$$

et, par définition de $\widetilde{S}$,

$$\|\widetilde{S}f\|_q\geq\left(2\int_0^{k-2}\sigma^{n-1}(x)\,dx\right)^{1/q}.$$

L'inégalité (5) entraînerait donc que, pour tout $k\geq 0$,

$$\beta_k^{p/q}\leq C\alpha_k.$$

Or, si $p\leq p_0$,

$$\frac{p}{q}=\frac{N-p}{N}\geq\frac{N-p_0}{N}=\frac{1}{b},$$

et M a été construite de sorte qu'aucune inégalité du type

$$\beta_k^{1/b}\leq C\alpha_k$$

n'ait lieu. Ceci achève la preuve du théorème.

Remarque. Le même type de raisonnement, appliqué au graphe obtenu en discrétisant M, permet d'obtenir un résultat analogue au Théorème 3 pour les transformations de Riesz "discrètes".

Il nous est agréable de remercier Laurent Saloff-Coste, Damien Lamberton, Martine Babillot, Emmanuel Hebey, Nicholas Varopoulos et Noël Lohoué pour d'utiles conversations sur le contenu de cet article.

Bibliographie

1. BAKRY, D., Transformations de Riesz pour les semi-groupes symétriques, dans *Séminaire de Probabilités XIX* (Azéma, J. et Yor, M., eds.), Lecture Notes in Math. **1123**, pp. 130–175, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1985.
2. BAKRY, D., Etude des transformations de Riesz dans les variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée, dans *Séminaire de Probabilités XXI* (Azéma, J., Meyer, P. A. et Yor, M., eds.), Lecture Notes in Math. **1247**, pp. 137–172, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1987.
3. BISHOP, R. et O'NEILL, B., Manifolds of negative curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.* **145** (1969), 1–49.
4. CHAVEL, I. et FELDMAN, E., Isoperimetric constants, the geometry of ends, and large time heat diffusion in Riemannian manifolds, *Proc. London Math. Soc.* **62** (1991), 427–448.
5. CHAVEL, I. et FELDMAN, E., Modified isoperimetric constants, and large time heat diffusion in Riemannian manifolds, *Duke Math. J.* **64** (1991), 473–499.
6. CHENG, S., LI, P. et YAU, S., On the upper estimate of the heat kernel on a complete Riemannian manifold, *Amer. J. Math.* **156** (1986), 153–201.
7. COULHON, T., Dimension à l'infini d'un semi-groupe analytique, *Bull. Sci. Math.* **114** (1990), 485–500.
8. COULHON, T., Noyau de la chaleur et discrétisation d'une variété riemannienne, *Israel J. Math.* **80** (1992), 289–300.
9. COULHON, T., Sobolev inequalities on graphs and on manifolds, dans *Harmonic Analysis and Discrete Potential Theory* (M. Picardello, ed.), pp. 207–214, Plenum, New York, 1992.
10. COULHON, T. et SALOFF-COSTE, L., Isopérimétrie pour les groupes et les variétés, *Rev. Mat. Iberoamericana* **9** (1993), 293–314.
11. GERL, P., Sobolev inequalities and random walks, dans *Probability Measures on Groups VIII* (Heyer, H., ed.), Lecture Notes in Math. **1210**, pp. 84–96, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1986.
12. KANAI, M., Rough isometries, and combinatorial approximations of geometries of non-compact Riemannian manifolds, *J. Math. Soc. Japan* **37** (1985), 391–413.
13. KANAI, M., Analytic inequalities, and rough isometries between non-compact Riemannian manifolds, dans *Curvature and Topology of Riemannian Manifolds* (Shiohama, K., Sakai, T. et Sunada, T., eds.), Lecture Notes in Math. **1201**, pp. 122–137, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1986.
14. LEDOUX, M., A simple analytic proof of an inequality by P. Buser, à paraître dans *Proc. Amer. Math. Soc.*
15. LI, P. et YAU, S., On the parabolic kernel of the Schrödinger operator, *Acta Math.* **156** (1986), 153–201.
16. LOHOUÉ, N., Comparaison des champs de vecteurs et du laplacien, *J. Funct. Anal.* **61** (1985), 164–201.
17. VAROPOULOS, N., Une généralisation du théorème de Hardy–Littlewood–Sobolev pour les espaces de Dirichlet, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **299** (1984), 651–654.

18. VAROPOULOS, N., Hardy–Littlewood theory for semigroups, *J. Funct. Anal.* **63** (1985), 240–260.
19. VAROPOULOS, N., Analysis on nilpotent groups, *J. Funct. Anal.* **66** (1986), 406–431.
20. VAROPOULOS, N., Small time Gaussian estimates of heat diffusion kernels. Part I: the semigroup technique, *Bull. Sci. Math.* **113** (1989), 253–277.

Reçu le 11 janvier 1993

Thierry Coulhon
Département de Mathématiques
Université de Cergy-Pontoise
8, Le Campus
F-95033 Cergy
France

Michel Ledoux
Laboratoire de Statistique et Probabilités
Université Toulouse III
118, route de Narbonne
F-31062 Toulouse Cedex
France