Ark. Mat., **38** (2000), 209–221

Densité de l'intégrale d'aire et intégrales singulières

Lucien Chevalier et Alain Dufresnoy

Abstract. In his 1983 paper [3], R. F. Gundy introduced a new functional related to the Littlewood–Paley theory, called the *density of the area integral*. In this paper, we prove that this functional (although highly non-linear) can be expressed as the principal value of an explicit singular integral. This result provides us with a new and precise connection between the density of the area integral and the theory of Calderón–Zygmund operators. It does not seem to be a consequence of the standard Calderón–Zygmund–Cotlar theory, because the *sign* of a harmonic function in the half-space fails to have, in some appropriate sense, boundary limits.

1. Introduction et énoncé des résultats principaux

Dans un récent travail [1], l'un de nous a obtenu l'analogue, dans le contexte de l'analyse harmonique dans un demi-espace, de la formule de Tanaka de la théorie des martingales. Plus précisément, le résultat établi dans [1] est une égalité de la forme

$$|f| = \tilde{f} + D^0_*(f), \tag{1}$$

où $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est une application admettant une intégrale de Poisson $P(f)$, $D^0_*(f)$ est une version adéquate de la «densité de l'intégrale d'aire» associée à la fonction harmonique $P(f)$, et $\tilde{f}$ est une nouvelle application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ qui a conservé, d'un certain point de vue, les propriétés de f. En particulier on peut dire, pour parler brièvement, que l'application $f \mapsto \tilde{f}$ préserve les espaces fonctionnels usuels de l'analyse harmonique dans $\mathbf{R}^n$ (voir le théorème 1 de [1] pour une formulation plus précise).

Cette application n'est pas linéaire, ni même sous-linéaire. C'est pourquoi, pour pouvoir utiliser la théorie des intégrales singulières, nous avons du introduire dans [1] une famille (T_b) d'opérateurs de Calderón–Zygmund dans $\mathbf{R}^n$, indexée par l'ensemble des applications boréliennes bornées $b: \mathbf{R}^{n+1}_+ \to \mathbf{R}$ (la définition précise de ces opérateurs est rappelée plus loin). Cette famille (T_b) dépend linéairement de b, et on obtient la fonction $\tilde{f}$ en faisant agir sur la fonction f l'opérateur de la famille précédente obtenu en prenant pour b *le signe de l'extension harmonique de* f. On a donc l'égalité

$$\tilde{f} = T_{\operatorname{sgn} P(f)}(f). \tag{2}$$

La théorie générale des intégrales singulières suggère de poursuivre cette étude ; en effet, il est bien connu qu'un opérateur de Calderón–Zygmund se décompose toujours en somme de deux opérateurs : L'un est défini par la valeur principale (en un sens approprié) de l'intégrale singulière associée à son noyau, et l'autre est un opérateur de multiplication par une fonction bornée. Il est donc naturel de chercher à obtenir la décomposition, au sens précédent, de l'opérateur $T_{\mathrm{sgn}\, P(f)}$ (et plus généralement des opérateurs T_b). Cette décomposition permettra d'une part de satisfaire une curiosité légitime, et d'autre part conduira nécessairement à une expression nouvelle de la densité de l'intégrale d'aire. Comme on pouvait l'espérer, cette expression a plusieurs applications intéressantes (voir les remarques qui suivent l'énoncé de notre théorème). Pour plusieurs raisons qui apparaîtront en cours de route, le cadre de cet article se limite au cas où $n=1$.

Notre premier objectif a donc été la décomposition explicite donnée par notre résultat principal. La méthode suivie a été, dans la mesure du possible, la théorie de Calderón–Zygmund–Cotlar (telle qu'elle est exposée, par exemple, dans [4, pp. 240–249]). Comme nous le verrons au paragraphe 2, l'application de cette théorie conduit très naturellement, dans notre cas, à un nouveau problème : ce problème est, *grosso modo*, celui de savoir si le signe d'une fonction harmonique dans le demi-plan admet, en un sens approprié, une limite au bord. Cette question nous paraît présenter un intérêt intrinsèque, indépendamment de toute référence à la densité de l'intégrale d'aire. D'autre part, son étude met en jeu des idées et des méthodes assez différentes de celles utilisées dans le présent article. Pour ces raisons, nous l'abordons dans notre travail séparé [2]. Comme nous le verrons plus loin, un des résultats obtenus dans [2] prouve que la décomposition donnée par notre résultat principal ne peut pas être obtenue comme simple conséquence de la théorie de Calderón–Zygmund–Cotlar (ce qui explique la voie suivie dans le paragraphe 2).

Avant d'énoncer de façon précise nos résultats, il est nécessaire d'introduire quelques notations (qui sont celles de [1]).

On désigne par $\mathbf{R}^2_+$ le demi-espace $\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+$. Le point courant de $\mathbf{R}^2_+$ est systématiquement noté $z=(x,y)$. Pour tout point $\xi\in\mathbf{R}$, on note p_ξ le noyau de Poisson relatif au point ξ, défini dans $\mathbf{R}^2_+$ par

$$p_\xi(z)=\frac{1}{\pi}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}.$$

On désigne par $\mathcal{M}$ l'ensemble des applications mesurables $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ telles que

$$\|f\|_{\mathcal{M}}=\int_{\mathbf{R}} p_\xi(0,1)|f(\xi)|\,d\xi<+\infty.$$

A toute fonction $f\in\mathcal{M}$, *on peut associer son intégrale de* Poisson $P(f)$, *définie dans* $\mathbf{R}_+^2$ par

$$P(f)(z)=\int_{\mathbf{R}} p_\xi(z)f(\xi)\,d\xi.$$

En outre, la fonction $|P(f)|$ est sous-harmonique, donc son laplacien au sens des distributions est une mesure positive. On peut donc définir, pour tout $\xi\in\mathbf{R}$,

$$D_*^0(f)(\xi)=\int_{\mathbf{R}_+^2} yp_\xi(z)\Delta|P(f)|\,(dz).$$

Des fonctionnelles de ce type ont été introduites, dans un autre but et sous une forme un peu différente, par R. F. Gundy [3] au début des années 80.

Les espaces $L^p(\mathbf{R})$ considérés sont relatifs à la mesure de Lebesgue m dans $\mathbf{R}$, et la norme usuelle dans $L^p(\mathbf{R})$ est notée $\|\cdot\|_p$.

Nous rappelons maintenant la définition des opérateurs T_b auxquels nous avons fait allusion plus haut.

Soit b une application borélienne bornée de $\mathbf{R}_+^2$ dans $\mathbf{R}$. Si on pose, pour toute fonction $f\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ et tout $\xi\in\mathbf{R}$,

$$T_b(f)(\xi)=2\int_{\mathbf{R}_+^2} yb(z)\nabla p_\xi(z)\nabla P(f)(z)\,dz, \tag{3}$$

on définit un opérateur de Calderón–Zygmund T_b, associé au noyau K_b défini par

$$K_b(\xi,\xi')=2\int_{\mathbf{R}_+^2} yb(z)\nabla p_\xi(z)\nabla p_{\xi'}(z)\,dz \tag{4}$$

pour $\xi\neq\xi'$ ([1, proposition 3]). Le résultat principal de cet article est le

Théorème. *Pour toute fonction* $f\in L^2(\mathbf{R})$,

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon<|\xi-\xi'|} K_{\operatorname{sgn} P(f)}(\xi,\xi')f(\xi')\,d\xi'$$

existe pour presque tout $\xi\in\mathbf{R}$ *et on a les égalités*

$$\tilde f(\xi)=|f(\xi)|+\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon<|\xi-\xi'|} K_{\operatorname{sgn} P(f)}(\xi,\xi')f(\xi')\,d\xi'$$

et

$$D_*^0(f)(\xi)=-\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon<|\xi-\xi'|} K_{\operatorname{sgn} P(f)}(\xi,\xi')f(\xi')\,d\xi'.$$

La démonstration de ce résultat est donnée dans le paragraphe 2. Cet énoncé suggère plusieurs remarques :

Les deux égalités précédentes montrent qu'on peut obtenir $\tilde{f}$ et $D_*^0(f)$ directement à partir de f (c'est à dire sans utiliser explicitement son intégrale de Poisson et sans calculer la mesure $\Delta|P(f)|$), *à condition de connaître* $\operatorname{sgn} P(f)$, ce qui revient essentiellement à connaître l'ensemble $P(f)^{-1}(0)$.

Une autre conséquence de cette nouvelle expression de la fonctionnelle D_*^0 est la suivante : on a $D_*^0(f)=V_f(f)$, où V_f est un opérateur de Calderón–Zygmund. Cet opérateur dépend évidemment de la fonction f considérée, mais sa norme de Calderón–Zygmund est contrôlée par une constante universelle ([1, proposition 3]). Il suffit alors de consulter un ouvrage traitant des intégrales singulières (par exemple [4]) pour obtenir « gratuitement » des estimations de la forme $\|D_*^0(f)\|_E \le C\|f\|_E$, pour une grande variété d'espaces fonctionnels E. La plupart de ces estimations sont nouvelles et ne sont pas évidentes si l'on s'en tient à la définition de la fonctionnelle D_*^0.

Enfin, si nous considérons l'égalité (1) et les deux égalités qui figurent dans l'énoncé précédent, deux quelconques de ces trois relations impliquent la troisième. On peut donc se contenter, pour prouver le théorème précédent, d'établir l'égalité donnant $\tilde{f}$. De la même manière, si on sait prouver indépendamment du théorème précédent l'égalité donnant $D_*^0(f)$ comme valeur principale, ce théorème fournit une nouvelle preuve de l'égalité (1).

Un des résultats de [2] montre en particulier que, même pour une fonction f dont l'irrégularité est modeste, l'ensemble des zéros de $P(f)$ peut être un ensemble un peu compliqué (par exemple, il existe $f\in\bigcap_{\alpha<1}\operatorname{Lip}_\alpha(\mathbf{R})$ et un compact K de mesure positive sur la droite, tels que, pour tout $\xi\in K$, la fonction harmonique $P(f)$ change de signe une infinité de fois sur toute demi-droite issue de ξ). La mesure $\Delta|P(f)|$ et la fonction $D_*^0(f)$ sont donc souvent des objets non triviaux. Nous espérons que le théorème précédent, qui établit un lien précis entre la fonctionnelle D_*^0 et la théorie des intégrales singulières, permettra de mieux connaître *the nature of the functional and its possible status in the catalogue of artifacts under the label "Littlewood–Paley, singular integral theory".*(1)

2. Démonstration du théorème

Nous continuerons, comme dans [1], à utiliser prioritairement la théorie des opérateurs de Calderón–Zygmund. Etant donné le noyau K d'un tel opérateur et

(1) Cette expression est empruntée à R. F. Gundy et M. L. Silverstein.

$f \in L^2(\mathbf{R})$, pour prouver que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|\xi-\xi'|>\varepsilon} K(\xi,\xi') f(\xi')\, d\xi'$$

existe pour presque tout ξ, la stratégie usuelle consiste à établir l'existence de cette limite lorsque la fonction f appartient à un sous-espace dense convenable de $L^2(\mathbf{R})$, puis à étendre ensuite ce résultat à toute fonction de $L^2(\mathbf{R})$ au moyen de l'inégalité maximale de Cotlar. La première étape de notre démonstration (paragraphe 2.1) consiste donc à déterminer quelle condition doit vérifier la fonction b pour que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|\xi-\xi'|>\varepsilon} K_b(\xi,\xi') f(\xi')\, d\xi'$$

existe presque partout lorque $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Le résultat obtenu est une condition nécessaire et suffisante simple et explicite (proposition 1).

Ce résultat et ceux établis dans [2] montrent que, dans le cas où la fonction b est le signe de l'extension harmonique d'une fonction de $L^2(\mathbf{R})$, la condition donnée par la proposition 1 peut ne pas être remplie presque partout, et par suite la stratégie générale évoquée plus haut est inopérante. Nous contournerons cette difficulté en deux étapes, de la manière suivante : dans le paragraphe 2.2, nous obtiendrons une décomposition (non canonique) des opérateurs T_b généraux (proposition 2), au moyen d'une valeur principale en un sens restreint. Ce résultat nous fournira des renseignements, incomplets mais suffisants, sur la fonction multiplicatrice (également non canonique) qui apparaît dans cette décomposition. Ensuite, nous montrerons (paragraphe 2.3) que, si les fonctions $f \in L^2(\mathbf{R})$ et b sont liées par la relation $b = \operatorname{sgn} P(f)$, alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|\xi-\xi'|>\varepsilon} K_b(\xi,\xi') f(\xi')\, d\xi'$$

existe pour presque tout $\xi \in \mathbf{R}$ (proposition 3).

On déduit ensuite facilement le théorème des trois propositions précédentes.

2.1. Condition nécessaire et suffisante d'existence de la valeur principale associée au noyau K_b

Il est bien connu que, étant donné le noyau K d'un opérateur de Calderón–Zygmund, un point $\xi \in \mathbf{R}$ et une suite (ε_k) de nombres >0 qui converge vers 0, la limite

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{|\xi-\xi'|>\varepsilon_k} K(\xi,\xi') f(\xi')\, d\xi'$$

existe pour toute fonction $f\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R})$ si et seulement si

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\varepsilon_k<|\xi-\xi'|<1} K(\xi,\xi')\,d\xi'$$

existe. Dans le cas des noyaux K_b, cette propriété s'avère liée au comportement à la frontière du demi-plan de la fonction b, en un sens que le résultat suivant va préciser. Etant donné $\xi\in\mathbf{R}$ et $z\in\mathbf{R}^2_+$, on posera $b(\xi+z)=b((\xi,0)+z)$.

Proposition 1. *Pour tout $\xi\in\mathbf{R}$ et toute suite (ε_k) de nombres >0 qui converge vers 0, la limite*

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\varepsilon_k<|\xi-\xi'|<1} K_b(\xi,\xi')\,d\xi'$$

existe si et seulement si

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbf{R}^2_+} b(\xi+\varepsilon_k z)\varrho(z)\,dz$$

existe, où

$$\varrho(z)=\frac{4}{\pi^2}\frac{y(y^4+x^4+2y^2x^2-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2((x-1)^2+y^2)((x+1)^2+y^2)}$$

pour tout $z=(x,y)\in\mathbf{R}^2_+$.

Démonstration. Pour tout $\xi\in\mathbf{R}$, et tous nombres ε et R vérifiant $0<\varepsilon<R$, nous poserons

$$A_b(\xi,\varepsilon,R)=\int_{\varepsilon<|\xi-\xi'|<R} K_b(\xi,\xi')\,d\xi'.$$

La proposition est une conséquence immédiate du résultat suivant.

Lemme 1. *Pour tout $\xi\in\mathbf{R}$, et tous nombres ε et R vérifiant $0<\varepsilon<R$, on a l'égalité*

$$A_b(\xi,\varepsilon,R)=-\int_{\mathbf{R}^2_+} b(\xi+\varepsilon z)\varrho(z)\,dz+\int_{\mathbf{R}^2_+} b(\xi+z)\frac{1}{R^2}\varrho\Big(\frac{z}{R}\Big)\,dz.$$

Démonstration. En utilisant la définition du noyau K_b, le théorème de Fubini (dont l'application se justifie aisément au moyen des estimations usuelles concernant le gradient du noyau de Poisson) et un changement de variable, on obtient l'égalité

$$A_b(\xi,\varepsilon,R)=2\int_{\mathbf{R}^2_+} yb(\xi+z)\nabla p_0(z)\Big(\int_{\varepsilon<|\zeta|<R}\nabla p_\zeta(z)\,d\zeta\Big)\,dz.$$

D'autre part, un calcul simple montre que, pour tout $a>0$, on a l'égalité

$$\int_{|\zeta|<a} \nabla p_\zeta(z)\, d\zeta = \frac{2a}{\pi}\frac{(-2xy\,,\,x^2-y^2-a^2)}{((x+a)^2+y^2)((x-a)^2+y^2)}. \tag{5}$$

On voit ainsi que $A_b(\xi,\varepsilon,R)$ est la somme de deux intégrales sur le demi-espace, l'une dépendant de ε, l'autre de R. On vérifie que cette dernière est égale à $\int_{\mathbf{R}^2_+} b(\xi+z)R^{-2}\varrho(z/R)\,dz$, et un simple changement de variable montre que la première n'est autre que $-\int_{\mathbf{R}^2_+} b(\xi+\varepsilon z)\varrho(z)\,dz$, d'où le résultat.

Il est important de savoir, en vue de la démonstration du théorème, que la fonction ϱ précédemment introduite est d'intégrale 1. Le calcul explicite de cette intégrale n'est pas trivial et présente peu d'intérêt, sauf peut-être pour des étudiants en calcul intégral. Nous donnerons, à la fin de la preuve de la proposition 2, des arguments de nature plus théorique permettant d'obtenir ce résultat sans nouveau calcul. Bien que cette fonction ϱ ne soit pas de signe constant, elle joue donc ici le rôle d'une «densité» et la propriété mise en évidence par la proposition 1 exprime l'existence d'une «limite omnidirectionnelle en moyenne» au sens de cette densité, pour la fonction b au point $(\xi,0)$ de la frontière, relativement à l'approche définie par la suite (ε_k).

Cette propriété, ainsi que des propriétés de type voisin, seront utilisées souvent dans la suite de cet article, ce qui justifie les définitions suivantes :

Etant donné une fonction borélienne bornée b définie dans le demi-espace et un point $\xi\in\mathbf{R}$, nous dirons que cette fonction vérifie la propriété $L(\xi)$ s'il existe un nombre (que nous noterons $b(\xi)$) tel que, pour presque tout $z\in\mathbf{R}^2_+$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} b(\xi+\varepsilon z) = b(\xi).$$

Nous dirons que la fonction b vérifie la propriété $L'(\xi)$ si, pour tout $z\in\mathbf{R}^2_+$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} b(\xi+\varepsilon z) \quad \text{existe}$$

(cette limite est donc autorisée à dépendre de z).

Enfin, nous dirons que la fonction b vérifie la propriété $L''(\xi)$ si

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbf{R}^2_+} b(\xi+\varepsilon z)\varrho(z)\,dz \quad \text{existe.}$$

Entre ces trois propriétés existent les implications évidentes $L(\xi)\Rightarrow L'(\xi)$ et $L'(\xi)\Rightarrow L''(\xi)$. Observons que, dans les cas qui nous intéressent, les deux plus fortes de ces propriétés sont les seuls moyens réalistes de prouver la troisième.

2.2. Décomposition de l'opérateur T_b

Le principal intérêt pour nous du résultat suivant est d'identifier la « partie canonique » des fonctions multiplicatrices intervenant dans les différentes décompositions possibles de l'opérateur T_b.

Proposition 2. *Pour toute application borélienne bornée* $b\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, *il existe une suite ponctuellement convergente* (ε_j) *de fonctions boréliennes définies dans* $\mathbf{R}$ *et à valeurs* >0, *possédant les propriétés suivantes :*

(i) $\lim_{j\to+\infty}\varepsilon_j(\xi)=0$ *pour presque tout* $\xi\in\mathbf{R}$.

(ii) *Pour presque tout* $\xi\in\mathbf{R}$,

$$\lim_{j\to+\infty}\int_{\mathbf{R}^2_+} b(\xi+\varepsilon_j(\xi)z)\varrho(z)\,dz \quad \textit{existe.}$$

(iii) *Pour toute fonction* $f\in L^2(\mathbf{R})$, *et presque tout* $\xi\in\mathbf{R}$,

$$\lim_{j\to+\infty}\int_{|\xi-\xi'|>\varepsilon_j(\xi)} K_b(\xi,\xi')f(\xi')\,d\xi' \quad \textit{existe.}$$

De plus, pour toute fonction $f\in L^2(\mathbf{R})$, *on a presque partout l'égalité*

$$T_b(f)(\xi)=m_b(\xi)f(\xi)+U_b(f)(\xi), \tag{6}$$

où

$$m_b(\xi)=\lim_{j\to+\infty}\int_{\mathbf{R}^2_+} b(\xi+\varepsilon_j(\xi)z)\varrho(z)\,dz \tag{7}$$

et

$$U_b(f)(\xi)=\lim_{j\to+\infty}\int_{|\xi-\xi'|>\varepsilon_j(\xi)} K_b(\xi,\xi')f(\xi')\,d\xi'. \tag{8}$$

Enfin, en presque tout point $\xi\in\mathbf{R}$ *tel que la propriété* $L(\xi)$ *soit satisfaite par la fonction* b, *on a* $m_b(\xi)=b(\xi)$.

Démonstration. L'existence d'une suite de fonctions (ε_j) et d'une fonction bornée m_b vérifiant les propriétés (i) et (iii) et l'égalité (6) résulte d'un théorème général ([4, p. 248]). Le fait qu'une telle suite vérifie (ii) résulte de (iii) et de la proposition 1. Il reste donc uniquement à prouver l'égalité (7).

Pour cela, nous allons démontrer que, pour tout $p\in\mathbf{N}$, l'égalité (7) a lieu presque partout dans l'intervalle $[-p,p]$. Nous désignerons par C une constante universelle, dont la valeur peut changer de place en place. Pour tout entier $k\geq 2p$, nous considérons une fonction $f_k\in C_0^\infty(\mathbf{R})$, à valeurs dans $[0,1]$, valant 1 sur $[-k,k]$ et nulle hors de $[-(k+1),k+1]$. En utilisant la définition de l'opérateur T_b et un changement de variable, on voit que, pour presque tout $\xi\in[-p,p]$,

$$\begin{aligned}T_b(f_k)(\xi) &= 2\int_{\mathbf{R}_+^2} yb(\xi+z)\nabla p_0(z)\left(\int_{|\zeta|\leq k-p}\nabla p_\zeta(z)\,d\zeta\right)dz\\ &\quad+2\int_{\mathbf{R}_+^2} yb(\xi+z)\nabla p_0(z)\left(\int_{k-p\leq|\zeta|\leq k+1+p}\nabla p_\zeta(z)f_k(\zeta+\xi)\,d\zeta\right)dz.\end{aligned}$$

En utilisant l'égalité (5), on voit que la première intégrale du second membre est égale à

$$\int_{\mathbf{R}_+^2} b(\xi+z)\frac{1}{(k-p)^2}\varrho\left(\frac{z}{k-p}\right)dz.$$

D'autre part, les estimations usuelles relatives au gradient du noyau de Poisson permettent de montrer facilement que la valeur absolue de la deuxième intégrale du second membre est majorée par Cp/k. Par conséquent on a, pour presque tout $\xi\in[-p,p]$,

$$\left|T_b(f_k)(\xi)-\int_{\mathbf{R}_+^2} b(\xi+z)\frac{1}{(k-p)^2}\varrho\left(\frac{z}{k-p}\right)dz\right|\leq\frac{Cp}{k}. \tag{9}$$

De la même manière, en utilisant l'égalité (8) et le lemme 1 on voit que, pour presque tout $\xi\in[-p,p]$,

$$\begin{aligned}&\Bigg|U_b(f_k)(\xi)+\lim_{j\to+\infty}\int_{\mathbf{R}_+^2} b(\xi+\varepsilon_j(\xi)z)\varrho(z)\,dz\\ &\qquad-\int_{\mathbf{R}_+^2} b(\xi+z)\frac{1}{(k-p)^2}\varrho\left(\frac{z}{k-p}\right)dz\Bigg|\leq\frac{Cp}{k}.\end{aligned} \tag{10}$$

Pour tout $k\geq 2p$, on utilise l'égalité (6) avec $f=f_k$, et les inégalités (9) et (10). En faisant tendre k vers l'infini, on obtient le fait que, pour presque tout $\xi\in[-p,p]$, on a l'égalité (7).

La fonction multiplicatrice m_b ainsi obtenue dépend de la suite de fonctions (ε_k), donc n'est pas canonique. Néanmoins, si on se place en un point $\xi\in\mathbf{R}$ tel que la fonction b vérifie la propriété $L''(\xi)$, on a évidemment

$$m_b(\xi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbf{R}_+^2} b(\xi+\varepsilon z)\varrho(z)\,dz.$$

Il nous reste à prouver la dernière assertion de la proposition, relative à la relation entre les fonctions m_b et b. Désignons provisoirement par I la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbf{R}^n} \varrho(\xi)\, d\xi$. En tout point $\xi \in \mathbf{R}^n$ en lequel la propriété $L'(\xi)$ est satisfaite, on a

$$m_b(\xi) = b(\xi) I, \tag{11}$$

comme il résulte aussitôt de l'égalité (7) et du théorème de convergence dominée. Il reste donc uniquement à prouver que $I=1$. Nous procédons de la manière suivante: La décomposition (1) et l'égalité (2) permettent de voir que $T_1(f)=f$ pour toute fonction f de signe constant. Par linéarité, l'opérateur T_1 est donc l'identité; par suite son noyau K_1 est nul hors de la diagonale (ce qui peut aussi se vérifier par un calcul direct basé sur la formule de Green), et par conséquent l'opérateur d'intégrale singulière U_1 est nul. L'égalité (6) montre alors qu'on a $f=m_1 f$ pour toute fonction $f \in L^2(\mathbf{R})$, et par suite on a $m_1=\mathbf{1}$. En comparant avec l'égalité (11), on voit que $I=1$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

2.3. Fin de la démonstration du théorème

La première assertion du théorème est évidemment un cas particulier de la

Proposition 3. *Pour toute fonction $f \in L^2(\mathbf{R})$, et toute fonction $g \in L^2(\mathbf{R})$ telle que $f^{-1}(0) \subset g^{-1}(0)$, l'intégrale*

$$\int_{\varepsilon<|\xi-\xi'|} K_{\operatorname{sgn} P(f)}(\xi,\xi') g(\xi')\, d\xi'$$

a, en presque tout point $\xi \in \mathbf{R}$, une limite quand ε tend vers 0.

Démonstration. Nous fixons une fonction $f \in L^2(\mathbf{R})$ et nous posons $b=\operatorname{sgn} P(f)$. Pour toute fonction $h \in L^2(\mathbf{R})$, tout $\varepsilon>0$ et tout $\xi \in \mathbf{R}$, nous posons

$$T_{b,\varepsilon}(h)(\xi) = \int_{|\xi-\xi'|>\varepsilon} K_b(\xi,\xi') h(\xi')\, d\xi'.$$

D'autre part, pour toute application $F\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et tout $\lambda \in \mathbf{R}$, nous désignerons par $\{F>\lambda\}$ l'ensemble des points $\xi \in \mathbf{R}$ tels que $F(\xi)>\lambda$. Avec ces notations, nous avons donc à montrer que si une fonction $g \in L^2(\mathbf{R})$ est telle que $f^{-1}(0) \subset g^{-1}(0)$, alors $m(E_k)=0$ pour tout entier $k \geq 1$, où

$$E_k = \left\{ \limsup_{(\varepsilon,\varepsilon')\to(0,0)} |T_{b,\varepsilon}(g) - T_{b,\varepsilon'}(g)| \geq \frac{1}{k} \right\}.$$

Pour cela, nous considérons une suite (g_n) de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ qui converge vers g dans $L^2(\mathbf{R})$. Pour tout couple $(\varepsilon,\varepsilon')$ de nombres >0, tout entier n et tout $\xi\in\mathbf{R}$, nous écrivons l'égalité (en reprenant la notation $A_b(\xi,\varepsilon,R)$ introduite dans la démonstration de la proposition 1 et en supposant $\varepsilon<\varepsilon'$)

$$T_{b,\varepsilon}(g)(\xi)-T_{b,\varepsilon'}(g)(\xi)=T_{b,\varepsilon}(g-g_n)(\xi)-T_{b,\varepsilon'}(g-g_n)(\xi)+T_{b,\varepsilon}(g_n)(\xi)-T_{b,\varepsilon'}(g_n)(\xi),$$

et nous avons

$$\begin{aligned}T_{b,\varepsilon}(g_n)(\xi)-T_{b,\varepsilon'}(g_n)(\xi)&=-(g_n-g)(\xi)A_b(\xi,\varepsilon,\varepsilon')-g(\xi)A_b(\xi,\varepsilon,\varepsilon')\\&\quad-\int_{\varepsilon<|\xi-\xi'|\le\varepsilon'}K_b(\xi,\xi')(g_n(\xi')-g_n(\xi))\,d\xi'.\end{aligned}$$

Nous observons successivement que :

• Pour tout $\xi\in\mathbf{R}$ et tout $n\in\mathbf{N}$,

$$\limsup_{(\varepsilon,\varepsilon')\to(0,0)}|T_{b,\varepsilon}(g-g_n)(\xi)-T_{b,\varepsilon'}(g-g_n)(\xi)|\le 2T_b^*(g-g_n)(\xi),$$

où $T_b^*(h)(\xi)=\sup_{\varepsilon>0}|T_{b,\varepsilon}(h)(\xi)|$.

• Pour tout $\xi\in\mathbf{R}$ et tout $n\in\mathbf{N}$,

$$\limsup_{(\varepsilon,\varepsilon')\to(0,0)}|(g_n-g)(\xi)A_b(\xi,\varepsilon,\varepsilon')|\le C|(g_n-g)(\xi)|,$$

où C est une constante universelle (conséquence du lemme 1 et de l'intégrabilité de la fonction ϱ).

• Pour presque tout $\xi\in\mathbf{R}$,

$$\limsup_{(\varepsilon,\varepsilon')\to(0,0)}|g(\xi)A_b(\xi,\varepsilon,\varepsilon')|=0.$$

En effet, cette propriété est évidente si $g(\xi)=0$ et, si $g(\xi)\neq0$, alors $f(\xi)\neq0$. Mais, presque partout sur l'ensemble $(f^{-1}(0))^c$, la fonction harmonique $P(f)$ a une limite non-tangentielle non nulle en raison du théorème de Fatou, donc b vérifie la propriété $L(\xi)$ en presque tout point ξ tel que $g(\xi)\neq0$. Par conséquent, la proposition 1 donne le résultat pour de tels points.

• Enfin, pour tout $\xi\in\mathbf{R}$ et tout $n\in\mathbf{N}$,

$$\limsup_{(\varepsilon,\varepsilon')\to(0,0)}\left|\int_{\varepsilon<|\xi-\xi'|\le\varepsilon'}K_b(\xi,\xi')(g_n(\xi')-g_n(\xi))\,d\xi'\right|=0,$$

parce que K_b est un noyau de Calderón–Zygmund et que g_n est de classe C^1.

Par conséquent, à un ensemble de mesure nulle près, on a, pour tout entier n, l'inclusion

$$E_k \subset \left\{ 2T_b^*(g-g_n) > \frac{1}{2k} \right\} \cup \left\{ C|g-g_n| > \frac{1}{2k} \right\}.$$

En appliquant deux fois l'inégalité de Tchebichev, puis l'inégalité maximale de Cotlar ([4, p. 241]), on obtient (pour une autre constante universelle C)

$$m(E_k) \leq Ck^2 \|g-g_n\|_2^2,$$

et il suffit de faire tendre n vers l'infini pour terminer la preuve de la proposition.

Il est maintenant facile de terminer la démonstration du théorème. Les propositions 2 et 3 donnent l'existence d'une fonction bornée $m_{\operatorname{sgn} P(f)}$ telle qu'on ait, pour presque tout $\xi \in \mathbf{R}$,

$$\tilde{f}(\xi) = T_{\operatorname{sgn} P(f)}(f)(\xi) = m_{\operatorname{sgn} P(f)}(\xi) f(\xi) + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < |\xi - \xi'|} K_{\operatorname{sgn} P(f)}(\xi, \xi') f(\xi') \, d\xi'.$$

Par conséquent, il reste à vérifier que

$$m_{\operatorname{sgn} P(f)}(\xi) f(\xi) = |f(\xi)| = \operatorname{sgn}(f(\xi)) f(\xi)$$

pour presque tout $\xi \in \mathbf{R}$. Cette égalité est triviale si $f(\xi)=0$. D'autre part, presque partout sur l'ensemble des points $\xi \in \mathbf{R}$ tels que $f(\xi) \neq 0$, la fonction $b = \operatorname{sgn} P(f)$ vérifie la propriété $L(\xi)$ comme on l'a déjà vu. On applique alors la dernière assertion de la proposition 2, ce qui fournit l'égalité

$$m_{\operatorname{sgn} P(f)}(\xi) = \lim_{z \to \xi} \operatorname{sgn}(P(f))(z) = \operatorname{sgn} f(\xi),$$

où la limite est entendue au sens de la convergence non tangentielle, en presque tout point $\xi \in \mathbf{R}$ tels que $f(\xi) \neq 0$. Ceci achève la preuve du théorème.

Bibliographie

1. CHEVALIER, L., Une « formule de Tanaka » en analyse harmonique et quelques applications, *Adv. Math.* **138** (1998), 182–210.
2. CHEVALIER, L. et DUFRESNOY, A., Sur les changements de signe d'une fonction harmonique dans le demi-plan, *Prépublication,* 1999.
3. GUNDY, R. F., The density of the area integral, dans *Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund* (Beckman, W., Calderón, A. P., Fefferman, R. et Jones, P. W., éds.), p. 138–149, Wadsworth, Belmont, Calif., 1983.

4. MEYER, Y., *Opérateurs de Calderón–Zygmund*, Hermann, Paris, 1990.

Reçu le 12 octobre 1998
Révisé le 12 juillet 1999

Lucien Chevalier
Institut Fourier
U.M.R. 5582 C.N.R.S./U.J.F.
B.P. 74
FR-38402 Saint Martin d'Hères
France
email: lucchev@fourier.ujf-grenoble.fr

Alain Dufresnoy
Institut Fourier
U.M.R. 5582 C.N.R.S./U.J.F.
B.P. 74
FR-38402 Saint Martin d'Hères
France
email: dufresn@fourier.ujf-grenoble.fr