Ark. Mat., **34** (1996), 119–139

Mesure harmonique et équation de la chaleur

Yanick Heurteaux

Soit $t=f(x)$ une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et soit Ω le domaine $\Omega=\{(x,t)\in \mathbf{R}^2;t>f(x)\}$. Notons $\mathcal{C}=\partial/\partial t-\partial^2/\partial x^2$ l'opérateur de la chaleur sur $\mathbf{R}^2$ et $\omega^P(E)$ la mesure harmonique de E au point $P\in\Omega$. C'est à dire que $P\to\omega^P(E)$ désigne la solution au problème de Dirichlet au sens de Perron–Wiener–Brelot pour l'opérateur de la chaleur dans Ω avec donnée frontière $\mathbf{1}_E$. Il est bien connu que l'ouvert Ω est régulier pour le problème de Dirichlet (voir [KW1]). Dans [KW1], [Wu2] et [KW3], Robert Kaufman et Jang-Mei Wu étudient selon la régularité de f les liens existant entre la mesure harmonique et la mesure de longueur. Ils aboutissent au théorème suivant :

Théorème A. ([KW3]) *Soit f une fonction de classe $C^{1,1}$ sur $\mathbf{R}$ et soit $E\subset\partial\Omega$. Alors, E est de longueur nulle si et seulement si pour tout point $P\in\Omega$, $\omega^P(E)=0$.*

Dans [KW1] ils font aussi la constatation suivante :

Théorème B. ([KW1]) *Il existe une fonction $t=f(x)$, $0\le x\le 1$, de classe $C^{1,\alpha}$ pour tout $\alpha<1$, et un ensemble $E\subset\{(x;f(x)),\ 0\le x\le 1\}$ tel que E soit polaire pour l'opérateur de la chaleur et de longueur strictement positive. En particulier, si on prolonge f à $\mathbf{R}$, E est de mesure harmonique nulle dans Ω.*

La régularité $C^{1,1}$ est donc la régularité minimale assurant l'absolue continuité de la mesure de longueur par rapport à la mesure harmonique. En revanche Kaufman et Wu ne savent pas si on conserve l'absolue continuité de ω^P par rapport à la mesure de longueur lorsque f est de classe $C^{1,\alpha}$, $\alpha<1$ (voir [KW3]).

Dans ce travail, nous répondons positivement à cette question et démontrons même un résultat se passant de toute hypothèse de régularité sur f. Notons H_1 la mesure de Hausdorff 1-dimensionelle dans $\mathbf{R}^2$. C'est à dire :

$$H_1(E)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\inf\left\{\sum_i r_i\,;E\subset\bigcup_i B(a_i,r_i),\ r_i\le\varepsilon\right\}\right).$$

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit f une fonction continue sur* $\mathbf{R}$ *et* $\Omega=\{(x,t)\in\mathbf{R}^2;t>f(x)\}$ *le domaine correspondant. Soient* $E\subset\partial\Omega$ *et* $P_0\in\Omega$. *On a :*

$$H_1(E)=0 \quad\Longrightarrow\quad \omega^{P_0}(E)=0.$$

En particulier, on a le corollaire suivant répondant positivement à la question de Kaufman–Wu :

Corollaire 2. *Soit f une fonction continue sur* $\mathbf{R}$. *On suppose que f est à variations bornées sur tout compact et on note σ la mesure de longueur sur $\partial\Omega$. On a :*

$$\forall P\in\Omega,\quad \omega^P\ll\sigma.$$

Le théorème 1 a une interprétation probabiliste simple :

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien à valeurs réelles. Notons T le temps d'entrée dans $\mathbf{R}^2\backslash\Omega$ du processus (X_t,t_0-t). C'est à dire :

$$T=\inf\{t>0\,;(X_t,t_0-t)\in\mathbf{R}^2\backslash\Omega\}.$$

Si E est une partie de $\partial\Omega$ de longueur nulle et si $(x_0,t_0)\in\Omega$, on a :

$$\mathbf{P}_{x_0}(T<+\infty \text{ et } (X_T,t_0-T)\in E)=0.$$

Il se peut cependant que la trajectoire brownienne (X_t,t_0-t) rencontre E avec probabilité strictement positive, c'est à dire que E soit non polaire pour l'opérateur de la chaleur. Par exemple, si $f(x)=x$, les ensembles négligeables pour la mesure harmonique sont exactement les ensembles de longueur nulle tandis que tout sous-ensemble de $\partial\Omega$ de dimension de Hausdorff strictement supérieure à $\frac{1}{2}$ est non polaire pour l'opérateur de la chaleur (voir [TW] pour l'étude des ensembles de capacité parabolique nulle).

Ce travail s'articule de la façon suivante. Lors d'une première partie, nous rappelons les outils clés qui seront utilisés par la suite. En particulier, nous évoquons le principe de Harnack au bord longuement développé dans [He1] et [He2]. Au cours des parties 2 et 3, nous démontrons le théorème 1 lorsque la fonction f est de plus supposée monotone. En particulier, nous faisons intervenir un théorème intermédiaire (théorème 3) traitant le cas des fonctions f strictement monotones et dont l'inverse est de classe $C^{1/2}$. Dans ce cas, on prouve que la mesure harmonique est équivalente à la mesure σ_2, image de la mesure de Lebesgue par l'application $t\to(f^{-1}(t),t)$. On obtient le cas général par un argument de comparaison que l'on doit à Ancona (lemme 3.2). Au cours de la partie 4, on termine la démonstration du théorème 1 en s'appuyant sur le cas des graphes monotones. La cinquième partie est réservée à l'étude d'un exemple illustrant le théorème 1. On construit une fonction f de classe C^α, $1<\alpha<2$ telle que le lieu des zéros de f' soit négligeable pour la mesure harmonique mais non polaire. Ce phénomène ne peut pas se produire si f est de classe C^2. Enfin lors d'une dernière partie, on donne une description géométrique complète de la mesure harmonique lorsque f est monotone.

Il faut signaler que la méthode utilisée pour démontrer le théorème 1 est spécifique à la dimension 2. Nous ne savons pas généraliser le résultat en dimension supérieure.

Remerciements. L'auteur tient tout particulièment à remercier Alano Ancona pour ses encouragements et pour l'aide qu'il lui a apporté pour mettre au point la partie 3.

1. Préliminaires

Nous rappelons ici comment s'appliquent les principes de Harnack au bord pour l'opérateur de la chaleur. Ces résultats sont cruciaux dans l'approche qu'on donne du théorème 1. En particulier, ils sont à la base de la partie 2. Les trois résultats cités se trouvent dans [He1] et [He2] où ils sont établis dans un cadre plus général. Rappelons que le théorème 1.1 se trouvait déjà dans un travail de J. T. Kemper ([Ke]). Fixons une fonction g définie sur $\mathbf{R}$ et vérifiant :

$$\exists k>0\,;\forall(t,t')\in\mathbf{R}^2, \quad |g(t)-g(t')|\le k|t-t'|^{1/2}.$$

Notons $\Omega=\{(x,t)\in\mathbf{R}^2;x>g(t)\}$. Pour $Q=(x,t)\in\partial\Omega$ et $r>0$ appelons $T(Q,r)=\{(y,s)\in\Omega;|t-s|<r,\ |x-y|<10k\sqrt{r}\}$ et $I(Q,r)=T(Q,r)\cap\partial\Omega$.

On a d'abord le théorème de comparaison suivant :

Théorème 1.1. ([Ke], [He1], [He2]) *Il existe une constante $C=C(k)$ strictement positive telle que pour toute solution positive u de l'équation de la chaleur dans Ω tendant vers 0 en tout point de $\partial\Omega\backslash I\big(Q,\frac{1}{2}r\big)$ et dominée à l'infini par un potentiel on ait :*

$$\forall P\in\Omega\backslash T(Q,r), \quad u(P)\le Cu(M_r),$$

où $M_r=Q+(10k\sqrt{r},r)$.

Remarque. Dans [He1] on trouve explicitement l'énoncé du théorème 1.1. Dans [He2], un énoncé similaire est établi lorsque l'ouvert est borné. On peut alors se passer de la domination de u par un potentiel. Dans le cas d'un ouvert non borné, l'hypothèse de domination est là pour nous permettre d'utiliser le principe du maximum dans Ω. Elle est en particulier automatiquement vérifiée lorsque $u(P)=\int f(M)\,d\omega^P(M)$ où f est une fonction bornée et portée par $I\big(Q,\frac{1}{2}r\big)$: c'est la situation qui nous intéresse.

Les théorèmes 1.2 et 1.3 qui suivent décrivent des principes de comparaison de solutions positives.

Théorème 1.2. (Principe de Harnack faible au bord, [He1], [He2]) *Il existe une constante $C=C(k)$ strictement positive telle que pour tout couple (u,v) de solutions positives dans Ω s'annulant en tout point de $I(Q,2r)$ on ait :*

$$\forall P\in T(Q,r),\quad \frac{u(P)}{u(P_r)}\le C\frac{v(P)}{v(P_r^*)},$$

où $P_r=Q+(10k\sqrt{r},2r)$ et $P_r^*=Q+(10k\sqrt{r},-2r)$.

Théorème 1.3. (Principe de Harnack fort au bord, [He1], [He2]) *Il existe une constante $C=C(k)$ strictement positive telle que pour tout couple (u,v) de solutions positives dans $\Omega\backslash T(Q,r)$ tendant vers 0 en tout point de $\partial\Omega\backslash I(Q,r)$ et dominées à l'infini par un potentiel on ait :*

$$\forall s>r,\quad \frac{u(P_s)}{u(P_r)}\le C\frac{v(P_s)}{v(P_r)}.$$

Remarque. Lors des énoncés similaires dans [He1], [He2], on est amené à faire restriction $r\le 1$ car on traite le cas d'opérateurs non homogènes. Ici, les homogénéités de l'opérateur de la chaleur nous permettent de nous affranchir de cette hypothèse.

Notation. La propriété importante dans les trois énoncés qui précèdent est l'indépendance des constantes C par rapport aux paramètres r et Q. Lorsque deux quantités A et B vérifieront l'inégalité $A\le CB$ où C ne dépend pas des paramètres intervenant, nous écrirons $A\lesssim B$. On notera $A\approx B$ pour dire $A\lesssim B$ et $B\lesssim A$.

2. Le cas où les oscillations de f sont grandes

Dans toute cette partie, f désigne une fonction continue sur $\mathbf{R}$ vérifiant de plus :

$$(*)\qquad \exists\, k>0\,;\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2,\quad |f(x)-f(y)|\ge\frac{1}{k^2}|x-y|^2.$$

Une telle fonction f est strictement monotone et bijective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$. Pour fixer les idées, nous la supposerons strictement décroissante et nous noterons g son inverse. La fonction g est donc de classe $C^{1/2}$. Enfin, notons σ_2 l'image de la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ par l'application $t\to(g(t),t)$. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 3. *Pour tout point $Q=(x,t)\in\partial\Omega$ et tout réel $r>0$, notons :*

$$I(Q,r)=\{(y,s)\in\partial\Omega\,;|t-s|<r\}.$$

Fixons $Q_0=(y_0,s_0)\in\partial\Omega$ et $r_0>0$. Il existe des constantes $C>0$ et $\alpha\geq 1$ ne dépendant que de k telles que pour tout "intervalle" $I(Q,r)\subset I\big(Q_0,\frac{1}{2}r_0\big)$ et pour tout borélien $E\subset I(Q,r)$ on ait :

$$\frac{1}{C}\left(\frac{\omega^{M_0}(E)}{\omega^{M_0}(I(Q,r))}\right)^{\alpha}\leq\frac{\sigma_2(E)}{\sigma_2(I(Q,r))}\leq C\frac{\omega^{M_0}(E)}{\omega^{M_0}(I(Q,r))},$$

où $M_0=Q_0+(10k\sqrt{r_0},2r_0)$.

Corollaire 4. *Soit $P_0=(X_0,T_0)\in\Omega$. Les mesures ω^{P_0} et σ_2 sont équivalentes sur l'ensemble $\partial\Omega\cap\{(x,t)\in\mathbf{R}^2;t<T_0\}$. En particulier, le théorème 1 est vrai si f vérifie la propriété $(*)$.*

Remarques. 1. L'inégalité de gauche se déduit de l'inégalité de droite grâce à la théorie des poids de Muckenhoupt (voir par exemple [To]). Ici on démontre en fait que $\sigma_2\in A^\infty(\omega^{M_0})$. Si on écrit $d\omega^{M_0}=h\,d\sigma_2$ sur l'ensemble $I\big(Q_0,\frac{1}{2}r_0\big)$, l'inégalité de droite du théorème 3 nous apprend, après un passage à la limite, que $h\in A^1(d\sigma_2)$.

2. Si f vérifie $(*)$, la géométrie de l'ouvert Ω est élémentaire. En particulier, si $P_0=(X_0,T_0)\in\Omega$ et si E est un borélien de $\partial\Omega\cap\{t<T_0\}$ tel que $\omega^{P_0}(E)=0$, les inégalités de Harnack permettent d'affirmer que $\omega^P(E)=0$ en tout point $P\in\Omega\cap\{t<T_0\}$. Ensuite, le principe du maximum permet d'étendre cette identité à tout point $P\in\Omega$. Grâce à cette remarque, le corollaire 4 est une conséquence élémentaire du théorème 3 : il suffit de constater qu'un sous-ensemble de $\partial\Omega$ de longueur nulle se projette sur l'axe des t en un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

3. Rappelons qu'en général, si l'ouvert Ω est délimité par le graphe d'une fonction g de classe $C^{1/2}$, la mesure harmonique n'est pas équivalente à la mesure σ_2. Les deux mesures peuvent même être étrangères entre elles (voir [KW2]). Dans le cas d'une fonction non monotone, il faut en général renforcer l'hypothèse sur le module de continuité de g pour obtenir l'équivalence entre ces deux mesures (voir [He2], [LS] et [LM2]). On peut aussi consulter [LM3] qui traite de ce problème en dimension supérieure.

4. Si on note $\widetilde{\Omega}=\{(x,t)\in\mathbf{R}^2;t<f(x)\}$, on peut aussi démontrer, avec une démarche similaire à celle qui va suivre, l'inégalité :

$$\frac{1}{C}\left(\frac{\sigma_2(E)}{\sigma_2(I(Q,r))}\right)^{\alpha}\leq\frac{\omega^{\widetilde{M}_0}(E)}{\omega^{\widetilde{M}_0}(I(Q,r))}\leq C\,\frac{\sigma_2(E)}{\sigma_2(I(Q,r))},$$

où $\widetilde{M_0}=Q_0+(-10k\sqrt{r_0},2r_0)$.

Démonstration du théorème 3. Pour pouvoir utiliser la théorie des poids de Muckenhoupt, il faut s'assurer que la mesure ω^{M_0} vérifie la propriété de doublement suivante :

Lemme 2.1. (Doubling property) *On reprend les notations du théorème* 3. *Il existe une constante $C=C(k)$ strictement positive telle que si $I(Q,2r)\subset I\big(Q_0,\frac{1}{2}r_0\big)$ on ait :*

$$\omega^{M_0}(I(Q,2r))\leq C\omega^{M_0}(I(Q,r)).$$

Cette propriété apparait fréquemment (voir [He1], [FGS], [Wu1]). C'est une conséquence simple du principe de Harnack au bord. Si $P_r=Q+(10k\sqrt{r},2r)$, et si $r\leq r_0/100$, les inégalités de Harnack et le théorème 1.1 nous assurent que :

$$\frac{\omega^{M_0}(I(Q,2r))}{\omega^{M_0}(I(Q,r))}\approx\frac{\omega^{P_{r_0/4}}(I(Q,2r))}{\omega^{P_{r_0/4}}(I(Q,r))}.$$

De plus, le principe de Harnack à la frontière nous permet d'écrire que :

$$\frac{\omega^{P_{r_0/4}}(I(Q,2r))}{\omega^{P_{r_0/4}}(I(Q,r))}\lesssim\frac{\omega^{P_{2r}}(I(Q,2r))}{\omega^{P_{2r}}(I(Q,r))}.$$

On conclut alors en constatant que le second membre de cette dernière inégalité est de l'ordre d'une constante. Enfin, les quantités $\omega^{M_0}(I(Q,2r))$ et $\omega^{M_0}(I(Q,r))$ sont toutes deux de l'ordre d'une constante lorsque $r>r_0/100$.

On est alors en mesure de démontrer le théorème 3. Seule la deuxième inégalité est à justifier. Par régularité des mesures σ_2 et ω^{M_0}, on peut supposer que le borélien E est ouvert dans $\partial\Omega$. Ensuite, comme tout ouvert de $\partial\Omega$ est réunion dénombrable d'intervalles disjoints du type $I(M,s)$, on peut supposer que E est de ce type. Enfin, grâce au lemme 2.1, on peut supposer que $M=Q$ et donc par conséquent $s<r$.

Reprenons les notations du lemme 2.1. Le principe de Harnack fort au bord et le théorème 1.1 nous apprennent que :

$$\frac{\omega^{M_0}(I(Q,s))}{\omega^{M_0}(I(Q,r))}\approx\frac{\omega^{P_{r_0/2}}(I(Q,s))}{\omega^{P_{r_0/2}}(I(Q,r))}\approx\frac{\omega^{P_r}(I(Q,s))}{\omega^{P_r}(I(Q,r))}\approx\omega^{P_r}(I(Q,s))\approx\frac{\omega^{P_r}(I(Q,s))}{\omega^{P_s}(I(Q,s))}.$$

Notons alors $A_s=Q+(\sqrt{s},0)$ et $G_{A_s}(\cdot)$ la fonction de Green dans Ω de pôle A_s. Il est bien connu que $G_{A_s}(P_s)\approx\sqrt{1/s}$ (voir [He2] par exemple). Ainsi, à l'aide du principe de Harnack fort au bord on obtient :

$$\frac{\omega^{P_r}(I(Q,s))}{\omega^{P_s}(I(Q,s))}\approx\frac{G_{A_s}(P_r)}{G_{A_s}(P_s)}\approx\sqrt{s}\,G_{A_s}(P_r).$$

Appelons ensuite U l'ouvert

$$U=\Omega\cap(Q+\{(x,t)\in\mathbf{R}^2\,;|x|<10k\sqrt{r}\ \text{ et } |t|<r\})$$

et désignons par φ^* la $\mathcal{C}^*$-mesure harmonique dans U de $\partial U\backslash\partial\Omega$ ($\mathcal{C}^*$ représente l'opérateur adjoint $\mathcal{C}^*=-(\partial/\partial t)-(\partial^2/\partial x^2)$). Si $P_r^*=Q+(10k\sqrt{r},-2r)$, le principe de Harnack faible au bord pour l'opérateur $\mathcal{C}^*$ nous permet alors d'écrire :

$$G_{A_s}(P_r)\gtrsim\frac{\varphi^*(A_s)}{\varphi^*(P^*_{r/4})}G_{P_{r/4}}(P_r)\gtrsim\frac{\varphi^*(A_s)}{\sqrt{r}}.$$

En regroupant les informations précédentes, on obtient donc :

$$\frac{\omega^{M_0}(I(Q,s))}{\omega^{M_0}(I(Q,r))}\gtrsim\sqrt{\frac{s}{r}}\,\varphi^*(A_s).$$

Pour l'instant, nous n'avons pas encore utilisé la décroissance de g. C'est maintenant qu'elle apparait. Si on note ψ^* la $\mathcal{C}^*$-mesure harmonique dans l'ouvert $V=Q+(]0,10k\sqrt{r}[\times]-r,r[)$ de $\partial V\backslash(Q+\{(x,t)\in\mathbf{R}^2;x=0\})$, le principe du maximum pour l'opérateur $\mathcal{C}^*$ nous affirme que :

$$\varphi^*(A_s)\geq\psi^*(A_s).$$

Enfin, la régularité du bord de l'ouvert de définition de ψ^* ainsi que des raisons d'homogénéité, nous assurent que :

$$\psi^*(A_s)\approx\sqrt{\frac{s}{r}}.$$

C'est ce qu'il restait à justifier.

Faisons une remarque finale sur le théorème 3. On peut interpréter $\partial\Omega$ comme le bord d'un ouvert lipschitzien de $\mathbf{R}^2$ si on munit $\mathbf{R}^2$ de la distance parabolique :

$$\delta((x,t),(y,s))=\sup(|x-y|,|t-s|^{1/2}).$$

Dans l'espace métrique $(\mathbf{R}^2,\delta)$ on peut alors introduire une notion de mesure de Hausdorff en posant pour $\alpha>0$:

$$\Lambda_\alpha(E)=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\inf\left\{\sum_i r_i^\alpha\,;E\subset\bigcup_i D(a_i,r_i),\ r_i\leq\varepsilon\right\}\right),$$

où les disques $D(a_i,r_i)$ sont pris au sens de la distance δ. S. J. Taylor et N. A. Watson ([TW]) ont précédemment introduit ces mesures et ont appelé dimension parabolique la notion de dimension qui s'y rattache. Le lien entre la dimension parabolique et la dimension de Hausdorff est donné par la comparaison élémentaire suivante :

$$\exists C>0\,;\forall\alpha>0\,;\forall E\subset \mathbf{R}^2,\quad \frac{1}{C}\Lambda_{\alpha+1}(E)\le H_\alpha(E)\le C\Lambda_\alpha(E).$$

Il est facile de vérifier que si la fonction f vérifie $(*)$, $\partial\Omega$ est de dimension parabolique 2 et la mesure σ_2 est équivalente à la mesure Λ_2 sur $\partial\Omega$. Par contre, dans cette situation, la mesure σ_2 n'est en général pas équivalente à la mesure H_1. La mesure Λ_2 est alors un outil plus fin que la mesure H_1 pour estimer la mesure harmonique.

Signalons enfin que la fonction f décrite par Kaufman et Wu dans le théorème B vérifie la condition $(*)$. L'ensemble polaire E qui est décrit est de longueur strictement positive mais vérifie $\Lambda_2(E)=0$ (et même $\Lambda_\alpha(E)=0$ pour tout $\alpha>1$).

3. Le cas où la fonction f est monotone

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 1 lorsque f est monotone. Pour fixer les idées, nous supposerons f continue et décroissante. Nous allons nous appuyer sur deux lemmes. Le lemme 3.1 traite le cas des points du graphe en lesquels la fonction f a de petites oscillations (ensemble $\mathcal{A}$ décrit dans le lemme 3.1). Ensuite, pour estimer la mesure harmonique sur $\partial\Omega\backslash\mathcal{A}$ on exploite les résultats de la partie 2 par l'intermédiaire d'un lemme de comparaison (lemme 3.2). Ce lemme nous a été suggéré par A. Ancona ([An]).

Lemme 3.1. *Notons :*

$$\mathcal{A}=\left\{(x,f(x))\in\partial\Omega\,;\liminf_{y\to x}\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|^2}<1\right\}.$$

Pour tout point $P_0\in\Omega$, il existe une constante $C=C(P_0)$ strictement positive telle que :

$$(\omega^{P_0})|_{\mathcal{A}}\le C(\sigma_1)|_{\mathcal{A}},$$

où σ_1 désigne l'image de la mesure de Lebesgue par l'application $x\to(x,f(x))$.

Démonstration. Si $(x,f(x))\in\mathcal{A}$, on peut construire une suite d'intervalles $I_n(x)=[a_n,b_n]$ d'intérieurs non vides, de longueur décroissant vers 0 et vérifiant pour tout n :

$$(x=a_n \text{ ou } x=b_n)\quad \text{et } |f(a_n)-f(b_n)|<|a_n-b_n|^2.$$

Notons alors $r_n = b_n - a_n$ et $J_n(x) = \{(y, f(y)) \in \partial\Omega; y \in I_n(x)\}$. Comme f est décroissante, on a l'inclusion :

$$J_n(x) \subset (a_n, f(a_n)) + [0, r_n] \times [-r_n^2, 0] = B_n(x).$$

Fixons un point $P_0 \in \Omega$ et un compact $K \subset \mathcal{A}$. Quitte à extraire des sous suites, on peut supposer que :

$$\forall (x, f(x)) \in K\,; \forall n \in \mathbf{N}, \quad \delta(P_0, B_n(x)) \geq C,$$

où C est une constante ne dépendant que de P_0 et où δ désigne la distance parabolique décrite lors de la partie 2. Notons $\Gamma(x, t)$ la solution fondamentale de l'équation de la chaleur dans le plan. Le principe du maximum nous donne la comparaison suivante (déjà apparue dans [KW1, lemme 8, page 227]) :

$$\forall (x, f(x)) \in K;\ \forall (y, s) \in \Omega;\ \forall n \geq 0, \quad \omega^{(y,s)}(J_n(x)) \leq C r_n \Gamma(y - a_n, s - f(a_n) + 2r_n^2),$$

où C est une constante universelle. Comme la fonction Γ est uniformément majorée sur le complémentaire de tout voisinage de l'origine, on en déduit l'existence d'une constante $C = C(P_0)$ telle que :

$$\forall (x, f(x)) \in K\,;\ \forall n \geq 0, \quad \omega^{P_0}(J_n(x)) \leq C \sigma_1(J_n(x)).$$

La fin de la preuve est alors classique. Fixons un ouvert U contenant K. On peut sélectionner dans la famille $(J_n(x))_{x \in K, n \geq 0}$ une suite "d'intervalles" notée $(H_n)_{n \geq 0}$ telle que :

$$K \subset \bigcup_{n \geq 0} H_n \subset U.$$

En sélectionnant une suite minimale, on peut de plus imposer que tout point soit au plus dans 2 éléments de la suite $(H_n)_{n \geq 0}$ (on utilise ici un cas particulier élémentaire du lemme de Besicovitch). On trouve alors :

$$\omega^{P_0}(K) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \omega^{P_0}(H_n) \leq 2C\sigma_1\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} H_n\right) \leq 2C\sigma_1(U).$$

La régularité des mesures σ_1 et ω^{P_0} permet d'achever la preuve du lemme 3.1.

Lemme 3.2. (lemme de comparaison) *Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues décroissantes sur $\mathbf{R}$. Notons Ω_1 et Ω_2 les ouverts correspondants et ω_1 (resp. ω_2) la mesure harmonique dans Ω_1 (resp. Ω_2). Fixons $P_0 \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ et notons F le fermé $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Soit E un borélien de F. On a :*

$$\omega_1^{P_0}(E) = 0 \iff \omega_2^{P_0}(E) = 0.$$

Démonstration. Par régularité des mesures $\omega_1^{P_0}$ et $\omega_2^{P_0}$, on peut supposer que $E = K$ est compact. Notons $P_0 = (X_0, T_0)$ et supposons que $\omega_1^{P_0}(K) = 0$. Le principe du maximum dans Ω_2 nous affirme que $\omega_2^{P_0}(K) = \omega_2^{P_0}(K \cap \{t \le T_0\})$ et nous autorise à supposer que K est inclus dans le $\frac{1}{2}$ plan $\{t \le T_0\}$. Le raisonnement effectué lors de la remarque 2 qui suit l'énoncé du théorème 3 s'applique encore dans le contexte présent et nous permet donc de dire que :

$$\forall P \in \Omega_1, \quad \omega_1^P(K) = 0.$$

Introduisons alors l'ouvert U défini par :

$$U = \{(x,t) \in \mathbf{R}^2 \,; t > \sup\{f_1(y) \in \mathbf{R} \,; (y, f_1(y)) \in K \text{ et } y \ge x\}\}.$$

L'ouvert U est construit de la façon suivante :

Si $\widetilde{K} = \{x \in \mathbf{R}; (x, f_1(x)) \in K\}$ et si $]a,b[$ est une composante connexe de $\mathbf{R} \setminus \widetilde{K}$, on remplace sur $]a,b[$ la fonction f_1 par $f_1(b)$ (avec la convention $f_1(+\infty) = -\infty$). Ainsi U contient $\Omega_1 \cup \Omega_2$ et K est inclus dans $\partial U \cap \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Notons μ la mesure harmonique dans U. On constate alors l'estimation suivante :

Affirmation 3.3. $\forall P \in U \setminus \Omega_1$, $\mu^P(K) \le \frac{1}{2}$.

Supposons un instant cette affirmation acquise et terminons la démonstration du lemme. La restriction à Ω_1 de la fonction $P \to 2(1 - \mu^P(K))$ est alors clairement une sur-solution au problème de Dirichlet dans Ω_1 avec donnée frontière $\mathbf{1}_{\partial\Omega_1 \setminus K}$. On a donc :

$$\forall P \in \Omega_1, \quad 2(1 - \mu^P(K)) \ge \omega_1^P(\partial\Omega_1 \setminus K).$$

Comme par hypothèse, K ne charge pas la mesure harmonique dans Ω_1, on conclut donc que :

$$\forall P \in U, \quad \mu^P(K) \le \tfrac{1}{2}.$$

Il est bien connu qu'alors, $\mu^{\cdot}(K)$ est identiquement nulle dans U (car $2\mu^{\cdot}(K)$ est une sous-solution au problème de Dirichlet dans U avec donnée frontière $\mathbf{1}_K$).

Finalement, comme $\Omega_2 \subset U$ et $K \subset \partial\Omega_2 \cap \partial U$, le principe du maximum donne :

$$\forall P \in \Omega_2, \quad \omega_2^P(K) = 0.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. Evidemment, on montre de même la réciproque du lemme 3.2.

Il reste à établir l'affirmation 3.3. Par le principe du maximum, il suffit de la démontrer en tout point $P\in\partial\Omega_1\backslash K$. Fixons un tel point $P=(x_0,f_1(x_0))$ et notons $]a,b[$ la composante connexe de x_0 dans $\mathbf{R}\backslash\widetilde{K}$. On peut supposer $b\neq+\infty$ (si non, comme f_1 est décroissante, $\mu^P(K)=0$). Pour simplifier les notations, on peut aussi supposer $b=0$ et $f_1(b)=0$. Notons pour $t>0$ et $x\in\mathbf{R}$:

$$u(x,t)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-(x-y)^2/4t}\,dy.$$

La fonction u est solution de l'équation de la chaleur dans le demi plan $\{t>0\}$, vérifie $u(x,0)=1$ si $x>0$ et $u(x,0)=0$ si $x<0$. En appliquant le principe du maximum dans l'ouvert

$$V=U\cap\{(x,t)\in\mathbf{R}^2\,;0<t<f_1(a)\},$$

on obtient :

$$\forall(x,t)\in V,\quad \mu^{(x,t)}(K)\leq u(x,t).$$

Comme $x_0<0$ on déduit en particulier que :

$$\mu^{(x_0,f_1(x_0))}(K)\leq\tfrac{1}{2}.$$

Remarquons que la symétrie de la fonction Γ joue un grand rôle dans la démonstration de ce principe de comparaison.

Le lemme 3.2 étant acquis, nous pouvons terminer la preuve du théorème 1 lorsque f est décroissante. Soit E un sous-ensemble de $\partial\Omega$ de longueur nulle. L'ensemble E étant inclus dans un borélien de longueur nulle, on peut supposer que E est borélien. Ensuite, la régularité de la mesure harmonique nous permet de n'avoir à traiter que le cas où $E=K$ est compact. Notons alors $\widetilde{K}$ la projection sur l'axe des x du compact K et introduisons pour $n\in\mathbf{N}^*$:

$$\widetilde{K}_n=\{x\in\widetilde{K}\,;\forall y\in[x-1/n,x+1/n],\ |f(y)-f(x)|\geq\tfrac{1}{2}|y-x|^2\}.$$

L'ensemble $\widetilde{K}_n$ est encore compact. De plus, f étant monotone, il est facile de constater que :

$$\exists k_n>0\,;\forall(x,x')\in\widetilde{K}_n^2,\quad |f(x)-f(x')|\geq\frac{1}{k_n^2}|x-x'|^2.$$

On peut alors construire une nouvelle fonction coïncidant avec f sur $\widetilde{K}_n$ et vérifiant la propriété $(*)$ de la partie 2. Il suffit pour cela de prolonger $f|_{\widetilde{K}_n}$ de façon affine sur les composantes connexes bornées de $\mathbf{R}\backslash\widetilde{K}_n$ et par des branches de paraboles sur les deux composantes connexes non bornées de $\mathbf{R}\backslash\widetilde{K}_n$. Grâce au lemme de comparaison 3.2 et au corollaire 4, on obtient alors :

$$\forall n\geq 1,\quad \forall P\in\Omega,\quad \omega^P(K_n)=0,$$

où K_n est la partie du graphe correspondant au compact $\widetilde{K}_n$.

Enfin, on remarque que $K\backslash\bigcup_{n\geq 1}K_n$ est inclus dans l'ensemble $\mathcal{A}$ décrit lors du lemme 3.1. Comme il est de longueur nulle, on obtient $\sigma_1\big(K\backslash\bigcup_{n\geq 1}K_n\big)=0$ puis, à l'aide du lemme 3.1 :

$$\forall P_0\in\Omega,\quad \omega^{P_0}\Big(K\backslash\bigcup_{n\geq 1}K_n\Big)=0.$$

4. Fin de la preuve du théorème 1

Dans toute cette partie, on fixe une fonction f continue sur $\mathbf{R}$ et on reprend les notations du théorème 1. La démonstration du théorème 1 s'articule alors autour du lemme suivant :

Lemme 4.1. *Soit K un compact de $\partial\Omega$ tel que $H_1(K)=0$. On note :*

$$\widetilde{K}=\{x\in\mathbf{R}\,;(x,f(x))\in K\}$$

et on suppose que la restriction de f à $\widetilde{K}$ est monotone. On a alors :

$$\forall P\in\Omega,\quad \omega^P(K)=0.$$

Démonstration. On peut supposer que $f|_{\widetilde{K}}$ est décroissante. Posons :

$$f_1(x)=\inf(f(x),\inf(f(y),y\leq x,y\in\widetilde{K})).$$

Comme la restriction de f à $\widetilde{K}$ est décroissante, la fonction f_1 s'obtient en posant $f_1(x)=\inf(f(x),f(a))$ sur chaque composante connexe $]a,b[$ de $\mathbf{R}\backslash\widetilde{K}$. Il est élémentaire de constater que f_1 est encore continue. De plus, si $\Omega_1=\{(x,t)\in\mathbf{R}^2;\ t>f(x)\}$, Ω_1 contient Ω et $K\subset\partial\Omega\cap\partial\Omega_1$. Par le principe du maximum, il suffit donc de démontrer que $\omega_1^P(K)=0$ pour tout point $P\in\Omega_1$ (ω_1 désigne, comme les notations le suggèrent la mesure harmonique dans Ω_1). Notons ensuite :

$$f_2(x)=\sup_{y\geq x}(f_1(y)).$$

Par définition, f_2 est la plus petite fonction décroissante supérieure à f_1. On sait que f_2 est encore continue. Les propriétés de f_1 assurent qu'en tout point $x \in \widetilde{K}$, on a $f_1(x) = f_2(x)$. Signalons que Nishio ([Ni]) a aussi exploité la transformation faisant passer de f_1 à f_2 pour résoudre d'autres types de problèmes liés à l'équation de la chaleur. Après cette transformation, l'ouvert Ω_2 correspondant est inclus dans Ω_1 mais on constate cependant que :

$$\forall P \in \Omega_2, \quad \omega_2^P(K) = \omega_1^P(K).$$

En effet, fixons tout d'abord $(x, f_2(x)) \in \partial\Omega_2 \cap \Omega_1$ et notons I la composante connexe de x dans $\mathbf{R} \backslash \{y \in \mathbf{R}; f_2(y) = f_2(x)\}$. Par définition, I ne rencontre pas $\widetilde{K}$. Le principe du maximum assure donc que $\omega_1^{(y,s)}(K) = 0$ en tout point $(y, s) \in \Omega_1$ vérifiant $y \in I$ et $s < f_2(x)$. Il s'en suit que $\omega_1^{(x, f_2(x))}(K) = 0$. En jouant sur l'arbitraire en x et en appliquant à nouveau le principe du maximum, mais cette fois-ci dans Ω_2, on obtient alors l'inégalité $\omega_1^P(K) \le \omega_2^P(K)$ en tout point $P \in \Omega_2$. Il s'agit de l'inégalité non triviale entre ces deux fonctions.

Finalement, on peut dire que $\omega_1(K)$ s'obtient en prolongeant $\omega_2(K)$ par zéro en tout point de $\Omega_1 \backslash \Omega_2$.

Sous l'hypothèse $H_1(K) = 0$, le travail effectué dans le cas des fonctions monotones nous assure que $\omega_2^P(K) = 0$ en tout point $P \in \Omega_2$. Il s'en suit que $\omega_1^P(K) = 0$ en tout point $P \in \Omega_1$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du théorème 1. Soit $E \subset \partial\Omega$ un ensemble de longueur nulle. Un argument similaire à celui évoqué lors de la partie 3 permet de supposer que $E = K$ est un compact de $\partial\Omega$.

Notons comme lors du lemme 4.1 $\widetilde{K} = \{x \in \mathbf{R}; (x, f(x)) \in K\}$ et pour $n \in \mathbf{N}^*$, introduisons les ensembles suivants :

$$\widetilde{K}_n^+ = \{x \in \widetilde{K}\,; \forall y \in [x - 1/n, x],\ f(y) \le f(x)\} \quad \text{et}$$
$$\widetilde{K}_n^- = \{x \in \widetilde{K}\,; \forall y \in [x, x + 1/n],\ f(y) \le f(x)\}.$$

Il est facile de constater que les ensembles $\widetilde{K}_n^+$ et $\widetilde{K}_n^-$ sont encore compacts. Notons K_n^+ et K_n^- les projections sur le graphe des ensembles $\widetilde{K}_n^+$ et $\widetilde{K}_n^-$ et montrons tout d'abord que ces ensembles ne chargent pas la mesure harmonique. Traitons par exemple le cas des ensembles K_n^+. Si $x \in \widetilde{K}_n^+$, on constate que la restriction de f à $\widetilde{K}_n^+ \cap [x - 1/2n, x + 1/2n]$ est croissante. Un argument de compacité permet alors d'écrire $\widetilde{K}_n^+$ comme réunion finie de compacts sur lesquels f est croissante. Le lemme 4.1 nous assure alors que :

$$\forall P \in \Omega, \quad \omega^P(K_n^+) = 0.$$

Finalement, après avoir traité de la même manière les ensembles K_n^-, on conclut que :

$$\forall P\in\Omega,\quad \omega^P\Bigl(\bigcup_{n\geq 1} K_n^+\cup K_n^-\Bigr)=0.$$

Enfin, on constate que :

$$\widetilde{K}\setminus\bigcup_{n\geq 1}\widetilde{K}_n^+\cup\widetilde{K}_n^- =\{x\in\widetilde{K}\,;\exists x_l^+\searrow x\,;f(x_l^+)>f(x)\text{ et }\exists x_l^-\nearrow x\,;f(x_l^-)>f(x)\}.$$

Ainsi, si $x\in\widetilde{K}\setminus\bigcup_{n\geq 1}\widetilde{K}_n^+\cup\widetilde{K}_n^-$, on peut construire une suite d'intervalles fermés $\tilde{I}_l(x)=[a_l(x),b_l(x)]$, $l\geq 1$ décroissant vers $\{x\}$, d'intérieurs non vides et vérifiant :

$$\forall l\geq 1,\ f(a_l(x))=f(b_l(x))\quad\text{et}\quad\forall y\in\tilde{I}_l(x),\ f(y)\leq f(a_l(x)).$$

Notons alors $I_l(x)$ la projection sur le graphe $\partial\Omega$ de l'intervalle $\tilde{I}_l(x)$. Le principe du maximum assure alors :

$$\forall y\in\tilde{I}_l(x)\,;\ \forall t\in[f(y),f(a_l(x))],\quad \omega^{(y,t)}(I_l(x))=1.$$

Fixons un point $P_0=(X_0,T_0)\in\Omega$ et appelons $\varepsilon=\delta(P_0,\partial\Omega)$ où δ désigne la distance parabolique. On peut, dans la construction de la famille des intervalles $\tilde{I}_k(x)$ supposer qu'ils sont tous de longueur inférieure à ε. Il est alors facile de se convaincre qu'on a :

$$\forall l\geq 1\,;\ \forall x\in\widetilde{K}\setminus\bigcup_{n\geq 1}\widetilde{K}_n^+\cup\widetilde{K}_n^-,\quad T_0\geq f(a_l(x))+\varepsilon^2.$$

On peut ainsi effectuer comme lors du lemme 3.1 une comparaison avec la fonction Γ et trouver une constante $C=C(\varepsilon)$ strictement positive telle que :

$$\forall l\geq 1\,;\ \forall x\in\widetilde{K}\setminus\bigcup_{n\geq 1}\widetilde{K}_n^+\cup\widetilde{K}_n^-,\quad \omega^{P_0}(I_l(x))\leq C\sigma_1(I_l(x)).$$

Par hypothèse, $K\setminus\bigcup_{n\geq 1}K_n^+\cup K_n^-$ est de longueur nulle. A fortiori, il est négligeable pour la mesure σ_1. Par un raisonnement similaire à celui du lemme 3.1, on conclut donc qu'il est aussi négligeable pour la mesure ω^{P_0}. La preuve du théorème 1 est ainsi complète.

5. Etude d'un exemple

Lorsque f est au moins de classe C^1, les évaluations de la mesure harmonique dans $\Omega=\{t>f(x)\}$ sont surtout délicates sur le fermé $F=\{(x,t)\in\partial\Omega;f'(x)=0\}$. Des travaux de Kaufman–Wu et de Taylor–Watson on peut dégager la remarque suivante :

Proposition 5.1. *Soient f une fonction de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ et E un borélien inclus dans $F=\{(x,t)\in\partial\Omega; f'(x)=0\}$. Notons σ la mesure de longueur sur $\partial\Omega$. On a les équivalences suivantes :*

$$\begin{aligned} E \textit{ est polaire} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall P\in\Omega, \quad \omega^P(E)=0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \sigma(E)=0. \end{aligned}$$

Dans cette situation, les raisons qui assurent sur F l'équivalence entre mesure harmonique et mesure de longueur sont finalement très grossières. Comme le montre le résultat qui suit, ce phénomène n'existe plus en général lorsqu'on diminue la régularité de f.

Exemple 5.2. Pour tout $\alpha\in]1,2[$, on peut trouver une fonction f de classe C^α et un borélien $E\subset F=\{(x,t)\in\partial\Omega; f'(x)=0\}$ vérifiant :

$$E \text{ est non polaire et } \forall P\in\Omega, \quad \omega^P(E)=0.$$

Démonstration de la proposition 5.1. L'implication 2 $\Rightarrow$ 3 est démontrée par Kaufman–Wu dans [KW3]. Pour démontrer 3 $\Rightarrow$ 1 on s'appuie sur un résultat de Taylor–Watson [TW]) : il suffit de démontrer que $\Lambda_1(E)=0$. De plus, E étant analytique, le théorème de capacitabilité nous permet de supposer E compact (voir [Ca]). Notant $\widetilde{E}$ la projection sur l'axe des x du compact E, on peut alors trouver une constante C strictement positive telle que :

$$\forall (x,x')\in\widetilde{E}\times\widetilde{E}, \quad |f(x)-f(x')|\leq C|x-x'|^2.$$

L'application $x\in(\widetilde{E},|\cdot|)\to(x,f(x))\in(E,\delta)$ est donc bi-lipschitzienne. Comme, par hypothèse, $\widetilde{E}$ est de longueur nulle, on obtient bien que $\Lambda_1(E)=0$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Construction de l'exemple 5.2. Pour tout réel $r\in]0,\frac{1}{2}[$ introduisons l'ensemble de Cantor :

$$K_r=\left\{x\in\mathbf{R}\,; x=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon_k r^k \text{ où } \forall k,\ \varepsilon_k\in\{0,1\}\right\}.$$

On fixe deux réels $a,b<\frac{1}{2}$ et on considère l'application :

$$f\colon x=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon_k a^k\in K_a\to f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon_k b^k\in K_b.$$

Il existe une constante $C>0$ telle que :

$$\forall (x,x')\in K_a^2,\quad \frac{1}{C}|x-x'|^\alpha \le |f(x)-f(x')| \le C|x-x'|^\alpha, \tag{1}$$

où $\alpha=\log b/\log a$.

Supposons $1<\alpha<2$. La fonction f est alors de classe C^α sur K_a au sens de Whitney. Elle peut donc se prolonger en une fonction de classe C^α sur $\mathbf{R}$ (voir [St, page 170]). Notons alors :

$$E=\{(x,t)\in \mathbf{R}^2\,;x\in K_a \text{ et } t=f(x)\}.$$

Le compact K_a étant sans point isolé, l'estimation (1) assure que $E\subset F$. De plus, l'ensemble E est de longueur nulle (il est même de dimension $-(\log 2/\log a)<1$). Grâce au théorème 1, il est donc de mesure harmonique nulle dans l'ouvert correspondant à la fonction f.

Par contre, pour certains choix des paramètres, il va être non polaire. Pour s'en rendre compte, il suffit d'évaluer la dimension parabolique de E (voir les travaux de Taylor et Watson ([TW]) ainsi que la partie 2 de ce travail pour les définitions).

Comme $\alpha<2$, l'estimation (1) nous permet de dire :

$$\begin{aligned}&\forall (x,t)\in E\,;\ \forall (x',t')\in E,\\ &\qquad \delta((x,t),(x',t'))=\sup(|x-x'|,|f(x)-f(x')|^{1/2})\approx |x-x'|^{\alpha/2}.\end{aligned}$$

La dimension parabolique de E est donc égale à $(2/\alpha)\dim(K_a)$, soit encore $-\log 4/\log b$. Grâce aux travaux de Taylor et Watson ([TW]), il suffit donc de choisir $b>\frac{1}{4}$ pour que E ne soit pas polaire. Les contraintes successives sont compatibles entre elles. Plus précisément, pour chaque $\alpha\in]1,2[$ on peut choisir a et b vérifiant :

$$a^2<\frac{1}{4}<b<a<\frac{1}{2},\quad \alpha=\frac{\log b}{\log a}$$

et fournissant un exemple répondant à la question.

6. Description géomètrique de la mesure harmonique lorsque f est monotone

Lorsque f est monotone, on peut obtenir des estimations exactes de la mesure harmonique. Selon les zones du graphe, la mesure harmonique est, soit équivalente à la mesure H_1, soit équivalente à la mesure Λ_2. C'est ce qu'on décrit dans l'énoncé qui suit. Pour fixer les idées, on suppose la fonction f décroissante. On pourrait évidemment écrire un énoncé similaire lorsque f est croissante.

Théorème 5. *Soit f une fonction continue décroissante sur* $\mathbf{R}$. *Pour* $P_0=(X_0,T_0)\in\Omega$, *notons* $\Delta_{T_0}=\partial\Omega\cap\{t\leq T_0\}$ *le support de* ω^{P_0}. *Appelons :*

$$\begin{cases} \mathcal{A}^+=\left\{(x,f(x))\in\partial\Omega\,;\liminf\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(x+h)}{h^2}>0\right\} \\ \mathcal{A}^-=\left\{(x,f(x))\in\partial\Omega\,;\limsup\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(x+h)}{h^2}<+\infty\right\} \end{cases}.$$

Fixons enfin un borélien E inclus dans Δ_{T_0}. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) *L'ensemble*

$$\mathcal{P}=\left\{(x,f(x))\in\partial\Omega\,;\liminf_{h\to 0^+}\frac{f(x)-f(x+h)}{h^2}<\limsup_{h\to 0^+}\frac{f(x)-f(x+h)}{h^2}\right\}$$

est polaire. En particulier, la mesure ω^{P_0} est portée par $\Delta_{T_0}\cap(\mathcal{A}^+\cup\mathcal{A}^-)$.

(ii) *Si $E\subset\mathcal{A}^+$, alors :*

$$\omega^{P_0}(E)=0 \iff \Lambda_2(E)=0.$$

(iii) *Si $E\subset\mathcal{A}^-$, alors :*

$$\omega^{P_0}(E)=0 \iff H_1(E)=0 \iff \Lambda_1(E)=0.$$

(iv) *Enfin, sans restrictions sur E on a :*

$$H_1(E)=0 \implies \omega^{P_0}(E)=0 \implies \Lambda_2(E)=0.$$

Remarque. Il résulte du théorème 5 que l'ensemble $\mathcal{A}^+\cap\mathcal{A}^-$ est polaire car il vérifie $\Lambda_1(\mathcal{A}^+\cap\mathcal{A}^-)=0$. En effet, supposons que $\Lambda_1(\mathcal{A}^+\cap\mathcal{A}^-)$ soit strictement positif. L'ensemble étant analytique, on peut alors trouver un compact $K\subset\mathcal{A}^+\cap\mathcal{A}^-$ vérifiant $0<\Lambda_1(K)<+\infty$ (voir [Ca, théorème 3, page 11]). Fixons alors un point $P_0=(X_0,T_0)\in\Omega$ tel que $K\subset\Delta_{T_0}$. Le point (iii) du théorème nous assure que $\omega^{P_0}(K)>0$. Donc, grâce au point (ii), on trouve que $\Lambda_2(K)>0$, ce qui est absurde.

Cette remarque combinée au point (i) du théorème nous permet alors d'écrire que la mesure ω^{P_0} est portée par l'ensemble :

$$\Delta_{T_0}\cap\left\{(x,f(x))\in\partial\Omega\,;\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x)-f(x+h)}{h^2}=0 \text{ ou } +\infty\right\}.$$

Démonstration du théorème 5. Commençons par le point (i). Fixons $N\in\mathbf{N}^*$ et notons :

$$p(x,t)=\int_{-N}^{N}\Gamma(x-u,t-f(u))\,du,$$

où $\Gamma(y,s)=(1/\sqrt{4\pi s}\,)e^{-y^2/4s}\mathbf{1}_{\{s>0\}}(y,s)$ désigne la solution fondamentale de l'équation de la chaleur sur $\mathbf{R}^2$. La fonction p est un potentiel sur $\mathbf{R}^2$. On va montrer qu'elle vaut $+\infty$ en tout point de $\mathcal{P}\cap\{(x,t)\in\mathbf{R}^2;|x|<N\}$. Comme N est arbitraire, le point (i) en résultera.

Fixons $x_0\in]-N,N[$ et supposons que $(x_0,f(x_0))\in\mathcal{P}$. On a :

$$p(x_0,f(x_0))=\int_0^{N-x_0}\Gamma(-h,f(x_0)-f(x_0+h))\,dh.$$

Pour simplifier l'écriture notons :

$$\chi(h)=\frac{f(x_0)-f(x_0+h)}{h^2}.$$

Fixons enfin deux réel a et b strictement positifs tels que :

$$\liminf_{h\to0^+}\chi(h)<a<b<\limsup_{h\to0^+}\chi(h).$$

A l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, on peut construire deux suites α_n et β_n décroissant vers 0 et vérifiant :

$$\forall n\geq0,\quad\begin{cases}\alpha_{n+1}<\beta_n<\alpha_n<N-x_0,\\ \forall h\in[\beta_n,\alpha_n],\ \ a=\chi(\alpha_n)\leq\chi(h)\leq\chi(\beta_n)=b.\end{cases}$$

Par construction, si $h\in[\beta_n,\alpha_n]$, on a :

$$\Gamma(-h,f(x_0)-f(x_0+h))\approx\frac{1}{h}.$$

Enfin, comme f est décroissante, on a :

$$b\beta_n^2=f(x_0)-f(x_0+\beta_n)\leq f(x_0)-f(x_0+\alpha_n)=a\alpha_n^2.$$

Ainsi, il existe un nombre $\varepsilon\in]0,1[$ tel que :

$$\forall n\geq0,\quad \beta_n\leq(1-\varepsilon)\alpha_n.$$

Finalement, comme les intervalles $[\beta_n,\alpha_n]$ sont deux à deux disjoints, on a :

$$p(x_0,f(x_0))\geq\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{\beta_n}^{\alpha_n}\Gamma(-h,f(x_0)-f(x_0+h))\,dh\gtrsim\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{(1-\varepsilon)\alpha_n}^{\alpha_n}\frac{1}{h}\,dh=+\infty.$$

C'est ce qu'on voulait démontrer.

Pour démontrer les trois autres parties du théorème, on peut supposer que $E=K$ est un compact de $\partial\Omega$ inclus dans Δ_{T_0} (on utilise pour faire cette réduction la régularité de ω^{P_0} et le théorème 3, page 11 de [Ca]). Pour tout sous-ensemble A de $\partial\Omega$, on notera comme précédemment $\tilde{A}$ sa projection sur l'axe des x.

Plaçons nous tout d'abord sous les hypothèses du (ii). En introduisant les compacts

$$\widetilde{K}_{n,p}=\left\{x\in\widetilde{K}\,;\forall y\in[x,x+1/n],\ |f(y)-f(x)|\geq\frac{1}{p^2}|y-x|^2\right\},$$

on se ramène comme lors de la partie 3 à ne traiter que le cas des compacts K vérifiant de plus :

$$\exists c>0\,;\forall(x,x')\in\widetilde{K}^2,\quad |f(x)-f(x')|\geq\frac{1}{c^2}|x-x'|^2.$$

Comme lors de la partie 3, $f|_{\widetilde{K}}$ coïncide avec la restriction à $\widetilde{K}$ d'une fonction h vérifiant la propriété $(*)$ de la partie 2. Le lemme 3.2 et le théorème 3 nous assurent alors que :

$$\omega^{P_0}(K)=0 \iff \sigma_2(K)=0.$$

Enfin, la fonction h vérifiant la propriété $(*)$, on peut trouver une constante $k>0$ telle que pour tout couple $(t,s)\in\mathbf{R}^2$ on ait :

$$\frac{1}{k}\delta((h^{-1}(t),t),(h^{-1}(s),s))\leq|t-s|^{1/2}\leq k\delta((h^{-1}(t),t),(h^{-1}(s),s)).$$

Il est alors clair que :

$$\sigma_2(K)=0 \iff \Lambda_2(K)=0.$$

C'est ce qu'il restait à prouver.

La démarche utilisée pour établir la partie (iii) est similaire. En introduisant les compacts

$$\widetilde{K}_{n,p}=\{x\in\widetilde{K}\,;\forall y\in[x,x+1/n],\ |f(y)-f(x)|\leq p|y-x|^2\},$$

on se ramène à ne traiter que le cas des compacts K vérifiant de plus :

$$\exists c>0\,;\forall(x,x')\in\widetilde{K}^2,\quad |f(x)-f(x')|\leq c|x-x'|^2.$$

On peut alors prolonger $f|_{\widetilde{K}}$ en une fonction h décroissante et de classe $C^{1,1}$ sur $\mathbf{R}$. Pour cela, on fixe une fonction $\psi\colon[0,1]\to[0,1]$ de classe C^2, croissante et vérifiant $\psi(0)=0$, $\psi(1)=1$, $\psi'(0)=0$ et $\psi'(1)=0$. Pour obtenir la fonction h, il suffit alors de poser sur chaque composante connexe bornée $]a,b[$ de $\mathbf{R}\backslash\widetilde{K}$:

$$h(x)=f(a)+(f(b)-f(a))\psi\Big(\frac{x-a}{b-a}\Big)$$

et de décider que h est constante sur chacune des composantes non bornées de $\mathbf{R}\backslash\widetilde{K}$ (une telle construction se trouve dans [KW1]). Le lemme 3.2 et les travaux de Kaufman–Wu (voir théorème A) nous assurent alors que :

$$\omega^{P_0}(K)=0 \iff \sigma_1(K)=0.$$

Enfin, on remarque que l'application $x\in\widetilde{K}\to(x,f(x))\in\mathbf{R}^2$ est bi-lipschitzienne lorsque $\mathbf{R}^2$ est muni de sa métrique euclidienne mais aussi lorsque $\mathbf{R}^2$ est muni de la distance δ. On a alors :

$$\sigma_1(K)=0 \iff H_1(K)=0 \iff \Lambda_1(K)=0.$$

Pour terminer la preuve du point (iv) du théorème, il suffit de constater que l'ensemble $\partial\Omega\backslash\mathcal{A}^+$ est négligeable pour la mesure Λ_2 ; en imitant un raisonnement déjà effectué au cours du lemme 3.1, on montre même que tout borélien borné B de $\partial\Omega\backslash\mathcal{A}^+$ vérifie $\Lambda_1(B)<+\infty$.

Bibliographie

[An] ANCONA, A., Communication personnelle, 1994.

[Ca] CARLESON, L., *Selected Problems on Exceptional Sets*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1967.

[FGS] FABES, E. B., GAROFALO, N. and SALSA, S., A backward Harnack inequality and Fatou theorem for nonnegative solutions of parabolic equations, *Illinois J. Math.* **30** (1986), 536–565.

[Fa] FALCONER, K., *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, J. Wiley & Sons Ltd., New York, 1990.

[He1] HEURTEAUX, Y., Inégalités de Harnack à la frontière pour des opérateurs paraboliques, *Thèse*, Paris 11, 1989.

[He2] HEURTEAUX, Y., Solutions positives et mesure harmonique pour des opérateurs paraboliques dans des ouverts "lipschitziens", *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*) **41** (1991), 601–649.

[KW1] KAUFMAN, R. and WU, J. M., Parabolic potential theory, *J. Differential Equations* **43** (1982), 204–234.

[KW2] KAUFMAN, R. and WU, J. M., Parabolic measure on domains of class Lip 1/2, *Compositio Math.* **65** (1988), 201–207.

[KW3] KAUFMAN, R. and WU, J. M., Dirichlet problem of heat equation for C^2 domains, *J. Differential Equations* **80** (1989), 14–31.

[Ke] KEMPER, J. T., Temperatures in several variables: kernel functions, representations and parabolic boundary values, *Trans. Amer. Math. Soc.* **167** (1972), 243–262.

[LM1] LEWIS, J. L. and MURRAY, M. A. M., Regularity properties of commutators and layer potentials associated to the heat equation, *Trans. Amer. Math. Soc.* **328** (1991), 815–842.

[LM2] LEWIS, J. L. and MURRAY, M. A. M., Absolute continuity of parabolic measures, in *Partial Differential Equations with Minimal Smoothness and Applications* (Dahlberg, B., Fabes, E., Fefferman, R., Jerison, D. and Kenig, C., eds.) IMA Vol. Math. Appl. **42**, pp. 173–188, Springer-Verlag, New York, 1992.

[LM3] LEWIS, J. L. and MURRAY, M. A. M., The method of layer potentials for the heat equation in time-varying domains, *Mem. Amer. Math. Soc.* **545** (1995).

[LS] LEWIS, J. L. and SILVER, J., Parabolic measure and the Dirichlet problem for the heat equation in two dimensions, *Indiana Univ. Math. J.* **37** (1988), 801–839.

[Ni] NISHIO, M., Uniqueness of positive solutions of the heat equation, *Osaka J. Math.* **29** (1992), 531–538.

[St] STEIN, E. M., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970.

[TW] TAYLOR, S. J. and WATSON, N. A., A Hausdorff measure classification of polar sets for the heat equation, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **97** (1985), 325–344.

[To] TORCHINSKY, A., *Real-variable Methods in Harmonic Analysis*, Academic Press, Orlando, Fla., 1986.

[Wu1] WU, J. M., On parabolic measures and subparabolic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **251** (1979), 171–186.

[Wu2] WU, J. M., On heat capacity and parabolic measure, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **102** (1987), 163–172.

Reçu le 8 août 1994

Yanick Heurteaux
CNRS URA D0757
Université de Paris-Sud
Mathématiques
Bâtiment 425
F-91405 Orsay Cedex
France
email: heurteau@anh.matups.fr