Ark. Mat., **39** (2001), 263–282

Cohomologie L^2 sur les revêtements d'une variété complexe compacte

Frédéric Campana et Jean-Pierre Demailly

Introduction

La théorie de Hodge des variétés kählériennes compactes peut être en grande partie étendue aux variétés kählériennes complètes lorsque le cadre est celui de la cohomologie L^2 ; les propriétés énoncées dans ce cadre sont alors remarquablement analogues (Andreotti–Vesentini [AV], Ohsawa [O], Gromov [G]). Par ailleurs, les théorèmes d'annulation de la géométrie kählérienne ou projective reposant sur la méthode de Kodaira–Bochner–Nakano admettent par nature des versions L^2 (voir [AV] et [D]). On se propose ici de définir une cohomologie L^2 naturelle sur tout revêtement étale d'un espace analytique complexe X, à valeurs dans le relèvement de tout faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ sur X. Cette cohomologie a toutes les propriétés habituelles de la cohomologie des faisceaux sur X (suites exactes de cohomologie, suites spectrales, théorèmes d'annulation, en particulier), et ces propriétés sont obtenues en incorporant l'information issue des estimées L^2 dans les preuves standards des résultats correspondants. La cohomologie L^2 devrait offrir un cadre naturel pour étudier la géométrie des revêtements, en fournissant un formalisme fonctoriel jouissant des propriétés attendues. Lorsque l'espace X de base est compact et que le revêtement est galoisien de groupe Γ, on peut définir la Γ-dimension des groupes de cohomologie L^2 associés à un faisceau cohérent sur la base. On établit en particulier leur finitude et on étend le théorème de l'indice L^2 de Atiyah dans ce cadre. Enfin, si X est projective, on a des théorèmes d'annulation L^2 qui étendent naturellement les théorèmes d'annulation usuels (théorème de Kodaira–Serre, théorème de Kawamata–Viehweg, ...).

Dans [E1], [E2] et [E3] P. Eyssidieux a indépendamment construit une telle cohomologie, en utilisant des procédés voisins de ceux présentés ici. Signalons qu'un théorème d'annulation en cohomologie L^2 similaire à théorème 4.1 est énoncé par J. Kollár dans [K], corollaire 11.4. Les travaux de J. Jost et K. Zuo [JK], T. Napier et M. Ramachandran [NR], ainsi que ceux de [C], font aussi intervenir des problématiques fortement liées à celle du présent article.

1. Norme L^2 sur les sections

1.0. Soit X une variété analytique complexe, $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X, et U un ouvert relativement compact de X. On dira que U est *$\mathcal{F}$-admissible* s'il existe un ouvert de *Stein* V contenant U et tel que U soit relativement compact dans V, ainsi qu'un morphisme surjectif $f\colon \mathcal{O}_V^r \to \mathcal{F}|_V$ de faisceaux de $\mathcal{O}_V$-modules sur V. Un tel morphisme sera appelé une 0-présentation de $\mathcal{F}$. Si le fibré vectoriel trivial $V\times\mathbf{C}^r$ est muni d'une métrique hermitienne h, on définira, pour $s\in H^0(U,\mathcal{O}_U^r)$ la norme $\|s\|$ par $\|s\|^2=\int_U h(s,s)\,d\mu$, où μ est la forme volume d'une métrique fixée sur X. On notera $H^0_{(2)}(U,\mathcal{O}^r)$ l'espace vectoriel (de Hilbert) des s tels que $\|s\|<+\infty$, et

$$H^0_{(2)}(U,\mathcal{F}) := f_* H^0_{(2)}(U,\mathcal{O}^r) \subset H^0(U,\mathcal{F}).$$

On notera que cet espace est indépendant des choix (h, μ, et même f—voir ci-dessous) faits. On le munit de la norme L^2 quotient : pour $\sigma=f_*(s)\in H^0_{(2)}(U,\mathcal{F})$, on pose

$$\|\sigma\| := \inf\{\|s\| \mid f_*(s) =: f\circ s = \sigma,\ \ s\in H^0_{(2)}(U,\mathcal{O}^r)\}.$$

1.1. Proposition. *Si $\|\sigma\|=0$, alors $\sigma=0$. Autrement dit, la semi-norme ainsi définie sur $H^0_{(2)}(U,\mathcal{F})$ est une norme. De plus $H^0_{(2)}(U,\mathcal{F})$ équipé de cette norme est un espace de Hilbert isométrique à l'orthogonal* $(\mathrm{Ker}\, f_*)^\perp$ *de* $\mathrm{Ker}\, f_*\colon H^0_{(2)}(U,\mathcal{O}^r)\to H^0_{(2)}(U,\mathcal{F})$ *dans $H^0_{(2)}(U,\mathcal{O}^r)$, et* $\mathrm{Ker}\, f_*$ *est fermé dans $H^0_{(2)}(U,\mathcal{O}^r)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}\, f_*$ est fermé dans $H^0_{(2)}(U,\mathcal{O}^r)$. Or ceci résulte du fait que la topologie L^2 est plus forte que la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de U ([W], section III.7), et du fait bien connu que le noyau $\mathrm{Ker}\, f_*\colon H^0(U,\mathcal{O}^r)\to H^0(U,\mathcal{F})$ est fermé pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts (c'est le cas pour les sections à valeurs dans un sous-faisceau quelconque, [H], théorème 6.3.5 et chapitre 7). □

1.2. *Définition.* Deux espaces de Hilbert (E,h_i), $i=1,2$, sur le même espace sous-jacent E sont dits *équivalents* si les normes h_1 et h_2 définissent la même topologie (ou encore : s'il existe $0<A<B$ tels que $Ah_1\le h_2\le Bh_1$).

1.3. Corollaire. *A équivalence près, l'espace de Hilbert $(H^0_{(2)}(U,\mathcal{F}),\|\cdot\|)$ est indépendant des choix $(h;\mu;f)$ faits.*

Démonstration. Seule l'indépendance vis à vis de f mérite d'être vérifiée : soient $f_i\colon \mathcal{O}_V^{r_i}\to\mathcal{F}|_V\to 0$, $i=1,2$, deux 0-présentations de $\mathcal{F}|_V$ sur un V commun. Puisque V est Stein, il existe $\varphi\colon \mathcal{O}_V^{r_i}\to\mathcal{O}_V^{r_j}$, avec $i\ne j$, tel que $f_j\circ\varphi=f_i$. □

Cette application fournit la continuité de l'application identique de $H^0_{(2)}(U,\mathcal{F})$ muni de la norme déduite de f_i dans lui-même muni de la norme déduite de f_j.

1.4. Soit $U'\subset U$; l'application naturelle de restriction $H^0_{(2)}(U,\mathcal{F})\to H^0_{(2)}(U',\mathcal{F})$ est continue, et compacte si $U'\Subset U$. L'affirmation est en effet claire dans le cas de faisceaux localement libres, et le cas général s'en déduit.

1.5. Soit $u\colon\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux, et U un ouvert qui soit à la fois $\mathcal{F}$-admissible et $\mathcal{G}$-admissible relativement à un même ouvert de Stein V. On a alors un morphisme induit $u_{(2)}\colon H^0_{(2)}(U,\mathcal{F})\to H^0_{(2)}(U,\mathcal{G})$ *continu.* En effet, soit $f\colon\mathcal{O}_V^r\to\mathcal{F}|_V$ une 0-présentation de $\mathcal{F}|_V$ et $g\colon\mathcal{O}_V^{r+s}\to\mathcal{G}|_V$ une 0-présentation de $\mathcal{G}|_V$ choisie en sorte que $g\circ i=u\circ f$, où $i\colon\mathcal{O}_V^r\to\mathcal{O}_V^{r+s}$ est l'injection des r-premières composantes. Alors le noyau du morphisme $f_\star\colon H^0_{(2)}(U,\mathcal{O}_V^r)\to H^0(U,\mathcal{F})$ s'envoie par i dans le noyau de $g_\star\colon H^0_{(2)}(U,\mathcal{O}_V^{r+s})\to H^0(U,\mathcal{G})$, et on en déduit le morphisme $u_{(2)}$ voulu par passage au quotient. De plus $u_{(2)}$ est injectif si u est injectif, et $u_{(2)}$ est surjectif si u est surjectif.

1.6. Le foncteur $\mathcal{F}\mapsto H^0_{(2)}(U,\mathcal{F})$ n'est en général pas exact. Pour le voir, on peut considérer par exemple le morphisme injectif $u\colon\mathcal{O}_{\mathbf{C}^2}\to\mathcal{O}_{\mathbf{C}^2}$, $s\mapsto z_2s$. Alors le morphisme induit

$$u_{(2)}\colon H^0_{(2)}(U,\mathcal{O})\longrightarrow H^0_{(2)}(U,\mathcal{O})$$

n'est pas d'image fermée sur la boule unité $U=B(0,1)\subset\mathbf{C}^2$ (on peut vérifier que la section $(1-z_1)^{-3/2}$ n'est pas dans $L^2(U)$, tandis que $z_2(1-z_1)^{-3/2}$ est dans $L^2(U)$, et par suite $z_2(1-z_1)^{-3/2}$ est seulement dans l'adhérence de l'image). Ceci montre qu'on ne peut pas avoir une suite exacte

$$H^0_{(2)}(U,\mathcal{O}_{\mathbf{C}^2})\xrightarrow{u_{(2)}}H^0_{(2)}(U,\mathcal{O}_{\mathbf{C}^2})\longrightarrow H^0_{(2)}(U,\mathcal{O}_{\mathbf{C}\times\{0\}}).$$

1.7. Le défaut d'exactitude du foncteur sections L^2 pourra être pallié par l'observation suivante : soit

$$\mathcal{F}\xrightarrow{u}\mathcal{G}\xrightarrow{v}\mathcal{H}$$

une suite exacte de faisceaux admettant des 0-présentations sur un ouvert de Stein V, et soient $U'\Subset U\Subset V$ des ouverts de Stein. Il existe une constante $C>0$ telle que pour tout élément g dans le noyau de $v_{(2)}\colon H^0_{(2)}(U,\mathcal{G})\to H^0_{(2)}(U,\mathcal{H})$, on puisse trouver un élément $f\in H^0_{(2)}(U',\mathcal{F})$ tel que $u_{(2)}(f)=g|_{U'}$ et $\|f\|_{L^2(U')}\le C\|g\|_{L^2(U)}$. En effet, la topologie de $H^0_{(2)}(U,\mathcal{G})$ est plus forte que la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de U (induite par passage au quotient à partir d'une présentation $\mathcal{O}^N\to\mathcal{G}$ et de la topologie d'espace de Fréchet sur $H^0(U,\mathcal{O}^N)$). On conclut à partir de la suite exacte d'espaces de Fréchet

$$H^0(U,\mathcal{F})\longrightarrow H^0(U,\mathcal{G})\longrightarrow H^0(U,\mathcal{H})$$

et du fait que le morphisme de restriction $H^0(U,\mathcal{F})\to H^0_{(2)}(U',\mathcal{F})$ est continu.

1.8. *Remarque.* Les notions d'espaces de sections L^2 peuvent également être définies de manière analogue pour un espace analytique X arbitraire (réduit ou non), en plongeant localement l'ouvert de Stein $V\subset X$ dans un espace ambiant lisse $\mathbf{C}^N$, et en considérant l'extension triviale $\mathcal{G}$ du faisceau $\mathcal{F}|_V$ à $\mathbf{C}^N$ (telle que $\mathcal{G}|_{\mathbf{C}^N\setminus V}=0$). Les normes L^2 pour un ouvert $U\Subset V$ sont alors calculées en travaillant sur un ouvert de Stein $U'\Subset\mathbf{C}^N$ tel que $U'\cap V=U$.

2. Image directe L^2

2.0. *Conventions.* Soit X un espace analytique complexe et $p\colon\widetilde{X}\to X$ un revêtement étale de X. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X et $\widetilde{\mathcal{F}}:=p^*\mathcal{F}$ son relèvement à $\widetilde{X}$. Si $U\Subset V$ sont des ouverts de X avec V Stein et $f\colon\mathcal{O}_V^r\to\mathcal{F}_V$ une 0-résolution de $\mathcal{F}$ sur V, on notera $\widetilde{U}=:p^{-1}(U)$; $\widetilde{V}:=p^{-1}(V)$; et $\tilde{f}\colon\mathcal{O}_{\widetilde{V}}^r\to\widetilde{\mathcal{F}}_{\widetilde{V}}$ les relèvements correspondants à $\widetilde{X}$.

On dira que V est *p-simple* si chaque composante connexe de $\widetilde{V}$ est appliquée par p sur une composante connexe de V, bijectivement. On supposera cette condition satisfaite.

Soit h une métrique hermitienne sur le fibré trivial $V\times\mathbf{C}^r$ associé à $\mathcal{O}_V^r$, et $\tilde{h}$ son relèvement à $\widetilde{V}\times\mathbf{C}^r$, associé à $\mathcal{O}_{\widetilde{V}}^r$.

Ceci permet de définir la notion de norme L^2 pour $\tilde{s}\in H^0(\widetilde{U},\widetilde{\mathcal{F}})$, grâce à la définition de 1.0, et aussi $H^0_{(2)}(\widetilde{U},\widetilde{\mathcal{F}})$ qui, muni de cette norme, est un espace de Hilbert. De plus, les arguments de la section 1 montrent que l'espace de Hilbert $(H^0_{(2)}(\widetilde{U},\widetilde{\mathcal{F}}),\|\cdot\|)$ est indépendant des choix (V,f,h,μ) faits, à équivalence près.

2.1. *Définition.* Soit W un ouvert de X, et $\widetilde{W}=:p^{-1}(W)$. Soit $\tilde{s}\in H^0(\widetilde{W},\widetilde{\mathcal{F}})$. On dit que $\tilde{s}$ est *localement L^2 sur X* si, pour chaque $x\in W$, il existe des voisinages ouverts $U\Subset V$ de x dans X, avec V Stein et p-simple, tels que la restriction de $\tilde{s}$ à $\widetilde{U}$ soit dans $H^0_{(2)}(\widetilde{U},\widetilde{\mathcal{F}})$.

2.2. L'ensemble, noté $H^0_{(2),\mathrm{loc}}(\widetilde{W},\widetilde{\mathcal{F}})$ des $\tilde{s}$ de $H^0(\widetilde{W},\widetilde{\mathcal{F}})$ qui sont localement L^2 sur X forme clairement un espace vectoriel complexe. On a de plus, des applications naturelles de restriction $\mathrm{res}_{W,W'}\colon H^0_{(2),\mathrm{loc}}(\widetilde{W},\widetilde{\mathcal{F}})\to H^0_{(2)}(\widetilde{W}',\widetilde{\mathcal{F}})$ pour $W\supset W'$, ouverts de X, et donc un préfaisceau à valeurs dans la catégorie des espaces vectoriels complexes

$$W\longrightarrow H^0_{(2),\mathrm{loc}}(\widetilde{W},\widetilde{\mathcal{F}}).$$

Il est immédiat de vérifier que ce préfaisceau est un faisceau d'espaces vectoriels complexes sur X.

2.3. *Définition.* Le faisceau ainsi défini $W \to H^0_{(2),\mathrm{loc}}(\widetilde{W}, \widetilde{\mathcal{F}})$ sur X est noté $p_{*(2)}\widetilde{\mathcal{F}}$; il est appelé *le faisceau image directe* L^2 de $\widetilde{\mathcal{F}}$ par p.

2.4. On munit maintenant naturellement $(p_{*(2)}\widetilde{\mathcal{F}})$ d'une structure de $\mathcal{O}_X$-module comme suit : si $\tilde{s} \in H^0_{(2),\mathrm{loc}}(\widetilde{W}, \widetilde{\mathcal{F}})$ représente un germe de section de $(p_{*(2)}\widetilde{\mathcal{F}})$ en $x \in W$, et si $\varphi \in H^0(W, \mathcal{O}_W)$, alors $(p^*\varphi \cdot \tilde{s}) \in H^0_{(2),\mathrm{loc}}(\widetilde{W}, \widetilde{\mathcal{F}})$. Ce dernier groupe est donc un $H^0(W, \mathcal{O}_W)$-module.

2.5. *Remarque.* Le faisceau $p_{*(2)}(\widetilde{\mathcal{F}})$ n'est en général cohérent que si p est fini, auquel cas il se réduit à l'image directe $p_*\widetilde{\mathcal{F}}$ usuelle. Si p est infini et $\mathcal{F} \neq 0$, alors $p_{*(2)}(\widetilde{\mathcal{F}})$ n'est jamais cohérent.

2.6. Proposition. *Soit $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ une suite exacte de faisceaux cohérents analytiques sur X ; alors la suite naturelle d'images directes L^2: $p_{*(2)}\widetilde{\mathcal{F}} \to p_{*(2)}\widetilde{\mathcal{G}} \to p_{*(2)}\widetilde{\mathcal{H}}$ est exacte. (Autrement dit : le foncteur d'image directe L^2 par p est exact.)*

Démonstration. Soit V un ouvert p-simple sur lequel $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ admettent des 0-présentations et $U' \Subset U \Subset V$ des ouverts de Stein connexes comme dans section 1.7. Toutes les composantes connexes $U'_j \Subset U_j \Subset V_j$ de $\widetilde{U}'$, $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$ sont alors en isomorphisme avec $U' \Subset U \Subset V$. Il existe par conséquent une constante C indépendante de j telles que les sections g_j du noyau de $H^0_{(2)}(U_j, \widetilde{\mathcal{G}}) \to H^0_{(2)}(U_j, \widetilde{\mathcal{H}})$ se relèvent en des sections f_j de $H^0_{(2)}(U'_j, \mathcal{F})$, avec $\|f_j\|_{L^2(U'_j)} \leq C\|g_j\|_{L^2(U_j)}$. Toute section $g = \bigoplus g_j$ dans le noyau de $H^0_{(2)}(\widetilde{U}, \widetilde{\mathcal{G}}) \to H^0_{(2)}(\widetilde{U}, \widetilde{\mathcal{H}})$ se relève donc en une section $f = \bigoplus f_j \in H^0_{(2)}(\widetilde{U}', \widetilde{\mathcal{F}})$ dans $L^2(\widetilde{U}')$. □

2.7. Corollaire. *On a un isomorphisme naturel de faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules $\eta : p_{*(2)}\widetilde{\mathcal{F}} \xrightarrow{\sim} (p_{*(2)}\mathcal{O}_{\widetilde{X}}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$.*

Démonstration. C'est immédiat à partir des définitions lorsque $\mathcal{F}$ est localement libre. En général, on conclut à partir de l'exactitude du foncteur image directe L^2, par récurrence sur la longueur d'une résolution libre (locale) de $\mathcal{F}$ sur X. □

2.8. *Exemple.* Supposons que $\mathcal{F}$ admette une résolution finie localement libre (si X est projective, c'est toujours le cas, par un résultat de J.-P. Serre) $0 \to \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_{n-1} \to \ldots \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F} \to 0$. Alors $p_{*(2)}\widetilde{\mathcal{F}}$ admet une résolution finie de même longueur par des faisceaux localement de la forme $(p_{*(2)}\mathcal{O}_{\widetilde{X}})^{\oplus r}$,

$$0 \longrightarrow p_{*(2)}\widetilde{\mathcal{L}}_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow p_{*(2)}\widetilde{\mathcal{L}}_0 \longrightarrow p_{*(2)}\mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Lorsque X est projective, les $\mathcal{L}_k$ peuvent être pris de la forme

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{j=1}^{r} \mathcal{O}_X(a_j), \quad a_j \in \mathbf{Z},$$

et on a donc

$$p_{*(2)}\mathcal{L} = \bigoplus_{j=1}^{r} p_{*(2)}\mathcal{O}_{\widetilde{X}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(a_j).$$

2.9. Proposition. *Soit Y un sous-espace de X, $\mathcal{F}'$ un faisceau analytique cohérent sur Y, et $\mathcal{F}=i_*\mathcal{F}'$ son extension par 0 sur $X\backslash Y$ (image directe par l'injection $i: Y \to X$). Alors, si $p': \widetilde{Y} := p^{-1}(Y) \to Y$ est le revêtement étale de Y induit par $p: \widetilde{X} \to X$, on a $p_{*(2)}\widetilde{\mathcal{F}} = \tilde{\imath}_*(p'_{*(2)}\widetilde{\mathcal{F}}')$ où $\tilde{\imath}: \widetilde{Y} \to \widetilde{X}$ est l'injection naturelle.*

Démonstration. On observe d'abord que si V est un ouvert de Stein simple dans X et si $U \Subset V$ est un voisinage dans X d'un point $x \in Y$ (resp. $U' \Subset Y \cap U$ un voisinage de x dans Y), on a un morphisme de restriction continu $H^0_{(2)}(U, \mathcal{F}) \to H^0_{(2)}(U', \mathcal{F}')$. En considérant les sections sur les revêtements $\widetilde{U}$ et $\widetilde{U}'$ puis en passant à la limite inductive sur U et U', on en déduit qu'on a un morphisme de restriction $p_{*(2)}\mathcal{F} \to \tilde{\imath}_*(p'_{*(2)}\mathcal{F}')$ continu. Il s'agit en fait d'un isomorphisme. En effet, prenons des voisinages ouverts de Stein U, U_1 de x dans X (resp. U' de x dans Y), tels que $U \Subset U_1 \Subset V$ et $Y \cap U_1 \Subset U'$. On a un homomorphisme surjectif d'espaces de Fréchet $H^0(U_1, \mathcal{F}) \to H^0(Y \cap U_1, \mathcal{F}')$, qui est par suite un morphisme ouvert. Pour toute section s' de $\mathcal{F}'$ sur U', on peut alors trouver une section s de $\mathcal{F}$ sur U_1 telle que $s|_{Y\cap U_1} = s'|_{Y \cap U_1}$ et $\|s\|_{L^\infty(U)} \le C\|s'\|_{L^\infty(U_1')}$ pour un certain $U_1' \Subset Y \cap U_1$. Au niveau des normes L^2, ceci implique $\|s\|_{L^2(U)} \le C\|s'\|_{L^2(U')}$. On conclut en passant aux sections sur les revêtements $\widetilde{U}$ et $\widetilde{U}'$. □

3. Cohomologie L^2

3.0. Les conventions sont celles de conventions 2.0.

3.1. *Définition.* Soit W un ouvert de X. On définit la cohomologie L^2 de $\widetilde{W}$ à valeurs dans $\widetilde{\mathcal{F}}$ comme étant celle du faisceau $p_{*(2)}\widetilde{\mathcal{F}}$ sur W. On note alors $H^q_{(2)}(\widetilde{W}, \widetilde{\mathcal{F}})$, $q \ge 0$, le q-ième groupe de cohomologie ainsi défini.

3.2. Théorème. *Soit $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ une suite exacte de faisceaux analytiques cohérents sur X. On peut lui associer une suite exacte longue de cohomologie L^2, fonctorielle en $\mathcal{F}$,*

$$0 \to H^0_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}}) \to \ldots \to H^q_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}}) \to H^q_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{G}}) \to H^q_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{H}}) \to H^{q+1}_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}}) \to \ldots$$

Démonstration. Cette suite exacte résulte immédiatement de l'exactitude du foncteur $p_{*(2)}$ et des propriétés usuelles de la cohomologie. □

3.3. Proposition. *Soit un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \widetilde{X} \\ {\scriptstyle p'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

où les flèches verticales sont des revêtements, $f\colon Y\to X$ un morphisme analytique et $p'\colon\widetilde{Y}\to Y$ le revêtement image inverse de p par f. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur Y. Alors pour tout $q\geq 0$ on a la formule de commutation

$$p_{*(2)}(R^q f_*\mathcal{F})^{\widetilde{}} = R^q\tilde{f}_*(p'_{*(2)}\widetilde{\mathcal{F}}).$$

Démonstration. Les deux faisceaux en question sont les faisceaux associés au préfaisceau

$$U\longmapsto H^q(f^{-1}(U),p'_{*(2)}\widetilde{\mathcal{F}}),\quad U\longmapsto H^q_{(2)}(\tilde{f}^{-1}(\widetilde{U}),\widetilde{\mathcal{F}}),$$

et ces deux préfaisceaux coïncident par définition de la cohomologie L^2. □

3.4. Isomorphisme de Dolbeault. On suppose que X est une variété lisse, que $\mathcal{F}$ est localement libre, et on note F le fibré vectoriel (supposé muni d'une métrique hermitienne) associé sur X. Soit $\widetilde{\mathcal{F}}^{r,q}$ le faisceau des formes différentielles v de type (r,q) à valeurs dans $\widetilde{F}$ et à coefficients L^2_{loc} sur $\widetilde{X}$, telles que $\bar\partial v$ soient aussi L^2_{loc}. Soit $p_{*(2)}\widetilde{\mathcal{F}}^{r,q}$ le (pré)faisceau sur X défini par $U\to H^0_{(2),\mathrm{loc}}(\widetilde{U},\widetilde{\mathcal{F}}^{r,q})$, image directe L^2 de $\widetilde{\mathcal{F}}^{r,q}$ sur X, à savoir le faisceau des formes différentielles qui sont L^2 localement au dessus de X, sur les ouverts de la forme $\widetilde{U}=p^{-1}(U)$. L'opérateur $\bar\partial$ fournit un complexe de faisceaux sur X,

$$0\to p_{*(2)}\widetilde{\mathcal{F}}\to p_{*(2)}\widetilde{\mathcal{F}}^{0,0}\xrightarrow{\bar\partial}\dots\xrightarrow{\bar\partial}p_{*(2)}\widetilde{\mathcal{F}}^{0,q}\to p_{*(2)}\widetilde{\mathcal{F}}^{0,q+1}\to\dots\to p_{*(2)}\widetilde{\mathcal{F}}^{0,n}\to 0.$$

Ce complexe est exact, en vertu du théorème d'existence de Hörmander–Andreotti–Vesentini pour les solutions L^2 de l'opérateur $\bar\partial$: en effet, on va appliquer ce théorème sur des ouverts $\widetilde{U}$ qui revêtent un ouvert de Stein $U\subset X$ quelconque, en prenant une métrique kählérienne ω sur X et des poids de la forme $\tilde\varphi=\varphi\circ p$, où φ est choisi en sorte que $i\partial\bar\partial\varphi+\mathrm{Ricci}_\omega+\mathrm{Courbure}_F\geq\omega$. Pour toute forme w telle que $\bar\partial w=0$, on voit alors que l'équation $\bar\partial v=w$ admet une solution v telle que $\|v\|\leq\|w\|$ en norme L^2.

On obtient ainsi une résolution fine de $p_{*(2)}\widetilde{\mathcal{F}}$ (par des faisceaux de modules sur le faisceau d'anneaux des fonctions C^∞ sur X), de sorte que le complexe de Dolbeault L^2 calcule bien la cohomologie L^2 définie en définition 3.1. Nous pouvons énoncer le résultat suivant.

3.5. Proposition. (Isomorphisme de Dolbeault) *Soit X une variété analytique complexe, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module localement libre sur X, et $(L^{0,q}_{(2),\mathrm{loc}}(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{F}}),\bar\partial)$ le complexe des $(0,q)$-formes sur $\widetilde{X}$, à valeurs dans $\widetilde{\mathcal{F}}$ et localement L^2 sur X ainsi que leur $\bar\partial$. Alors la cohomologie de ce complexe s'identifie à $H^*_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{F}})$.*

Comme dans la situation classique, l'isomorphisme de Dolbeault fournit un moyen commode pour prouver des théorèmes d'annulations.

3.6. Théorème. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur un espace complexe X.*

(a) *Si U est un ouvert de Stein, alors $H^q_{(2)}(\widetilde{U},\widetilde{\mathcal{F}})=H^q(U,p_{*(2)}\widetilde{\mathcal{F}})=0$ pour $q>0$.*

(b) *Soit $W\subset U$ une paire de Runge d'ouverts de Stein, alors le morphisme de restriction $H^0_{(2)}(\widetilde{U},\widetilde{\mathcal{F}})\to H^0_{(2)}(\widetilde{W},\widetilde{\mathcal{F}})$ est d'image dense pour la topologie de la convergence L^2 au dessus des compacts de W.*

Démonstration. Rappelons qu'une paire d'ouverts de Stein $W\subset U$ est dite de Runge si l'enveloppe holomorphe convexe de toute partie compacte de W relativement à l'algèbre des fonctions holomorphes sur U est compacte dans W. On sait alors que l'image du morphisme de restriction $\mathcal{O}(U)\to\mathcal{O}(W)$ est dense, et que pour tout compact K de W il existe une fonction d'exhaustion strictement plurisousharmonique φ_K sur X telle que l'ensemble de niveau $X_c=\{\varphi_K<c\}$ vérifie $K\subset X_c\Subset W$. Le théorème 3.5 se prouve en trois étapes.

Étape 1. Le complexe X est lisse et $\mathcal{F}$ est localement libre. Dans ce cas, il suffit d'utiliser l'isomorphisme de Dolbeault, section 3.4, et d'appliquer le théorème de Hörmander–Andreotti–Vesentini ([H], [AV]) avec des poids plurisousharmoniques φ sur U à croissance arbitrairement grande lorsqu'on s'approche du bord de U, de manière à faire converger les normes L^2. L'assertion sur les paires de Runge se démontre comme les théorèmes 4.3.2 et 5.2.10 de Hörmander [H], en utilisant des poids de la forme $e^{-N\varphi_K}$, $N\gg 0$, pour assurer la convergence uniforme des approximations au voisinage de K. Bien entendu, cette étape permet aussi de couvrir le cas où U est un ouvert de Stein dans un espace X quelconque, il suffit de plonger V dans un espace de Stein ambiant lisse et de prolonger le faisceau $\mathcal{F}$ par 0 en dehors de X.

Étape 2. L'ouvert U est contenu dans un ouvert de Stein simple V sur lequel $\mathcal{F}$ admet une résolution libre. Soit

$$0\longrightarrow\mathcal{L}_n\longrightarrow\mathcal{L}_{n-1}\longrightarrow\mathcal{L}_n\longrightarrow\ldots\longrightarrow\mathcal{L}_0\longrightarrow\mathcal{F}$$

une résolution libre de $\mathcal{F}$. On raisonne par récurrence sur la longueur n de la résolution. Si $n=0$, alors $\mathcal{F}$ est libre et on applique l'étape 1. En général, soit $\mathcal{G}$

le noyau de $\mathcal{L}_0 \to \mathcal{F}$. Alors $\mathcal{G}$ admet une résolution libre de longueur $n-1$, et par hypothèse de récurrence on a $H^q_{(2)}(\widetilde{U},\widetilde{\mathcal{G}})=0$ pour $q>0$. La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

fournit une suite exacte longue de cohomologie

$$0 = H^q_{(2)}(\widetilde{U},\widetilde{\mathcal{L}}_0) \longrightarrow H^q_{(2)}(\widetilde{U},\widetilde{\mathcal{F}}) \longrightarrow H^{q+1}_{(2)}(\widetilde{U},\widetilde{\mathcal{G}}) = 0, \quad q>0,$$

ce qui conclut la récurrence. Le fait que le morphisme $H^0_{(2)}(\widetilde{W},\widetilde{\mathcal{L}}_0) \to H^0_{(2)}(\widetilde{W},\widetilde{\mathcal{F}})$ soit surjectif ramène l'assertion sur les paires de Runge au cas d'un faisceau localement libre.

Étape 3. *Cas général.* On utilise la classique « méthode des bosses » d'Andreotti–Grauert. Pour cela, on choisit un recouvrement localement fini $U=\bigcup_{j\in\mathbf{N}} U_j$ assez fin de U, par des ouverts U_j ayant les propriétés suivantes :

- U_j est un ouvert de Stein relativement compact dans U, et (U_j,U) est une paire de Runge ;
- $V_j=U_0\cup U_1\cup\ldots\cup U_j$ est un ouvert de Stein et (V_j,U) est une paire de Runge.

On choisit le recouvrement (U_j) assez fin pour que chaque U_j soit contenu dans un ouvert de Stein simple sur lequel $\mathcal{F}$ admet une résolution libre. On démontre maintenant par récurrence sur j que

(a_j) $H^q_{(2)}(\widetilde{V}_j,\widetilde{\mathcal{F}})=0$ pour tout $q>0$;

(b_j) si $W\subset V_j$ est une paire de Runge, la restriction $H^0_{(2)}(\widetilde{V}_j,\widetilde{\mathcal{F}}) \to H^0_{(2)}(\widetilde{W},\widetilde{\mathcal{F}})$ est d'image dense.

Pour $j=0$ on a $V_0=U_0$ et (a_0), (b_0) résultent de l'étape 2. Pour passer de l'étape j à l'étape $j+1$, on utilise la suite exacte

$$\begin{aligned} \ldots \longrightarrow & H^{q-1}_{(2)}(\widetilde{V}_j,\widetilde{\mathcal{F}}) \oplus H^{q-1}_{(2)}(\widetilde{U}_{j+1},\widetilde{\mathcal{F}}) \longrightarrow H^{q-1}_{(2)}(\widetilde{V}_j\cap\widetilde{U}_{j+1},\widetilde{\mathcal{F}}) \\ \longrightarrow H^q_{(2)}(\widetilde{V}_{j+1},\widetilde{\mathcal{F}}) \longrightarrow & H^q_{(2)}(\widetilde{V}_j,\widetilde{\mathcal{F}}) \oplus H^q_{(2)}(\widetilde{U}_{j+1},\widetilde{\mathcal{F}}) \longrightarrow H^q_{(2)}(\widetilde{V}_j\cap\widetilde{U}_{j+1},\widetilde{\mathcal{F}}) \longrightarrow \ldots \end{aligned}$$

qui résulte de l'application de la suite exacte de Mayer–Vietoris au faisceau $(p_2)_*\widetilde{\mathcal{F}}$. Pour $q\geq 2$, l'étape 2 et l'hypothèse de récurrence entraînent

$$H^{q-1}_{(2)}(\widetilde{V}_j\cap\widetilde{U}_{j+1},\widetilde{\mathcal{F}}) = H^q_{(2)}(\widetilde{U}_{j+1},\widetilde{\mathcal{F}}) = 0, \quad \text{resp.} \quad H^q_{(2)}(\widetilde{V}_j,\widetilde{\mathcal{F}}) = 0,$$

d'où $H^q_{(2)}(\widetilde{V}_{j+1},\widetilde{\mathcal{F}})=0$. Si $q=1$, on utilise de plus le fait que le morphisme de restriction $H^0_{(2)}(\widetilde{V}_j,\widetilde{\mathcal{F}}) \to H^0_{(2)}(\widetilde{V}_j\cap\widetilde{U}_{j+1},\widetilde{\mathcal{F}})$ est d'image dense pour voir que le morphisme continu

$$H^0_{(2)}(\widetilde{V}_j\cap\widetilde{U}_{j+1},\widetilde{\mathcal{F}}) \longrightarrow H^1_{(2)}(\widetilde{V}_{j+1},\widetilde{\mathcal{F}})$$

est nécessairement nul. Ceci implique alors $H^1_{(2)}(\widetilde{V}_{j+1},\widetilde{\mathcal{F}})=0$ et l'assertion (a_{j+1}) est démontrée.

L'assertion (b_{j+1}), quant à elle, s'obtient comme suit. Soit $W\subset V_{j+1}$ une paire de Runge. Alors $W\cap V_j\subset V_j$ et $W\cap U_{j+1}\subset U_{j+1}$ sont des paires de Runge pour lesquelles on peut appliquer l'hypothèse de récurrence (b_j), resp. l'étape 2. Si s est une section de $H^0_{(2)}(\widetilde{W},\widetilde{\mathcal{F}})$, on peut approximer s en topologie L^2 au dessus de tout compact de $W\cap V_j$, resp. de $W\cap U_{j+1}$, par des sections $s_j\in H^0_{(2)}(\widetilde{V}_j,\widetilde{\mathcal{F}})$, resp. $t_{j+1}\in H^0_{(2)}(\widetilde{U}_{j+1},\widetilde{\mathcal{F}})$. La différence s_j-t_{j+1} définit un 1-cocycle de Čech sur V_{j+1} relativement au recouvrement (V_j,U_{j+1}). Comme $H^1_{(2)}(\widetilde{V}_{j+1},\widetilde{\mathcal{F}})=0$, on a un morphisme surjectif d'espaces de Fréchet

$$H^0_{(2)}(\widetilde{V}_j,\widetilde{\mathcal{F}})\oplus H^0_{(2)}(\widetilde{U}_{j+1},\widetilde{\mathcal{F}})\longrightarrow H^0_{(2)}(\widetilde{V}_{j+1},\widetilde{\mathcal{F}}).$$

Or, si s_j et t_{j+1} sont des approximations suffisamment bonnes de s, la différence s_j-t_{j+1} peut être choisie arbitrairement petite dans la topologie de l'espace de Fréchet but. D'après le théorème de l'application ouverte, on peut trouver des sections $\sigma_j\in H^0_{(2)}(\widetilde{V}_j,\widetilde{\mathcal{F}})$ et $\tau_{j+1}\in H^0_{(2)}(\widetilde{U}_{j+1},\widetilde{\mathcal{F}})$ arbitrairement petites telles que $\sigma_j-\tau_{j+1}=s_j-t_{j+1}$ sur $\widetilde{V}_j\cap\widetilde{U}_{j+1}$. Alors $s_j-\sigma_j$ et $t_{j+1}-\tau_{j+1}$ se recollent en une section sur $V_{j+1}=V_j\cup U_{j+1}$ qui approxime s d'aussi près qu'on veut sur W. Un raisonnement standard de passage à la limite à la Mittag-Leffler permet d'atteindre la nullité de la cohomologie sur $U=\bigcup_{j\in\mathbf{N}}V_j$ et le théorème de Runge pour la paire $W\subset U$ à partir du théorème de Runge sur les paires $W\cap V_j\subset V_{j+1}$, $V_{j+1}\subset V_{j+2},\ldots$, etc. □

3.7. Corollaire. *Soit $\mathcal{U}:=(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un recouvrement ouvert localement fini de X par des ouverts de Stein U_λ. Ce recouvrement est alors de Leray pour $p_{*(2)}\mathcal{F}$ et on a un isomorphisme naturel*

$$H^*_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}})\xrightarrow{\sim}H^*_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{F}}),$$

où $H^*_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}}):=H^*(\mathcal{U},p_{*(2)}\widetilde{\mathcal{F}})$ est la cohomologie de Čech de $p_{*(2)}\widetilde{\mathcal{F}}$ relative au recouvrement $\mathcal{U}$ de X.

3.8. Explicitons l'assertion de corollaire 3.7 : soit $N_q(\mathcal{U})$ le q-nerf du recouvrement $\mathcal{U}$, constitué des intersections non vides de $(q+1)$ des éléments de $\mathcal{U}$, et soit $C^q_{(2),\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}})$ le groupe des q-cochaînes à valeurs dans $\widetilde{\mathcal{F}}$, définies sur les ouverts $\widetilde{\mathcal{U}}_{(q)}=p^{-1}(\mathcal{U}_{(q)})$ et localement L^2 au dessus de $\mathcal{U}_{(q)}\in N_q(\mathcal{U})$, avec les applications de cobord

$$\delta_q: C^q_{(2),\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}})\longrightarrow C^{q+1}_{(2),\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}})$$

usuelles. Alors $H^*_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}})$ est la cohomologie du complexe ainsi défini. Les espaces $C^q_{(2),\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}})$ sont naturellement munis de la topologie de la convergence en norme L^2 au dessus des compacts p-simples contenus dans les $\mathcal{U}_{(q)}$ (on ne prend bien entendu en compte simultanément qu'un nombre fini de ces intersections), ce qui en fait des espaces de Fréchet. On munit $H^*_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}})$ de la topologie quotient correspondante (qui n'est pas nécessairement séparée).

3.9. Désignons par $B^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}})$ et $Z^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}})$ respectivement l'image de δ_{q-1} et le noyau de δ_q (avec $B^0_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}})=0$). On a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{H}^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}}) \longrightarrow H^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}}) \longrightarrow \overline{H}^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}}) \longrightarrow 0,$$

où $\overline{B}^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}})$ est l'adhérence dans $Z^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}})$ de $B^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}})$ et

$$\underline{H}^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}}) = \overline{B}^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}})/B^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}}), \quad \overline{H}^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}}) = Z^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}})/\overline{B}^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}}).$$

L'espace $\overline{H}^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}})$ est par définition un espace de Fréchet, mais $\underline{H}^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}})$ est muni de la topologie grossière et, s'il est non nul, la cohomologie L^2 n'est pas séparée. On va voir, cependant, que la topologie de $H^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}})$ est essentiellement indépendante du choix du recouvrement. Soient en effet $\mathcal{U}'$, $\mathcal{U}$ des recouvrements de Stein de X. On suppose $\mathcal{U}'$ plus fin que $\mathcal{U}$ et muni d'une application de raffinement ϱ vers $\mathcal{U}$. Alors, dans le diagramme commutatif associé ($q\geq 0$),

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \underline{H}^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}}) & \longrightarrow & H^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}}) & \longrightarrow & \overline{H}^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle \underline{\varrho}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \varrho}\big\downarrow & & {\scriptstyle \bar{\varrho}}\big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \underline{H}^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}}',\widetilde{\mathcal{F}}) & \longrightarrow & H^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}}',\widetilde{\mathcal{F}}) & \longrightarrow & \overline{H}^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}}',\widetilde{\mathcal{F}}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

les applications verticales ϱ, $\underline{\varrho}$, $\bar{\varrho}$ sont des isomorphismes topologiques (d'espaces de Fréchet en ce qui concerne $\bar{\varrho}$). En effet, si (pour simplifier) on désigne par (C,δ) et (C',δ') les complexes de Fréchet impliqués, l'isomorphisme de Leray implique que ϱ est un isomorphisme algébrique, et il est clair par ailleurs que l'application de restriction $\varrho\colon C\to C'$ est continue. On a alors une application surjective $\delta'\oplus r\colon C'\oplus Z\to Z'$ entre espaces de Fréchet. Le théorème de l'application ouverte montre que cette application est ouverte, et il en est donc de même pour l'application induite $\varrho\colon H=Z/\delta C\to H'=Z'/\delta' C'$. Ceci montre déjà que ϱ est un isomorphisme topologique. L'assertion pour $\underline{\varrho}$ et $\bar{\varrho}$ s'en déduit immédiatement, puisque $\underline{H}$ est la partie grossière et $\overline{H}$ le quotient séparé de la cohomologie. Ceci nous mène à la définition suivante.

3.10. *Définition.* L'espace de cohomologie $H^q_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{F}})$, $q\geq 0$, est muni d'une topologie naturelle pour laquelle, si $\underline{H}^q_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{F}})$ est l'adhérence de 0, alors

$$\overline{H}^q_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{F}})=H^q_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{F}})/\underline{H}^q_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{F}})$$

est un espace de Fréchet. On appellera $\overline{H}^q_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{F}})$ (resp. $\underline{H}^q_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{F}})$) la *cohomologie* L^2 *séparée* de X à valeurs dans $\widetilde{\mathcal{F}}$ (resp. le *noyau* de la cohomologie L^2 de X à valeurs dans $\widetilde{\mathcal{F}}$).

3.11. *Remarque.* Par construction, les objects $\underline{H}^q_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{F}})$ et $\overline{H}^q_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{F}})$ sont fonctoriels en $\mathcal{F}$ et X.

3.12. *Remarque.* Il résulte immédiatement de proposition 2.9 que si $\mathcal{F}$ est supporté par la sous-variété Y de X, alors $H^*_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{F}})\mapsto H^*_{(2)}(\widetilde{Y},\widetilde{\mathcal{F}})$ est un isomorphisme topologique.

3.13. *Remarque.* Si X est un espace compact, on peut choisir un recouvrement ouvert fini $\mathcal{U}=(U_j)_j$ par des ouverts de Stein p-simples, puis rétrécir un peu chacun des ouverts U_j en des ouverts $U''_j\Subset U'_j\Subset U_j$ tels que U'_j et U''_j soient de Runge dans U_j. Les morphismes de restriction donnent lieu à des flèches

$$C^q_{(2),\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\mathcal{F}})\longrightarrow C^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}}',\widetilde{\mathcal{F}})\longrightarrow C^q_{(2),\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathcal{U}}'',\widetilde{\mathcal{F}})$$

où les termes extrêmes sont des espaces de Fréchet et le terme central un espace de Hilbert (on prend sur ce terme la topologie L^2 globale sur $\mathcal{U}'$). En cohomologie, on un isomorphisme entre les termes extrêmes, ce qui prouve que la cohomologie du terme central se surjecte sur cette cohomologie. La cohomologie séparée $\overline{H}^q_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{F}})$ possède donc alors une topologie d'espace de Hilbert.

3.14. *Remarque.* Supposons maintenant que X soit une variété compacte lisse et que $\mathcal{F}$ soit un faisceau analytique localement libre sur X. Les arguments de [G] s'appliquent encore dans ce contexte et montrent que si $Z^{0,q}_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{F}})\subset C^{0,q}_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{F}})$ est le noyau du $\bar\partial$, alors $Z^{0,q}_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{F}})/(\overline{\mathrm{Im}\,\bar\partial})$ s'identifie à l'espace de Hilbert (par ellipticité de $\bar\partial$) des formes $\Delta_{\bar\partial}$-harmoniques de type $(0,q)$ et L^2 sur $\widetilde{X}$ à valeurs dans $\widetilde{\mathcal{F}}$. On voit, de plus, que $\mathcal{H}^{0,q}_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{F}})$ s'identifie canoniquement à la cohomologie réduite $\overline{H}^q_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{F}})$ définie en définition 3.10.

3.15. Corollaire. (Dualité de Serre) *Soit X une variété complexe compacte lisse, et $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent localement libre sur X. Soit $p\colon\widetilde{X}\to X$ un revêtement étale. Il existe une isométrie antilinéaire*

$$\sigma\colon\overline{H}^q_{(2)}(\widetilde{X},\Omega^r_{\widetilde{X}}\otimes\widetilde{\mathcal{F}})\longrightarrow\overline{H}^{n-q}_{(2)}(\widetilde{X},\Omega^{n-r}_{\widetilde{X}}\otimes\widetilde{\mathcal{F}}^*)$$

si n est la dimension (pure) de X.

3.16. Cas galoisien. Dans le cas particulier où le revêtement $p: \widetilde{X} \to X$ de la variété complexe compacte X est galoisien, de groupe Γ, on a une opération naturelle du groupe Γ sur tous les objets définis précédemment $\widetilde{\mathcal{F}}$, $p_{*(2)}\widetilde{\mathcal{F}}$, $C^q_{(2),\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mathcal{F}})$, $H^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mathcal{F}}), \dots$, et ce pour tout $q \geq 0$ et tout recouvrement de Stein p-simple $\mathcal{U}$. On a donc aussi une action de Γ sur les espaces de cohomologie $H^q_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}})$, $\underline{H}^q_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}})$, $\overline{H}^q_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}})$. Dans le cas où X est compacte, cette opération induit une action unitaire sur l'espace de Hilbert $C^q_{(2)}(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mathcal{F}})$.

3.17. Proposition. *Soit $p: \widetilde{X} \to X$ un revêtement galoisien de groupe Γ de la variété complexe compacte X ; soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X, et $\mathcal{U}$ un recouvrement de Stein ouvert, fini et p-simple de X. Cette action définit une action de Γ sur $H^*_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}})$ qui préserve chacune des semi-normes préhilbertiennes (équivalentes entre elles) dont cet espace peut être muni. En particulier, Γ agit sur $\underline{H}^*_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}})$ et $\overline{H}^*_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}})$, de manière unitaire sur ce dernier espace (qui est de Hilbert).*

4. Théorèmes d'annulation

4.0. Les nombreux résultats d'annulation accessibles par les techniques L^2 usuelles vont en général se transcrire mot pour mot pour donner des versions s'appliquant en cohomologie L^2. Nous présentons ici quelques énoncés parmi les plus fondamentaux.

4.1. Théorème de Kodaira–Serre L^2. *Soit X une variété projective lisse, et $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X. Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites ample sur X et $p: \widetilde{X} \to X$ un revêtement étale de X. Il existe $m_0 = m_0(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, indépendant du revêtement p, tel que $H^q_{(2)}(X, \widetilde{\mathcal{F}}(m)) = 0$ si $q > 0$ et $m \geq m_0$ (on pose ici comme d'habitude $\mathcal{F}(m) := \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^m$).*

Démonstration. Le faisceau $\mathcal{F}$ admet une résolution localement libre de longueur $0 \leq r \leq n = \dim_{\mathbf{C}}(X)$. Si $r = 0$, $\mathcal{F}$ est localement libre, et le résultat est conséquence directe de proposition 3.5 ci-dessus et de l'existence de solutions L^2 à l'équation : $\bar{\partial}\tilde{v} = \tilde{w}$, avec $\bar{\partial}\tilde{w} = 0$ et $\tilde{w}$ section L^2 de $\widetilde{\mathcal{F}}^{0,1}$ ([D], théorème 5.1).

Sinon, on procède à nouveau par récurrence sur r, supposant le résultat vrai pour $r - 1 \geq 0$. Dans ce cas, l'assertion résulte immédiatement de la suite exacte longue de cohomologie L^2 (théorème 3.2) associée à la suite exacte de faisceaux $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to \mathcal{F} \to 0$, où $\mathcal{H}$ est localement libre et où $\mathcal{G}$ admet une résolution localement libre de longueur $r - 1$. $\square$

4.2. *Exemple.* (Cet exemple a partiellement motivé la construction présentée ici.) Soit X une variété projective, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{L}$ des faisceaux analytiques cohérents sur X, avec $\mathcal{L}$ fibré en droites ample. Soit $p: \widetilde{X} \to X$ un revêtement étale de X et Y un sous-schéma (non nécessairement réduit de X). Il existe $m_0 := m_0(\mathcal{F}, \mathcal{L}, X, Y)$ tel que, pour $m \geq m_0$ le morphisme de restriction naturel

$$H^0_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}} \otimes \widetilde{\mathcal{L}}^m) \longrightarrow H^0_{(2)}(\widetilde{Y}, \widetilde{\mathcal{F}}|_Y \otimes \widetilde{\mathcal{L}}^m|_Y)$$

soit surjectif. On utilise en effet la suite-exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Y \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}|_Y \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{F}|_Y = \mathcal{F}/\mathcal{I}_Y\mathcal{F}$ est la restriction de $\mathcal{F}$ au sous-schéma Y. Le théorème de Kodaira–Serre implique l'annulation du groupe

$$H^1_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{I}}_{\widetilde{Y}} \widetilde{\mathcal{F}} \otimes \widetilde{\mathcal{L}}^m)$$

pour $m \geq m_0$ assez grand, d'où le résultat. Ceci s'applique entre autres au cas où Y est le schéma ponctuel associé à l'anneau $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_a^{k+1}$ des jets d'ordre k de fonctions en un point a de X. On voit alors que les k-jets de $p_{*(2)}(\widetilde{\mathcal{F}} \otimes \widetilde{\mathcal{L}}^m)$ sont engendrés pour $m \geq m_0$ assez grand par les sections globales L^2 du faisceau $\widetilde{\mathcal{F}} \otimes \widetilde{\mathcal{L}}^m$ sur $\widetilde{X}$ (il faut voir que m_0 peut être choisi indépendant de a, mais c'est immédiat en contrôlant un tant soit peu les résolutions libres globales des anneaux $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_a^{k+1}$). □

Les résultats suivants sont des transcriptions immédiates des résultats L^2 classiques pour les variétés kählériennes complètes ([AV] et [D]), et nous les énonçons donc sans commentaires (le corollaire 4.5 étant par exemple déjà mentionné dans [K], corollaire 11.4).

4.3. Théorème de Akizuki–Kodaira–Nakano L^2. *Soit X une variété projective lisse de dimension complexe n, $p: \widetilde{X} \to X$ un revêtement étale de X et $\mathcal{L}$ un fibré en droites ample sur X. Alors on a*

$$H^q_{(2)}(\widetilde{X}, \Omega^r_{\widetilde{X}} \otimes \widetilde{\mathcal{L}}) = 0 \quad \text{si } q + r \geq n + 1.$$

4.4. Théorème de Nadel L^2. *Soit X une variété compacte (projective ou de Moishezon), lisse, $p: \widetilde{X} \to X$ un revêtement étale de X et $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur X. On suppose que $\mathcal{L}$ possède une métrique hermitienne singulière h dont la $(1,1)$-forme de courbure $\Theta_h(\mathcal{L})$ est positive au sens des courants, minorée par une $(1,1)$ forme de classe C^∞ définie positive. Alors on a*

$$H^q_{(2)}(\widetilde{X}, K_{\widetilde{X}} \otimes \widetilde{\mathcal{L}} \otimes \widetilde{\mathcal{I}}(h)) = 0 \quad \text{pour tout } q \geq 1,$$

où $\mathcal{I}(h) \subset \mathcal{O}_X$ désigne l'idéal multiplicateur des germes de fonctions holomorphes f telles que $\int |f|^2 e^{-\varphi} < +\infty$ ($e^{-\varphi}$ désignant le poids qui représente localement la métrique h).

4.5. Corollaire. (Théorème de Kawamata–Viehweg L^2) *Si X est une variété de Moishezon lisse et $p: \widetilde{X} \to X$ un revêtement étale de X. On suppose donné un fibré en droites $\mathcal{L}$ numériquement équivalent à la somme d'un $\mathbf{Q}$-diviseur D nef (numériquement effectif), et d'un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif E.*

(i) *Si D est gros, alors $H^q_{(2)}(\widetilde{X}, K_{\widetilde{X}} \otimes \widetilde{\mathcal{L}} \otimes \widetilde{\mathcal{I}}(E)) = 0$ pour tout $q \geq 1$.*

(ii) *Si D est de dimension numérique $\nu \leq n = \dim X$, l'annulation a lieu pour $q > n - \nu$.*

(iii) *Si D est de dimension numérique $\nu \leq n$ et si l'idéal $\mathcal{I}(E)$ est un faisceau inversible (i.e. l'idéal d'un diviseur effectif), la cohomologie séparée $\overline{H}^q_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{L}}^{-1} \otimes \widetilde{\mathcal{I}}(E)^{-1})$ est nulle pour tout $q < \nu$.*

Démonstration. Rappelons que $\mathcal{I}(E)$ est le faisceau associé à $\varphi = (\log |g|)/k$, où g est un générateur de $\mathcal{O}(-kE)$. La preuve du corollaire 4.5 consiste en une réduction au théorème 4.4, à peu près identique à celle effectuée dans le cas classique.

(i) Si D est ample, le résultat résulte directement du théorème 4.4, en munissant $\mathcal{O}(D)$ d'une métrique lisse à courbure positive et $\mathcal{O}(E)$ de la métrique associée au poids $e^{-\varphi}$ (dont la courbure est le courant d'intégration $[E]$). En général, si D est seulement nef et gros, on peut écrire $D = D' + F$ avec D' ample et F un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif aussi petit que l'on veut. On peut en particulier supposer que $\mathcal{I}(E+F) = \mathcal{I}(E)$.

(ii) On se ramène au cas où la dimension numérique est maximale par un argument classique de sections hyperplanes et un raisonnement par récurrence sur la dimension. De façon précise, on choisit un diviseur lisse Y très ample dans X et on considère la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow K_X \otimes \mathcal{L} \longrightarrow K_X \otimes \mathcal{O}(Y) \otimes \mathcal{L} \longrightarrow K_Y \otimes \mathcal{L}|_Y \longrightarrow 0.$$

L'annulation de la cohomologie du terme central est obtenue par Kodaira–Serre en prenant Y assez grand, tandis que l'annulation de la cohomologie en degré $q-1$ du terme de droite résulte de l'hypothèse de récurrence.

(iii) C'est un cas particulier de (ii), si on utilise la dualité de Serre. Il serait intéressant de savoir si la cohomologie non séparée $H^q_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{L}}^{-1} \otimes (\widetilde{\mathcal{I}}(E))^{-1})$ est nulle elle aussi. La difficulté est que c'est une cohomologie « duale » d'une cohomologie L^2, qui ne s'obtient pas directement par application d'estimations L^2 globales. □

5. Théorème de finitude et théorème de l'indice

5.0. Notre objectif est ici d'étendre au cas de faisceaux analytiques cohérents quelconques le théorème de l'indice L^2 de Atiyah [A]. La preuve en est purement formelle à partir des résultats des sections précédentes.

5.1. Théorème. *Soit X un espace analytique compact et $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X. Soit $p: \widetilde{X} \to X$ un revêtement étale galoisien de groupe Γ. Pour tout $q \geq 0$, le groupe $H^q_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}})$ est un Γ-module L^2 de présentation finie. En particulier, la Γ-dimension de $\overline{H}^q_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}})$, notée $h^q_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}})$ est (un nombre réel) fini. De plus, la caractéristique d'Euler L^2.*

$$\chi_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}}) := \sum_{q=0}^{n} (-1)^q h^q_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}})$$

sur $\widetilde{X}$ est égale à la caractéristique d'Euler ordinaire

$$\chi_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}}) = \chi(X, \mathcal{F}) := \sum_{q=0}^{n} (-1)^q h^q(X, \mathcal{F}).$$

(Voir l'appendice pour les notions hilbertiennes requises, en particulier sections 6.3 et 6.4.)

Démonstration. Si X est lisse et $\mathcal{F}$ localement libre, c'est le théorème de l'indice L^2 d'Atiyah [A]. En général, on raisonne par récurrence sur la dimension $n = \dim X$, en utilisant un dévissage de $\mathcal{F}$ et une résolution des singularités. Supposons le théorème déjà démontré en dimension $n-1$: les résultats sont triviaux en dimension 0, car si $X = \{p\}$, on a

$$\chi(X, \mathcal{F}) = h^0(\{p\}, \mathcal{F}) = \dim \mathcal{F}_p$$

tandis que $H^0_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}}) = l^2(\Gamma) \otimes \mathcal{F}_p$, d'où $\chi_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}}) = \dim \mathcal{F}_p$.

En général, si X n'est pas réduit, on peut considérer sa réduction X_{red} et la filtration de $\mathcal{F}$ par les $\mathcal{N}^p\mathcal{F}$, où $\mathcal{N}$ désigne l'idéal des éléments nilpotents de $\mathcal{O}_X$. Le gradué $\mathcal{N}^p\mathcal{F}/\mathcal{N}^{p+1}\mathcal{F}$ de cette filtration est constitué de faisceaux cohérents sur $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}}}$. Par additivité de la caractéristique d'Euler (ordinaire ou L^2, grâce à théorème 3.2), on est ramené au cas où X est réduit. Si X n'est pas lisse, on utilise le théorème de Hironaka pour trouver une désingularisation $f: Y \to X$. Soit $p': \widetilde{Y}$ le revêtement image réciproque de $p: \widetilde{X} \to X$ par f et $\mathcal{G} = f^*\mathcal{F}$, qui est un faisceau cohérent sur Y. On a un morphisme naturel injectif $\mathcal{F} \to f_*\mathcal{G}$, et le faisceau quotient $f_*\mathcal{G}/\mathcal{F}$ est à support dans le lieu singulier X_{sing}. D'après l'hypothèse de récurrence, les résultats sont vrais pour le faisceau quotient $f_*\mathcal{G}/\mathcal{F}$, et on est donc ramené à traiter le cas du faisceau image directe $f_*\mathcal{G}$. On utilise alors les suites spectrales de Leray

$$\begin{aligned} H^*(X, R^*f_*\mathcal{G}) &\implies H^*(Y, \mathcal{G}), \\ H^*_{(2)}(\widetilde{X}, R^*\tilde{f}_{*(2)}\widetilde{\mathcal{G}}) &\implies H^*_{(2)}(\widetilde{Y}, \widetilde{\mathcal{G}}) \end{aligned}$$

(l'existence de la deuxième suite spectrale est une conséquence du théorème de Leray et de la proposition 3.3). Supposons que le résultat soit déjà démontré dans le cas d'une variété lisse. Alors $\chi(Y,\mathcal{G})=\chi_{(2)}(\widetilde{Y},\widetilde{\mathcal{G}})$ puisque Y est lisse, et de même pour $q>0$ on a $\chi(X,R^q f_*\mathcal{G})=\chi_{(2)}(\widetilde{X},R^q\widetilde{f}_{*(2)}\widetilde{\mathcal{G}})$ pour $q>0$ par hypothèse de récurrence sur la dimension (les faisceaux $R^q f_*\mathcal{G}$, $q>0$, sont supportés par X_{sing} qui est de dimension $\le n-1$). Comme il y a préservation de la caractéristique d'Euler dans les différents niveaux d'une suite spectrale, il y a équivalence à prouver le résultat pour la paire $(X,R^0 f_*\mathcal{G})$ ou pour la paire $(Y,\mathcal{G})$, ce qui fait qu'on est ramené au cas où l'espace ambiant X est lisse de dimension n.

Dans ce cas, soit $\mathcal{F}_{\text{tors}}$ la partie de torsion de $\mathcal{F}$. Cette partie est à support en codimension $n-1$, donc l'hypothèse de récurrence s'y applique. La suite exacte

$$0\longrightarrow\mathcal{F}_{\text{tors}}\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{F}/\mathcal{F}_{\text{tors}}\longrightarrow 0$$

et l'additivité de la caractéristique d'Euler montre que l'on peut supposer $\mathcal{F}$ sans torsion. En appliquant de nouveau le théorème de Hironaka, il existe une modification analytique propre $f\colon Y\to X$, tel que $\mathcal{G}=f^*\mathcal{F}$ soit localement libre sur Y. Des arguments identiques à ceux qui précèdent ramènent la preuve du cas de la paire $(X,\mathcal{F})$ au cas de la paire $(Y,\mathcal{G})$. On conclut en appliquant cette fois le théorème de l'indice L^2 de Atiyah [A] à $(Y,\mathcal{G})$. $\square$

6. Appendice : présentation hilbertienne et Γ-dimension

6.0. *Définition.* Soit H un espace vectoriel complexe. Une *présentation hilbertienne* de H est la donnée d'une application linéaire continue $\delta\colon C\to Z$ entre deux espaces de Hilbert et d'un isomorphisme (algébrique) $Z/\delta C\xrightarrow{\sim}H$. On note δC (resp. $\overline{\delta C}$) l'image dans Z de C (resp. son adhérence).

Associée à une telle présentation est définie une suite exacte :

$$0\longrightarrow\underline{H}=:\overline{\delta C}/\delta C\longrightarrow H=:Z/\delta C\longrightarrow\overline{H}:=Z/\overline{\delta C}\longrightarrow 0.$$

On appelle $\underline{H}$ (resp. $\overline{H}$) le *noyau* (resp. la *réduction*) de H relative à cette présentation hilbertienne. (Ces notions ne dépendent que de la classe d'équivalence des espaces de Hilbert.)

Une application entre deux présentations hilbertiennes $\delta\colon C\to Z$ et $\delta'\colon C'\to Z'$ est un diagramme commutatif $s\colon C\to C'$ et $r\colon Z\to Z'$ d'applications linéaires continues telles que $r\delta=\delta' s$. Une telle application induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \underline{H} & \longrightarrow & H & \longrightarrow & \overline{H} & \longrightarrow & 0\\ & & \downarrow{\scriptstyle \underline{r}} & & \downarrow{\scriptstyle [r]} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{r}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \underline{H}' & \longrightarrow & H' & \longrightarrow & \overline{H}' & \longrightarrow & 0. \end{array} \tag{6.0'}$$

Deux présentations hilbertiennes sont dites *compatibles* s'il existe une application entre elles.

6.1. Proposition. *La situation étant celle décrite en définition* 6.0, *alors* :

(i) *Si* $[r]$ *est surjective,* $\overline{r}$ *est surjective. Si* $[r]$ *est injective,* $\underline{r}$ *est injective.*

(ii) *Si* $[r]$ *est bijective,* $\overline{r}$ *et* $\underline{r}$ *sont bijectives. Donc* $\overline{r}$ *est une équivalence d'espaces de Hilbert.* (*En particulier, deux présentations hilbertiennes de* H *fournissent le même noyau et la même réduction de* H.)

Démonstration. La première assertion est évidente. Pour établir la seconde et montrer que $\overline{r}\colon Z/\overline{\delta C} \to Z'/\overline{\delta' C'}$ est injective, if faut vérifier la propriété suivante : si $r(z) \in \overline{\delta' C'}$, alors $z \in \overline{\delta C}$. Remarquons que, puisque $[r]$ est surjective, l'application

$$-\delta' \oplus r\colon C' \oplus Z \longrightarrow Z'$$

est surjective. Soit K son noyau. Alors $-\delta' \oplus r$ admet un relèvement continu $\varphi\colon Z \to K^{\perp}$ qui est un isomorphisme d'espaces de Hilbert (où $K^{\perp}$ est l'orthogonal de K)

$$K = \{(c', \xi) \mid r(\xi) = \delta'(c')\}.$$

Soit alors $z + \overline{\delta C} \in \mathrm{Ker}(\overline{r})$; on a donc $r(z) = z' \in \overline{\delta' C'}$, et $z' = \lim \delta'(c'_n)$. Soit $(\gamma'_n, z_n) := (c'_n, z) - \varphi(z' - \delta'(c'_n)) \in K$, on a $\varphi(z' - \delta'(c'_n)) \to 0$ et $z_n \to z$, en particulier. Or,

$$-\delta'(\gamma'_n) + r(z_n) = (-\delta' \oplus r)(\gamma'_n, z_n) = -\delta'(c'_n) + r(z) - (z' - \delta'(c'_n)) = r(z) - z' = 0,$$

donc $r(z_n) = \delta' \gamma'_n$, et $z_n \in \delta C$ par injectivité de $[r]$. On a donc bien $z \in \overline{\delta C}$ comme annoncé. □

6.2. Γ-présentation. Soit Γ un groupe discret agissant sur l'espace vectoriel complexe H. Une Γ-présentation hilbertienne $\delta\colon C \to Z$ de H est une présentation hilbertienne telle que Γ agisse de manière unitaire et équivariante sur C et Z, l'action sur le quotient $Z/\delta C$ étant celle sur H. Une telle présentation munit $\underline{H}$ et $\overline{H}$ d'une action de Γ, qui est unitaire sur $\overline{H}$.

6.3. Γ-dimension. Soit V un espace de Hilbert muni d'une action unitaire de Γ. On dit que V est de Γ-dimension finie s'il existe un sous-ensemble fini $\{v_1, \ldots, v_m\}$ de V tel que le sous-espace vectoriel engendré par les $(\gamma \cdot v_i)$, $\gamma \in \Gamma$, $1 \le i \le m$, soit dense dans V. De manière équivalente, V est un quotient ou un sous-espace de $l^2(\Gamma) \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^m$, ceci de manière compatible avec les actions naturelles de Γ (triviale sur $\mathbf{C}^m$).

Dans cette situation, on définit la Γ-dimension $\dim_\Gamma V$, qui est un nombre réel (inférieur ou égal à m, ici, et indépendant du choix des $(v_i)_{i=1}^m$). Voir [P] pour cette notion. Les propriétés fondamentales (utilisées ici) de cette notion sont les suivantes :

(6.3.1) $\dim_\Gamma V \geq 0$, avec égalité si et seulement si $V=0$;

(6.3.2) si V est isomorphe à un sous-espace dense de W, alors

$$\dim_\Gamma V = \dim_\Gamma W \ ;$$

(6.3.3) si $V=W \oplus W'$ (somme directe orthogonale), alors

$$\dim_\Gamma V = \dim_\Gamma W + \dim_\Gamma W' \ ;$$

(6.3.4) $\dim_\Gamma l^2(\Gamma)=1$;

(6.3.5) si Γ est un groupe fini de cardinal $|\Gamma|$, alors $\dim_\Gamma V = |\Gamma|^{-1} \dim_{\mathbf{C}} V$.

6.4. Γ-présentation finie. Soit $\gamma : C \to Z$ une Γ-présentation de l'espace vectoriel complexe H, muni d'une Γ-action. On dit que $\delta : C \to Z$ est une Γ-présentation finie de H si C et Z sont de Γ-dimensions finies. Alors $\overline{\delta C}$ est de Γ-dimension finie au plus égale à celle de C, et $\overline{H}$ est aussi de Γ-dimension finie. En fait, $\dim_\Gamma \overline{H} = \dim_\Gamma Z - \dim_\Gamma \overline{\delta C}$. On pose alors $\dim_\Gamma H = \dim_\Gamma \overline{H}$.

Remarquons que cette définition peut être donnée même si C n'est pas supposé être de Γ-dimension finie.

Bibliographie

[AG] Andreotti, A. et Grauert, H., Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), 193–259.

[AV] Andreotti, A. et Vesentini, E., Carleman estimates for the Laplace–Beltrami equation in complex manifolds, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **25** (1965), 81–130.

[A] Atiyah, M., Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras, dans *Elliptic Operators, Discrete Groups and von Neumann Algebras. Colloque « Analyse et Topologie » en l'honneur de Henri Cartan (Orsay, 1974)*, Astérisque **32–33**, p. 43–72, Soc. Math. France, Paris, 1976.

[C] Campana, F., Fundamental group and positivity of cotangent bundles of compact Kähler manifolds, *J. Algebraic Geom.* **4** (1995), 487–502.

[D] Demailly, J.-P., Estimations L^2 pour l'opérateur $\bar\partial$ d'un fibré vectoriel hermitien semi-positif, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **15** (1982), 457–511.

[E1] Eyssidieux, P., Théorie de l'adjonction L^2 sur le revêtement universel, Preprint, 1997.

[E2] Eyssidieux, P., Systèmes linéaires adjoints L^2, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **49** (1999), *vi, ix–x*, 141–176.

[E3] EYSSIDIEUX, P., Invariants de von Neumann des faisceaux analytiques cohérents, *Math. Ann.* **317** (2000), 527–566.

[G] GROMOV, M., Kähler hyperbolicity and L^2-Hodge theory, *J. Differential Geom.* **33** (1991), 263–291.

[H] HÖRMANDER, L., *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables.* 3rd ed., North-Holland Math. Library **7**, Elsevier, Amsterdam, 1990.

[JZ] JOST, J. et ZUO, K., Vanishing theorems for L^2-cohomology on infinite coverings of compact Kähler manifolds and applications in algebraic geometry, *Comm. Anal. Geom.* **8** (2000), 1–30.

[K] KOLLÁR, J., *Shafarevitch Maps and Automorphic Forms*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1995.

[NR] NAPIER, T. et RAMACHANDRAN, M., The $L^2\bar{\partial}$-method, weak Lefschetz theorems, and the topology of Kähler manifolds, *J. Amer. Math. Soc.* **11** (1998), 375–396.

[O] OHSAWA, T., A reduction theorem for cohomology groups of very strongly q-convex Kähler manifolds, *Invent. Math.* **63** (1981), 335–354 ; Invent. Math. **66** (1982) 391–393.

[P] PANSU, P., Introduction to L^2 Betti numbers, dans *Riemannian Geometry* (*Waterloo, Ont., 1993*) (Lovrić, M., Maung, M.-O. et Wang, M. Y.-K., éds), Fields Inst. Monogr. **4**, p. 53–86, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1996.

[W] WEIL, A., *Introduction à l'étude des variétés kählériennes*, Hermann, Paris, 1958.

Reçu le 4 avril 2000

Frédéric Campana
Université de Nancy I
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
BP 239
FR-54506 Vandoeuvre les Nancy
France
email: campana@iecn.u-nancy.fr

Jean-Pierre Demailly
Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582 du CNRS
BP 74, 100 rue des Maths
FR-38402 Saint-Martin d'Hères
France
email: demailly@ujf-grenoble.fr