Ark. Mat., **42** (2004), 61–85

Dynamique des applications polynomiales semi-régulières

Tien-Cuong Dinh et Nessim Sibony

Abstract. For any proper polynomial map $f: \mathbf{C}^k \to \mathbf{C}^k$ define the function α as

$$\alpha(z) := \limsup_{n\to\infty} \frac{\log^+ \log^+ |f^n(z)|}{n}, \quad \text{where } \log^+ := \max\{\log, 0\}.$$

Let $f=(P_1, ..., P_k)$ be a proper polynomial map. We define a notion of s-regularity using the extension of f to $\mathbf{P}^k$. When f is (maximally) regular we show that the function α is lower semicontinuous and takes only finitely many values: 0 and $d_1, ..., d_k$, where $d_i := \deg P_i$. We then describe dynamically the sets $\{\alpha \leq d_i\}$. We give a concrete description of regular maps. If $d_i > 1$, this allows us to construct the equilibrium measure μ associated with f as a generalized intersection of positive currents. We then give an estimate of the Hausdorff dimension of μ. We extend the approach to the larger class of (π, s)-regular maps. This gives an understanding of the largest values of α. The results can be applied to construct dynamically interesting measures for automorphisms.

1. Introduction

Soit $f=(P_1, ..., P_k)$ une application polynomiale propre de $\mathbf{C}^k$ dans $\mathbf{C}^k$. Quitte à conjuguer f par une permutation des coordonnées on peut supposer que

$$\deg P_1 \geq ... \geq \deg P_k.$$

Définissons des entiers l_i vérifiant $1=l_0<l_1<...<l_m=k+1$ tels que les composantes de

$$f_{(i)} := P_{(i)} = (P_{l_{i-1}}, ..., P_{l_i-1})$$

soient de même degré d_i avec $d_1>d_2>...>d_m$. Notons $P^+_{(i)}$ la partie homogène de plus haut degré de $P_{(i)}$. Notons également f l'extension de f comme application méromorphe à $\mathbf{P}^k$ dont $[z_1:...:z_k:t]$ sont les coordonnées homogènes.

Pour tout $z\in\mathbf{C}^k$ définissons la constante $\alpha(z)\geq 0$ par

$$\alpha(z) := \limsup_{n\to\infty} \frac{\log^+ \log^+ |f^n(z)|}{n}$$

où $\log^+ := \max\{\log, 0\}$.

En général, α prend une infinité de valeurs. Lorsque $\alpha(z)>1$, $\alpha(z)$ représente la vitesse d'échappement de $f^n(z)$ vers l'infini. Lorsque f se prolonge holomorphiquement à l'infini dans $\mathbf{P}^k$, auquel cas $m=1$ et $\{z:P^+_{(1)}(z)=0\}$ est réduit à l'origine, la fonction α ne prend que deux valeurs 0 et d_1. Pour les applications régulières que nous introduisons, nous montrons que α est s.c.i. et ne prend que les valeurs $d_1,\dots,d_m$, 0.

On introduit des fonctions de Green partielles sur les fermés $\mathcal{K}_i:=\{\alpha\leq d_i\}$. On pose

$$G_i(z):=\lim_{n\to\infty}\frac{\log^+|f^n(z)|}{d_i^n}.$$

On montre que si $i<m$ ou si $i=m$ et $d_m>1$, la fonction G_i est continue sur $\mathcal{K}_i$. Lorsque $d_m>1$, on obtient la mesure d'équilibre μ comme produit d'intersection généralisé de courants positifs définis à l'aide des fonctions G_i. L'étude des fonctions G_i permet d'obtenir une estimation de la dimension de Hausdorff de μ.

Lorsque f se prolonge holomorphiquement à l'infini et $d_1>1$ on a $m=1$. La fonction $G=\lim_{n\to\infty}d_1^{-n}\log^+|f^n|$ est définie partout et $\mu=(dd^cG)^k$.

Nous renvoyons en particulier à [4], [6], [9], [19], [14] pour divers aspects de la dynamique de ces applications. Lorsque f est régulière et $d_m>1$, f est à allure polynomiale au sens de [6] et la mesure μ que nous construisons ici est la même que dans [6] (*voir* le paragraphe 4).

Nous nous intéressons dans cet article à des classes plus générales que les applications régulières à savoir les applications s-régulières et (π,s)-régulières. Pour décrire ces classes introduisons quelques notations,

$$\begin{aligned}
&z_{(i)}:=(z_{l_{i-1}},\dots,z_{l_i-1}), && z^d_{(i)}:=(z^d_{l_{i-1}},\dots,z^d_{l_i-1})\\
&z_{(<i)}:=(z_{(1)},\dots,z_{(i-1)}), && z_{(\leq i)}:=(z_{(1)},\dots,z_{(i)})\\
&z_{(>i)}:=(z_{(i+1)},\dots,z_{(m)}), && z_{(\geq i)}:=(z_{(i)},\dots,z_{(m)})\\
&|z|_{(i)}:=|z_{(i)}| \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

On dira que g et h sont *comparables* quand $z\to X$ et on notera $g(z)\sim h(z)$ s'il existe des constantes $0<c<c'$ telles que $cg(z)\leq h(z)\leq c'g(z)$ pour z suffisamment proche de X. On dira que g et h sont *équivalents* quand $z\to X$ et on note $g(z)\simeq h(z)$ si $g(z)/h(z)$ tend vers 1 quand $z\to X$.

On identifie $\mathbf{C}^k$ à $\mathbf{P}^k\setminus\{[z:0]\}$ et pour toute application polynomiale Q: $\mathbf{C}^k\to\mathbf{C}^n$, $\{Q=0\}$ désigne le sous ensemble algébrique de $\mathbf{P}^k$ adhérence de $Q^{-1}(0)$.

Posons $I_0:=\{[z:0]\}$ et $X_0:=\emptyset$. Pour tout $1\leq i\leq m$, posons

$$I_i:=I_{i-1}\cap\{z:P^+_{(i)}(z)=0\} \quad \text{et} \quad X_i:=I_{i-1}\cap\{z:z_{(>i)}=0\}.$$

On dira que f est *s-régulier* si $I_i \cap X_i = \emptyset$ pour tout $1 \leq i \leq s$ et que f est *régulier* s'il est m-régulier. Si f est s-régulier, d'après le théorème de Bézout, on a nécessairement $\dim X_i = l_i - l_{i-1} - 1$ et $\dim I_i = k - l_i$ pour tout $1 \leq i \leq s$. L'ensemble X_i apparaît comme l'image de $I_{i-1} \setminus I_i$ par une restriction convenable de f à I_{i-1}. L'ensemble I_i apparaît comme l'ensemble d'indétermination de cette restriction de f à I_{i-1}.

Si f est 1-régulier, on a $I_1 \cap X_1 = \emptyset$. En particulier, f est *algébriquement stable* [9], [19], c.-à-d. qu'aucune hypersurface n'est envoyée par un itéré de f, dans I_1. Il en résulte que le degré algébrique de f^n est égal à d_1^n. On peut alors définir la *fonction de Green* G_1 par

$$G_1(z) := \lim_{n \to \infty} \frac{\log^+ |f^n(z)|}{d_1^n}.$$

C'est une fonction plurisousharmonique (p.s.h.) sur $\mathbf{C}^k$. Elle définit un courant positif fermé $T_1 := dd^c G_1$ qui se prolonge à $\mathbf{P}^k$ car $G_1(z) - \log^+ |z|$ est bornée supérieurement. D'après le théorème de Chern–Levine–Nirenberg (proposition 5.3), ce courant ne charge pas les ensembles pluripolaires de $\mathbf{P}^k \setminus I_1$ car il admet localement un potentiel borné en tout point de $\mathbf{P}^k \setminus I_1$. Il ne peut pas non plus charger I_1 car I_1 est de codimension au moins 2 dans $\mathbf{P}^k$.

De façon générale, on pose $G_0 := 0$, $\mathcal{K}_0 = \mathbf{C}^k$ et lorsque les expressions suivantes ont un sens, on pose

$$G_{i,n}(z) := \frac{\log^+ |f^n(z)|}{d_i^n} \quad \text{et} \quad G_i(z) := \lim_{n \to \infty} G_{i,n}(z).$$

On définit

$$U_i := \{ z \in \mathbf{C}^k : f^n(z) \text{ tend vers } X_i \} \quad \text{et} \quad \mathcal{K}_i := \mathcal{K}_{i-1} \setminus U_i$$

pour tout $1 \leq i \leq m$.

Si f est s-régulier et $1 \leq i \leq s$, nous montrons que pour $z \in U_i$, $\alpha(z) = d_i$ et on précise la dynamique de f dans U_i et dans son complémentaire. Précisons cela.

Si f est 1-régulier, U_1 est le bassin de X_1. On vérifiera que U_1, $\mathcal{K}_1$ sont invariants par f et f^{-1}, $\overline{\mathcal{K}}_1 \subset \mathcal{K}_1 \cup I_1$, $X_1 \cap I_1 = \emptyset$ et $\dim I_1 = k - l_1$ où I_1 est l'ensemble d'indétermination de f. La fonction de Green G_1 précise l'échappement vers l'infini. On montrera que G_1 est continue, positive, nulle exactement sur $\mathcal{K}_1$ et à croissance logarithmique à l'infini. Elle est de plus invariante par f : $G_1 \circ f = d_1 G_1$. Pour tout $1 \leq j \leq l_1 - 1$, le courant $T_j := (dd^c G_1)^j$ est positif, fermé, de bidegré (j, j), invariant par f et ne charge pas les ensembles pluripolaires. Le courant $T_{l_1 - 1}$ est porté par $\overline{\mathcal{K}}_1$.

Il s'agit maintenant d'analyser la dynamique de la restriction de f à $\mathcal{K}_1$. Supposons que f soit 2-régulier. Le sous ensemble analytique X_2 de I_1 est attirant ;

il est de dimension l_2-l_1-1. Si z appartient à un petit voisinage V_2 de X_2 dans $\mathcal{K}_1 \cup I_1$, on a

$$c^{-1}|z|^{d_2} \leq |f(z)| \leq c|z|^{d_2}$$

où $c>0$ est une constante. Le bassin U_2 de X_2 est égal à $\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(V_2)$; son complémentaire $\mathcal{K}_2$ vérifie $\bar{\mathcal{K}}_2 \subset \mathcal{K}_2 \cup I_2$. Rappelons que $I_2 \subset I_1$ est un sous-ensemble analytique de dimension $k-l_2$ vérifiant $X_2 \cap I_2 = \emptyset$. La deuxième fonction de Green $G_2(z)$ est finie et continue, positive sur $\mathcal{K}_1$, elle est égale à $+\infty$ sur U_1, nulle exactement sur $\mathcal{K}_2$. Sur $\mathcal{K}_1$, elle a une croissance logarithmique à l'infini. On a la relation invariante $G_2 \circ f = d_2 G_2$. Pour tout $l_1 \leq j \leq l_2-1$, le courant $T_j := (\mathrm{dd^c} G_2)^{j-l_1+1} \wedge T_{l_1-1}$ est positif, fermé, de bidegré (j,j), invariant par f et ne charge pas les ensembles pluripolaires. Le courant T_{l_2-1} est porté par $\bar{\mathcal{K}}_2$.

Suivant l'ordre s de la régularité, la construction peut se poursuivre. Lorsque $s=m$, on trouve les applications régulières. Au paragraphe 2, nous explicitons le cas des applications s-régulières. Au paragraphe 3, nous étendons la théorie aux applications (π, s)-régulières et nous donnons une estimation de la dimension de Hausdorff de μ. Au paragraphe 4, nous établissons d'autres propriétés dynamiques des applications régulières et π-régulières.

Observons que lorsqu'on fixe $d_1 > d_2 > \ldots > d_m$, dans l'espace de paramètres, les familles d'applications régulières et semi-régulières sont des ouverts Zariski denses.

Nous avons rassemblé dans un appendice les propriétés des fonctions p.s.h. par rapport à un courant positif fermé, que nous utilisons.

Dans [13], on trouve déjà la définition de fonctions de Green partielles pour certains automorphismes de $\mathbf{C}^k$ et pour des endomorphismes de $\mathbf{C}^2$ dans [8]. On trouve également dans [13], [12] une notion de faible régularité voisine de la 1-régularité. Dans [13], on dit qu'une application est faiblement régulière si $I_1 \cap f(\{[z:0]\} \setminus I_1) = \emptyset$. Donc une application 1-régulière est en particulier faiblement régulière. D'autres auteurs appellent régulières les applications qui se prolongent en endomorphismes holomorphes de $\mathbf{P}^k$.

L'intérêt de notre approche ici est que nous déduisons les estimations nécessaires à la construction des fonctions de Green partielles d'hypothèses géométriques faciles à vérifier. Comme pour le cas des automorphismes polynomiaux de $\mathbf{C}^2$, il faut d'abord choisir de « bonnes coordonnées » avant de commencer l'étude, en l'occurence des coordonnées telles que, $\deg P_1 \geq \deg P_2 \geq \ldots \geq \deg P_k$. Nous ne faisons des hypothèses que sur le comportement de f près de l'hyperplan à l'infini. Nous donnons en particulier (proposition 3.1) une caractérisation des applications f (π, s)-régulières de $\mathbf{C}^2$ à l'aide des polygônes de Newton des composantes de f. Notre construction permet d'obtenir des mesures invariantes intéressantes dans le cas des automorphismes polynomiaux (remarque 3.9). Notons aussi qu'il est dans la nature des choses de devoir se limiter à des classes d'applications. Il existe en effet des applications algébriquement stables pour lesquelles les vitesses de convergence à l'infini ont la puissance du continu. Ce problème sera examiné dans un prochain travail avec R. Dujardin.

2. Endomorphismes réguliers

Dans la suite, notons d_t le degré topologique de f, c.-à-d. le nombre de préimages d'un point $z\in\mathbf{C}^k$, comptées avec multiplicité. Le degré topologique ne dépend pas du point z. Notons $\mathcal{K}$ l'ensemble des points d'orbite bornée. *L'exposant de Lojasiewicz* de f^n sera noté λ_n. C'est la meilleure constante positive vérifiant $|f^n(z)|\geq c|z|^{\lambda_n}$ pour z assez grand où $c>0$ est une constante. Cette constante λ_n existe toujours [18]. La suite $(\lambda_n^{1/n})$ croît vers une constante λ_∞ qu'on appelle *l'exposant de Lojasiewicz asymptotique* de f. On a le théorème suivant.

Théorème 2.1. *Soit $f\colon\mathbf{C}^k\to\mathbf{C}^k$ un endomorphisme polynomial propre s-régulier. On suppose que $1\leq s\leq m-1$ ou bien que $s=m$ et $d_m\geq 2$. Alors pour tout $1\leq i\leq s$, il existe une suite de nombres réels $c_{i,n}\to 0$ telle que la suite de fonctions $G_{i,n}+c_{i,n}$ décroît sur $\mathcal{K}_{i-1}$ vers une fonction G_i continue, invariante : $G_i\circ f=d_iG_i$. De plus, la fonction $G_i(z)-\log^+|z|$ est continue sur $\overline{\mathcal{K}}_{i-1}\setminus I_i$ et*

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{i-1}&=\{z\in\mathbf{C}^k:G_i(z)<\infty\}\\&=\{z\in\mathbf{C}^k:\textit{il existe } c>0,\ \textit{tel que } |f^n(z)|\leq c^{d_i^n}\max\{|z|^{d_i^n},1\}\},\\\mathcal{K}_i&=\{z\in\mathbf{C}^k:G_i(z)=0\}\end{aligned}$$

et $\overline{\mathcal{K}}_i\subset\mathcal{K}_i\cup I_i$. En particulier, si f est régulier avec $d_m\geq 2$, on a $\lambda_1=\lambda_\infty=d_m$, $d_t=(d_m)^{l_m-l_{m-1}}\ldots(d_1)^{l_1-l_0}$ et $\mathcal{K}_m=\mathcal{K}$.

On montre le théorème par récurrence. Supposons que le théorème et les lemmes suivants soient vrais jusqu'au rang $i-1$ avec $2\leq i\leq s$. Vérifions les au rang i. La preuve est aussi valable pour le rang 1 (*voir* également [13]).

Lemme 2.2. (1) *Si $z\in\mathcal{K}_{i-1}$ et $z\to X_i$, on a $|f_{(i)}(z)|\sim|z|^{d_i}$, $|f_{(>i)}(z)|=o(|z|^{d_i})$ et $|f(z)|\sim|z|^{d_i}$;*

(2) *U_i est un ouvert de $\mathcal{K}_{i-1}$, $\mathcal{K}_i$ est un fermé de $\mathcal{K}_{i-1}$ et $\overline{\mathcal{K}}_i\subset\mathcal{K}_i\cup I_i$.*

Preuve. (1) Puisque f est i-régulier, $P_{(i)}^+$ ne s'annule pas sur X_i. Par conséquent, quand $z\to X_i$, on a $|f_{(i)}(z)|\sim|z|^{d_i}$. Puisque $\deg f_{(>i)}<d_i$, on a $|f_{(>i)}(z)|=o(|z|^{d_i})$ quand $z\to X_i$.

On sait par hypothèse de récurrence que $\overline{\mathcal{K}}_{i-1}\subset\mathcal{K}_{i-1}\cup I_{i-1}$ et que $\mathcal{K}_{i-1}$ est invariant par f. Par définition, $X_i=I_{i-1}\cap\{z:z_{(>i)}=0\}$. On en déduit que si $z\in\mathcal{K}_{i-1}$ et $z\to X_i$, on a $f(z)\to X_i$. D'autre part, f étant i-régulier, on a

$$I_{i-1}\cap\{z:z_{(\geq i)}=0\}=I_{i-1}\cap X_{i-1}=\emptyset.$$

Ceci implique en utilisant l'hypothèse de récurrence que lorsque $f(z)\to I_{i-1}$, on a $|f(z)|\sim|f_{(\geq i)}(z)|$. Par conséquent, si $z\in\mathcal{K}_{i-1}$ et $z\to X_i$ on a $|f(z)|\sim|z|^{d_i}$. Observons que c'est $f_{(\geq i)}$ qui domine sur $\mathcal{K}_{i-1}$ même si $f_{(1)}$, par exemple, a des termes de degré plus élevé.

(2) D'après la partie 1, puisque $d_i\geq 2$, on peut trouver un voisinage assez petit V de X_i tel que $f(\mathcal{K}_{i-1}\cap V)\subset V$. Comme $\mathcal{K}_{i-1}$ est invariant, pour tout $z\in V$, on a $f^n(z)\to X_i$. Par conséquent, $\mathcal{K}_{i-1}\cap V\subset U_i$. Par définition de U_i, on a $U_i=\bigcup_{n\geq 0}f^{-n}(\mathcal{K}_{i-1}\cap V)$. Ceci implique que U_i est un ouvert de $\mathcal{K}_{i-1}$ et donc $\mathcal{K}_i=\mathcal{K}_{i-1}\setminus U_i$ est un fermé de $\mathcal{K}_{i-1}$. Il reste à montrer que $\overline{\mathcal{K}}_i\subset\mathcal{K}_i\cup I_i$.

Soit $a\in I_{i-1}\setminus I_i$ et soit $z\in\mathcal{K}_{i-1}$ tendant vers a. On a $f(z)\in\mathcal{K}_{i-1}$ car $\mathcal{K}_{i-1}$ est invariant. Puisque $a\notin I_i$, on a $|f_{(i)}(z)|\sim|z|^{d_i}$. D'autre part, $|f_{(>i)}(z)|=o(|z|^{d_i})$ car $\deg f_{(>i)}<d_i$. Par conséquent, $f(z)$ tend vers X_i quand $z\to a$. On conclut que si z est assez proche de a, $f(z)$ appartient à U_i et donc z appartient à U_i. Ceci implique que $\overline{\mathcal{K}}_i\subset\mathcal{K}_i\cup I_i$. □

Fin de la démonstration du théorème 2.1. Montrons d'abord l'existence de la suite (c_i). D'après le lemme 2.2, il existe une constante $c>0$ telle que pour tout $z\in\mathcal{K}_{i-1}$ on ait

$$|f(z)|\leq c\max\{|z|^{d_i},1\}.$$

Donc

$$|f^n(z)|\leq c\max\{|f^{n-1}(z)|^{d_i},1\}$$

et

$$G_{i,n}(z)\leq\frac{\log c}{d_i^n}+G_{i,n-1}(z).$$

Posons

$$c_{i,n}:=-\sum_{m\geq n+1}\frac{\log c}{d_i^m}.$$

Il est clair que $c_{i,n}\to 0$ et que la suite $G_{i,n}(z)+c_{i,n}$ est décroissante. Comme les $G_{i,n}(z)$ sont positives, la limite $G_i(z)$ existe et elle est positive.

Montrons les assertions sur les ensembles $\mathcal{K}_{i-1}$ et $\mathcal{K}_i$. Soit $z\notin\mathcal{K}_{i-1}$. Il existe $1\leq j\leq i-1$ tel que $z\in U_j$. D'après le lemme 2.2, il existe un $c>0$ telle que pour n assez grand $|f^n(z)|\geq c|z|^{d_j^n}$. Comme $d_j>d_i$, on a $G_i(z)=+\infty$. On obtient donc

$$\mathcal{K}_{i-1}=\{z\in\mathbf{C}^k:G_i(z)<+\infty\}.$$

Soit $z\in\mathcal{K}_i$. Puisque $\mathcal{K}_i$ est invariant, $f(z)\in\mathcal{K}_i$. D'après le lemme 2.2, on a $\overline{\mathcal{K}}_i\subset\mathcal{K}_i\cup I_i$. Le fait que $I_i\cap\{z:z_{(>i)}=0\}=\emptyset$ implique qu'il existe $c'\geq 1$ indépendant de z telle que

$$|f(z)|\leq c'\max\{|f_{(>i)}(z)|,1\}.$$

Comme $\deg f_{(>i)}=d_{i+1}$, il existe une constante $c''>0$ telle que

$$|f_{(>i)}(z)|\leq c''\max\{|z|^{d_{i+1}},1\}.$$

On en déduit que pour une certaine constante $c>0$ on a

$$|f(z)|\leq c\max\{|z|^{d_{i+1}},1\}.$$

Le fait que $d_{i+1}<d_i$ implique que $G_i(z)=0$. On a $\mathcal{K}_i\subset\{z\in\mathbf{C}^k:G_i(z)=0\}$. D'après le lemme 2.2, G_i est strictement positive au voisinage de X_i. La relation $G_i\circ f=d_iG_i$ implique que G_i est strictement positive sur U_i. On a donc $\mathcal{K}_i\supset\{z\in\mathbf{C}^k:G_i(z)=0\}$.

Montrons que G_i est continue et strictement positive sur U_i. D'après le lemme 2.2, il suffit de le montrer pour $z\in V\cap\mathcal{K}_{i-1}$ où $V\subset\mathbf{P}^k$ est un voisinage assez petit de X_i. La positivité est claire. La continuité résulte de la continuité de $G_{i,n}$ et de l'inégalité

$$|G_{i,n}(z)-G_{i,n-1}(z)|\leq\frac{\max\{\log c,-\log c'\}}{d_i^n}$$

où $0<c'<c$ sont des constantes telles que $c'|z|^{d_i}\leq|f(z)|\leq c|z|^{d_i}$ sur $V\cap\mathcal{K}_i$.

Vérifions la continuité de $G_i(z)-\log^+|z|$ dans $U_i\cup I_{i-1}\setminus I_i$. Il suffit de le prouver pour $z\in V$. Ceci est une conséquence de l'inégalité précédente et de l'égalité $G_{i,0}(z)=\log^+|z|$.

Comme G_i est limite décroissante d'une suite de fonctions continues, elle est semi-continue supérieurement sur $\mathcal{K}_{i-1}$. Le fait qu'elle soit continue, positive sur U_i et nulle sur $\mathcal{K}_i$ implique qu'elle est continue sur $\mathcal{K}_{i-1}=U_i\cup\mathcal{K}_i$.

Dans la suite, on suppose que f est régulier et $d_m\geq 2$. On a $X_m=I_{m-1}\neq\emptyset$. Donc $I_m=\emptyset$. Ceci entraîne que

$$\{z:P^+_{(1)}(z)=\ldots=P^+_{(m)}(z)=0\}=\{z=0\}.$$

Rappelons que λ_n et λ_∞ sont les exposants de Łojasiewicz de f^n et l'exposant de Łojasiewicz asymptotique de f. D'après le lemme 2.2, on a $\lambda_n \leq d_m^n$. Montrons que $\lambda_1 \geq d_m$ et que $d_t = d$ avec $d := (d_1)^{l_1 - l_0} \ldots (d_m)^{l_m - l_{m-1}}$. Posons $\Pi: \mathbf{C}^k \to \mathbf{C}^k$ avec $\Pi(z) := (z_{(1)}^{d/d_1}, \ldots, z_{(m)}^{d/d_m})$. C'est une application propre de degré algébrique d/d_m et de degré topologique d^{k-1}. L'application $\Pi \circ f$ est de degré algébrique d et se prolonge holomorphiquement à l'infini car

$$\{z : P_{(1)}^+(z) = \ldots = P_{(m)}^+(z) = 0\} = \{z = 0\}.$$

On en déduit qu'elle est propre. Son exposant de Łojasiewicz est égal à d et son degré topologique est égal à d^k. Par suite, l'exposant de Łojasiewicz de f est minoré par $d/(d/d_m) = d_m$ et le degré topologique de f est égal à $d^k / d^{k-1} = d$. On déduit aussi que $\lambda_n \geq d_m^n$ et donc $\lambda_1 = \lambda_\infty = d_m$.

Puisque $I_m = \emptyset$, l'ensemble $\mathcal{K}_m$ est compact. Il est donc égal à l'ensemble des points d'orbite bornée $\mathcal{K}$. $\square$

Théorème 2.3. *Soit* $f: \mathbf{C}^k \to \mathbf{C}^k$ *comme au théorème* 2.1. *Alors pour tout* $1 \leq r \leq s$ *et* $l_{r-1} \leq j < l_r$, *on peut définir le courant* T_j *de bidegré* (j, j) *de* $\mathbf{P}^k$ *par*

$$T_1 := \mathrm{dd^c} G_1 \quad \textit{et} \quad T_j := \mathrm{dd^c}(G_r T_{j-1}).$$

C'est un courant positif, fermé, de masse 1, *porté par* $\overline{\mathcal{K}}_{r-1}$. *Il ne charge pas les ensembles pluripolaires et on a*

$$f^* T_j = (d_r)^{j - l_{r-1} + 1} (d_{r-1})^{l_{r-1} - l_{r-2}} \ldots (d_1)^{l_1 - l_0} T_j.$$

De plus, le courant $T_{l_r - 1}$ *est porté par* $\overline{\mathcal{K}}_r$.

Preuve. D'après le théorème 2.1, le lemme 2.2 et l'appendice, le courant T_j est bien défini, positif, fermé dans $\mathbf{P}^k \setminus I_r$. Comme f est s-régulier, on a

$$\dim I_r = k - l_r < k - j.$$

Montrons par récurrence sur j que T_j est de masse 1. Supposons que c'est le cas pour T_{j-1}. Posons $\varphi_M(z) := \max\{G_r(z), \log^+|z| - M\}$ et $S_M := \mathrm{dd^c} \varphi_M \wedge T_{j-1}$. La suite φ_M décroît vers G_r sur le support de T_{j-1}. D'après le lemme 2.2 et la proposition 5.2, $\lim_{M \to \infty} S_M = T_j$ dans $\mathbf{P}^k \setminus I_r$. D'après la proposition 5.4, la masse de S_M dans $\mathbf{P}^k$ est égale à 1. Soit S une valeur adhérente de (S_M) dans $\mathbf{P}^k$. Alors T_j est égal à S dans $\mathbf{P}^k \setminus I_r$. Comme $\dim I_r = k - l_r < k - j$, les courants S et T_j ne chargent pas I_r. On en déduit que $T_j = S$ et donc T_j est de masse 1. Le théorème de Skoda [20] entraîne que T_j, qui est de bidegré (j, j), se prolonge en courant invariant, positif et fermé dans $\mathbf{P}^k$ qui ne charge pas I_r. D'après la proposition 5.3, il ne charge pas les ensembles pluripolaires car la fonction G_r est T_{j-1}-p.s.h. pour tout $r\geq 2$ et tout $l_{r-1}\leq j<l_r$.

Pour montrer que T_j est porté par $\bar{\mathcal{K}}_{r-1}$, on peut supposer que $r\geq 2$. Il suffit de vérifier que $T_{l_{r-1}-1}$ est porté par $\bar{\mathcal{K}}_{r-1}$. On le fait par récurrence. Supposons que c'est vrai au rang $r-1$. On a

$$T_{l_r-1}=(\mathrm{dd^c}G_r)^{l_r-l_{r-1}}\wedge T_{l_{r-1}-1}.$$

Observons que le courant $(\mathrm{dd^c}\log|f^n_{(r)}|)^{l_r-l_{r-1}}$ est porté par $\{z: f^n_{(r)}(z)=0\}$. En particulier, $(\mathrm{dd^c}\log|f^n_{(r)}|)^{l_r-l_{r-1}}=0$ au voisinage de X_r. Dans U_r, on a $G_r=\lim_{n\to\infty} d^{-n}_{l_{r-1}}\log|f^n_{(r)}|$. D'après la proposition 5.2, on a $(\mathrm{dd^c}G_r)^{l_r-l_{r-1}}\wedge T_{l_{r-1}-1}=0$ dans U_r. On en déduit que T_{l_r-1} est porté par $\bar{\mathcal{K}}_r$.

L'application $f:\mathbf{C}^k\to\mathbf{C}^k$ étant ouverte et à fibres finies, f^* opère continûment sur les courants considérés et commute avec $\mathrm{dd^c}$ [7], ce qui permet d'obtenir l'équation vérifiée par f^*T_j. $\square$

3. Endomorphismes semi-réguliers

On se propose d'étudier d'une manière analogue la famille des endomorphismes *semi-réguliers ou (π,s)-réguliers*. Soient $1\leq p_1\leq\ldots\leq p_m$ des entiers naturels. Soit $\pi:\mathbf{C}^k\to\mathbf{C}^k$ l'application définie par

$$\pi(z):=(\pi_{(1)},\ldots,\pi_{(m)})\quad\text{où}\quad \pi_{(i)}:\mathbf{C}^{l_i-l_{i-1}}\to\mathbf{C}^{l_i-l_{i-1}}$$

est une application polynomiale de degré p_i en $z_{(i)}$ qui se prolonge en une application holomorphe de $\mathbf{P}^{l_i-l_j}$ dans $\mathbf{P}^{l_i-l_j}$. Il est clair que $|\pi_{(i)}(z_{(i)})|\sim|z_{(i)}|^{p_i}$ quand $z_{(i)}$ tend vers l'infini. On dira qu'une telle application π est *scindée*.

Soit $f=(P_1,\ldots,P_k)=(P_{(1)},\ldots,P_{(m)})$ un endomorphisme polynomial ouvert vérifiant $\deg P_{(i)}\geq\deg P_{(i+1)}$. Contrairement à l'application π, les degrés des fonctions coordonnées de f sont dans l'ordre décroissant. On dit que f est *(π,s)-régulier* (resp. *π-régulier*) si l'endomorphisme $f\circ\pi$ est s-régulier (resp. régulier) où les nombres $1=l_0<l_1<\ldots<l_m=k+1$ utilisés dans la définition des applications régulières sont les mêmes que ci-dessus.

Observons que si f est $(\pi,1)$-régulier, il est 1-régulier donc algébriquement stable. Si on pose $\pi^+:=(\pi^+_{(1)},\ldots,\pi^+_{(m)})$ où $\pi^+_{(i)}$ est la partie homogène de plus haut degré de $\pi_{(i)}$, alors f est (π,s)-régulier si et seulement si il est (π^+,s)-régulier. Soit π^1 une application homogène scindée. Si f est $(\pi\circ\pi^1,s)$-régulier, alors il est (π,s)-régulier.

Il est facile de vérifier si un endormorphisme est régulier. Dans la suite, nous donnons, pour le cas de dimension 2, un critère simple pour savoir si un endomorphisme polynomial est semi-régulier. L'idée utilisée dans la suite montre aussi que, dans le cas de dimension supérieure à 2, on «devine» facilement l'application π lorsque f est semi-régulier.

Considérons dans $\mathbf{C}^2$ l'endomorphisme $f(z_1,z_2):=(P_1,P_2)$ avec $d_1:=\deg P_1>d_2:=\deg P_2\geq 1$. Cet endomorphisme se prolonge en application méromorphe de $\mathbf{P}^2$ dans $\mathbf{P}^2$. L'ensemble d'indétermination de f est défini par $I_1:=\{[z:0]:P_1^+([z:0])=0\}$ où P_i^+ est la partie homogène de plus haut degré de P_i. On a

$$X_1:=\{[z:0]\}\cap\{z:z_{(>1)}=0\}=f(\{[z:0]\}\setminus I_1)=[1:0:0].$$

L'endomorphisme f est $(\pi,1)$-régulier pour une application scindée π, s'il est 1-régulier. Dans le cadre considéré, cela équivaut à dire qu'il est algébriquement stable, c.-à-d. $X_1\cap I_1=\emptyset$. Autrement dit, le coefficient de $z_1^{d_1}$ dans P_1 est non nul.

Dans la suite, on suppose que f est algébriquement stable. Notons $\Sigma_i\subset\mathbf{N}^2\subset\mathbf{R}^2$ l'ensemble des couples (m,n) tels que le coefficient de $z_1^m z_2^n$ dans P_i soit non nul (*voir* exemple 3.2). Puisque $\deg P_2<\deg P_1=d_1$, les Σ_i se trouvent au dessous de la droite $m+n=d_1$. L'endomorphisme f étant algébriquement stable, $(d_1,0)\in\Sigma_1$. Soit $\mathcal{D}$ une droite dans $\mathbf{N}^2$. On note $P_i^{\mathcal{D}}$ la somme des termes $z_1^m z_2^n$ dans P_i avec $(m,n)\in\mathcal{D}$. Si $\mathcal{D}$ est définie par l'équation $pm+qn+r=0$, on dira que $-p/q$ est *la pente* de cette droite.

On note $\mathcal{D}_1$ la droite vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $\mathcal{D}_1$ passe par $(d_1,0)$ et au moins un autre point de $\Sigma_1\cup\Sigma_2$;

(2) l'ensemble $\Sigma_1\cup\Sigma_2$ est au dessous de $\mathcal{D}_1$.

La droite $\mathcal{D}_1$ est celle de pente maximale, passant par $(d_1,0)$ et vérifiant la condition 2. Cette pente est comprise entre -1 et 0. Notons $\mathcal{D}_2$ la droite parallèle à $\mathcal{D}_1$ et vérifiant :

(1) $\mathcal{D}_2$ passe par au moins un point de Σ_2;

(2) l'ensemble Σ_2 est au dessous de $\mathcal{D}_2$.

Il est clair que $\mathcal{D}_2$ est au dessous de $\mathcal{D}_1$. On a la proposition suivante.

Proposition 3.1. *Soit f un endomorphisme de $\mathbf{C}^2$ algébriquement stable comme ci-dessus. Alors f est semi-régulier si et seulement si la pente de $\mathcal{D}_1$ est non nulle et l'ensemble $\{z\in\mathbf{C}^2:P_1^{\mathcal{D}_1}(z)=P_2^{\mathcal{D}_2}(z)=0\}$ est réduit à $\{0\}$. Dans ce cas, si la pente de $\mathcal{D}_1$ est égale à $-p_1/p_2$ avec $p_1\in\mathbf{N}^*$ et $p_2\in\mathbf{N}^*$, f est π-régulier pour $\pi(z):=(z_1^{p_1},z_2^{p_2})$.*

Preuve. Supposons que $\{z\in\mathbf{C}^2:P_1^{\mathcal{D}_1}(z)=P_2^{\mathcal{D}_2}(z)=0\}=\{0\}$. Puisque $\Sigma_1\cup\Sigma_2$ est au dessous de la droite de pente -1 passant par $(d_1,0)$, la pente de $\mathcal{D}_1$ est plus grande ou égale à -1. Soit $-p_1/p_2$ la pente de $\mathcal{D}_1$ où p_1 et p_2 sont des entiers positifs.

On a $p_1 \le p_2$. Posons $\pi(z) := (z_1^{p_1}, z_2^{p_2})$. Soient $P_i^{\pi+}$ les parties de plus haut degré des composantes de $f \circ \pi$. On a $P_i^{\pi+} = P_i^{\mathcal{D}_i} \circ \pi$. On en déduit que $\{z \in \mathbf{C}^2 : P_1^{\pi+}(z) = P_2^{\pi+}(z) = 0\} = \{0\}$. Comme $\mathcal{D}_2$ est au dessous de $\mathcal{D}_1$, on a $\deg P_1^{\pi+} \ge \deg P_2^{\pi+}$. Donc $f \circ \pi$ est régulier et f est π-régulier.

Supposons maintenant que f est π-régulier avec $\pi(z) = (z_1^{p_1}, z_2^{p_2})$ et $p_1 \le p_2$. On note $\mathcal{D}'_i$ la droite de pente $-p_1/p_2$ telle que

(1) $\mathcal{D}'_i$ passe par au moins un point de Σ_i;

(2) Σ_i est au dessous de $\mathcal{D}'_i$.

On a $P_i^{\pi+} = P_i^{\mathcal{D}'_i} \circ \pi$ et donc $\{z \in \mathbf{C}^2 : P_1^{\mathcal{D}'_1}(z) = P_2^{\mathcal{D}'_2}(z) = 0\} = \{0\}$. Puisque $\deg P_1^{\pi+} \ge \deg P_2^{\pi+}$, la droite $\mathcal{D}'_2$ et l'ensemble $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ sont au dessous de $\mathcal{D}'_1$.

Comme $f \circ \pi$ est régulier, $P_1^{\pi+}$ ne s'annule pas en X_1. Par conséquent, $P_1^{\mathcal{D}'_1}$ contient un monôme en z_1 et donc $\mathcal{D}'_1$ passe par $(d_1, 0)$. On en déduit que la pente de $\mathcal{D}'_1$ est plus petite ou égale à celle de $\mathcal{D}_1$. Si la pente de $\mathcal{D}'_1$ est égale à celle de $\mathcal{D}_1$, alors $\mathcal{D}'_i = \mathcal{D}_i$, donc

$$\{z \in \mathbf{C}^2 : P_1^{\mathcal{D}_i}(z) = P_2^{\mathcal{D}_i}(z) = 0\} = \{0\}.$$

Il reste à considérer le cas où la pente de $\mathcal{D}'_1$ est strictement plus petite que celle de $\mathcal{D}_1$. Dans ce cas, $\mathcal{D}'_1$ ne passe par aucun point de Σ_1 excepté $(d_1, 0)$. Donc $P_1^{\mathcal{D}'_1}$ est un monôme en z_1, ce qui implique que $P_2^{\mathcal{D}'_2}$ contient un monôme en z_2. Par suite, $\mathcal{D}'_2$ passe par un point $(0, d)$. Comme la pente $\mathcal{D}_2$ est strictement plus grande que celle de $\mathcal{D}'_2$, par définition, $\mathcal{D}_2$ ne passe par aucun point de Σ_2 sauf le point $(0, d)$. On conclut que $P_2^{\mathcal{D}_2}$ est un monôme en z_2. Le fait que $P_1^{\mathcal{D}_1}$ contient un monôme en z_1 implique que

$$\{z \in \mathbf{C}^2 : P_1^{\mathcal{D}_1}(z) = P_2^{\mathcal{D}_2}(z) = 0\} = \{0\}. \quad \square$$

La proposition 3.1 permet de vérifier facilement dans le cas de dimension 2 si un endomorphisme est semi-régulier. Donnons des exemples.

Exemple 3.2. Considérons les endomorphismes

$$f(z) := (z_1^6 - z_2^4, z_1^3 - 2z_2^2 + z_2) \quad \text{et} \quad g(z) := (z_1^6 - z_2^4, z_1^3 - z_2^2 + z_2).$$

Dans les deux cas, on a $\mathcal{D}_1 = \{2m + 3n = 12\}$ et $\mathcal{D}_2 = \{2m + 3n = 6\}$. Dans le premier cas, on a $P_1^{\mathcal{D}_1}(z) = z_1^6 - z_2^4$ et $P_2^{\mathcal{D}_1}(z) = z_1^3 - 2z_2^2$; la condition de la proposition 3.1 est vérifiée. Dans le second cas, on a $P_1^{\mathcal{D}_1}(z) = z_1^6 - z_2^4$ et $P_2^{\mathcal{D}_1}(z) = z_1^3 - z_2^2$; la condition de la proposition 3.1 n'est pas vérifiée. L'endomorphisme f est π-régulier pour $\pi(z) := (z_1^2, z_2^3)$. L'endomorphisme g n'est pas semi-régulier. Puisque f est 1-régulier, on peut définir $X_1 = [1:0:0]$, $I_1 = [0:1:0]$, U_1 le bassin de X_1 et $\mathcal{K}_1 = \mathbf{C}^2 \setminus U_1$ vérifiant $\overline{\mathcal{K}}_1 =$

$\mathcal{K}_1 \cup I_1$. Si $z \in \mathcal{K}_1$ tend vers I_1, $f(z)$ tend aussi vers I_1. Par conséquent, sa deuxième coordonnée domine la première ; on a $z_1^6 - z_2^4 = o(z_1^3 - 2z_2^2 + z_2)$. On en déduit que $z_1^6 \simeq z_2^4$ et donc $z_1^3 \simeq z_2^2$ ou $z_1^3 \simeq -z_2^2$. Cela entraîne que la deuxième composante de $f(z)$ vérifie $|z_1^3 - 2z_2^2 + z_2| \sim |z_2|^2 \sim |z|^2$. Cette dernière relation permet de définire la deuxième fonction de Green comme dans le cas des applications régulières.

Etudions maintenant la dynamique d'une application (π, s)-régulière f générale. On pose $P^{\pi}_{(i)} := f_{(i)} \circ \pi$ et on note $P^{\pi+}_{(i)}$ sa partie homogène de plus haut degré d^{π}_i. Soient $\breve{P}_{(i)}$ les polynômes constitués par certains monômes de $P_{(i)}$ avec les mêmes coefficients et vérifiant la relation $P^{\pi+}_{(i)} = \breve{P}_{(i)} \circ \pi^+$. Cette dernière relation n'assure pas l'unicité de $\breve{P}_{(i)}$. On garde les mêmes coefficients pour l'assurer. On définit la fonction algébrique $\breve{P}^*_{(i)}$ de degré $\alpha_i := d^{\pi}_i / p_i$ en $z_{(\geq i)}$ de la manière suivante. On remplace $z_{(<i)}$ dans $\breve{P}_{(i)}$ par la solution de l'équation $\breve{P}_{(<i)} = 0$. On a le même nombre d'équations et d'inconues, l'hypothèse de semi-régularité dit précisément que l'ensemble des solutions est discret pour chaque $z_{(\geq i)}$ fixé. On définit $\breve{P}^+_{(i)}$ comme étant la partie homogène de degré α_i de $\breve{P}^*_{(i)}$.

Posons $I_0 = \{[z:0]\}$, $X_0 = \emptyset$. Nous allons définir d'une manière analogue au cas s-régulier, les autres ensembles X_i et I_i. Lorsque I_{i-1} est défini, on pose toujours $X_i := I_{i-1} \cap \{z : z_{(>i)} = 0\}$. En particulier, on a $X_1 = \{[z:0]\} \cap \{z : z_{(>1)} = 0\}$. Il reste à définir les ensembles I_i. Les notations étant assez compliquées, nous expliquons d'abord des cas simples. Si $p_1 = \ldots = p_m$, l'application f est s-régulière ; les ensembles X_i et I_i sont définis exactement de la même manière qu'au paragraphe précédent. Si $p_1 < \ldots < p_m$ (*voir* l'exemple 3.2), le fait que $f \circ \pi$ soit s-régulier implique que $P^+_{(1)} = \breve{P}^+_{(1)}$, cette application polynomiale ne dépend pas de $z_{(>1)}$. Il est clair qu'il faut prendre

$$I_1 := I_0 \cap \{z : z_{(1)} = 0\} = I_0 \cap \{z : \breve{P}^+_{(1)}(z) = 0\}.$$

La croissance des p_i implique aussi que les termes de $\breve{P}^+_{(2)}$, qui sont indépendants de $z_{(1)}$, ne dépendent que de $z_{(2)}$. Rappelons que I_2 apparaît comme l'ensemble d'indétermination d'une restriction convenable de f à $I_1 = I_0 \cap \{z : z_{(1)} = 0\}$. Il est donc aussi clair qu'il faut poser (*voir* exemple 3.2)

$$I_2 := I_1 \cap \{z : z_{(2)} = 0\} = I_1 \cap \{z : \breve{P}^+_{(2)}(z) = 0\}.$$

Le même raisonnement est valable pour I_i avec $1 \leq i \leq s$.

Pour le cas général, la définition des X_i et I_i tient compte des deux cas particuliers ci-dessus. Posons pour tout $1 \leq i \leq m$

$$X_i := I_{i-1} \cap \{z : z_{(>i)} = 0\}$$

et

$$I_i := I_{i-1} \cap \{z : \breve{P}^+_{(i)}(z) = 0\} \cap \{z : z_{(j)} = 0 \text{ pour tout } j \text{ tel que } p_j < p_i\}.$$

Lemme 3.3. *Si f est (π,s)-régulier, alors $X_i \cap I_i = \emptyset$ pour tout $1 \leq i \leq s$. De plus, on a* $\dim X_i = l_i - l_{i-1} - 1$ *et* $\dim I_i = k - l_i$.

Preuve. Soit $0 \leq j < i$ l'entier minimal tel que $p_{j+1} = p_i$. Posons $I_0^1 = \mathbf{P}^k$,

$$I_i^1 := \{z : z_{(\leq j)} = 0\} \cap \{z : \breve{P}^+_{(\leq i)}(z) = 0\}$$

et

$$X_i^1 := I_{i-1}^1 \cap \{z : z_{(>i)} = 0\}.$$

On a $X_i = X_i^1 \cap \{[z:0]\}$ et $I_i = I_i^1 \cap \{[z:0]\}$. Il faut montrer que $X_i^1 \cap I_i^1 \cap \mathbf{C}^k = \{0\}$ et que $\dim X_i^1 = l_i - l_{i-1}$ et $\dim I_i^1 = k - l_i + 1$. Posons

$$X_i^2 := (\pi^+)^{-1}(X_i^1 \cap \mathbf{C}^k) \quad \text{et} \quad I_i^2 := (\pi^+)^{-1}(I_i^1 \cap \mathbf{C}^k).$$

En utilisant la croissance des degrés de π, on obtient

$$\begin{aligned} X_i^2 \cap I_i^2 &= \{z : z_{(\leq j)} = 0\} \cap \{z : \breve{P}^+_{(\leq i)} \circ \pi^+(z) = 0\} \cap \{z : z_{(>i)} = 0\} \cap \mathbf{C}^k \\ &\subset \{z : P^{\pi+}_{(\leq i)}(z) = 0\} \cap \{z : z_{(>i)} = 0\} \cap \mathbf{C}^k = \{0\}. \end{aligned}$$

La dernière intersection est réduite à $\{0\}$ car $f \circ \pi^+$ est s-régulier. On déduit de la propriété précédente que $X_i \cap I_i = \emptyset$.

On a

$$\begin{aligned} I_i^2 &= \{z : z_{(\leq j)} = 0\} \cap \{z : \breve{P}^+_{(\leq i)} \circ \pi^+(z) = 0\} \cap \mathbf{C}^k \\ &= \{z : z_{(\leq j)} = 0\} \cap \{z : \breve{P}^+_{(r)} \circ \pi^+(z) = 0 \text{ pour tout } j+1 \leq r \leq i\} \cap \mathbf{C}^k. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a $\dim I_i^2 \geq k - l_i + 1$. D'autre part, $X_i^2 = I_{i-1}^2 \cap \{z : z_{(>i)} = 0\}$. Donc $\dim X_i^2 \geq l_i - l_{i-1}$. Le fait que $X_i^2 \cap I_i^2 = \{0\}$ implique que $\dim X_i^2 = l_i - l_{i-1}$ et $\dim I_i^2 = k - l_i + 1$. On en déduit que $\dim X_i = l_i - l_{i-1} - 1$ et $\dim I_i = k - l_i$. □

Posons $G_0 := 0$, $\mathcal{K}_0 := \mathbf{C}^k$. Lorsque les expressions suivantes ont un sens, on pose avec $\alpha_i = d_i^\pi / p_i$

$$\begin{aligned} G_{i,n}(z) &:= \frac{\log^+ |f^n(z)|}{\alpha_i^n}, \\ G_i(z) &:= \lim_{n \to \infty} G_{i,n}(z), \\ U_i &:= \{z \in \mathbf{C}^k : f^n(z) \text{ tend vers } X_i\}, \\ \mathcal{K}_i &:= \mathcal{K}_{i-1} \setminus U_i \end{aligned}$$

pour tout $1 \leq i \leq m$. L'ensemble U_i est le *bassin d'attraction* de X_i. Il est clair que $G_i \circ f = \alpha_i G_i$, $f^{-1}(U_i) \subset f(U_i) = U_i$ et $f^{-1}(\mathcal{K}_i) \subset f(\mathcal{K}_i) = \mathcal{K}_i$. Observons ici que la suite des α_i est décroissante. On obtient des résultats analogues au cas régulier.

Théorème 3.4. *Soit* $f:\mathbf{C}^k\to\mathbf{C}^k$ *un endomorphisme polynomial* (π,s)*-régulier comme précédemment. On suppose que* $1\leq s\leq m-1$ *ou bien que* $s=m$ *et* $\alpha_m>1$. *Alors pour tout* $1\leq i\leq s$, *il existe une suite de nombres réels* $c_{i,n}\to 0$ *telle que la suite de fonctions* $G_{i,n}+c_{i,n}$ *décroît sur* $\mathcal{K}_{i-1}$ *vers une fonction* G_i *continue, invariante:* $G_i\circ f=\alpha_i G_i$. *De plus, la fonction* $G_i(z)-\log^+|z|$ *est continue sur* $\overline{\mathcal{K}}_{i-1}\setminus I_i$ *et on a*

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{i-1}&=\{z\in\mathbf{C}^k:G_i(z)<\infty\}\\&=\{z\in\mathbf{C}^k:\textit{il existe } c>0 \textit{ tel que } |f^n(z)|\leq c^{\alpha_i^n}\max\{|z|^{\alpha_i^n},1\}\},\\\mathcal{K}_i&=\{z\in\mathbf{C}^k:G_i(z)=0\}\end{aligned}$$

et $\overline{\mathcal{K}}_i\subset\mathcal{K}_i\cup I_i$. *En particulier, si* f *est* π*-régulier et* $\alpha_m>1$, *on a* $\lambda_1=\lambda_\infty=\alpha_m$, $d_t=(\alpha_m)^{l_m-l_{m-1}}\ldots(\alpha_1)^{l_1-l_0}$ *et* $\mathcal{K}_m=\mathcal{K}$.

Théorème 3.5. *Soit* $f:\mathbf{C}^k\to\mathbf{C}^k$ *comme au théorème* 3.4. *Alors pour tout* $1\leq i\leq s$ *et* $l_{i-1}\leq j<l_i$, *on peut définir le courant* T_j *de bidegré* (j,j) *de* $\mathbf{P}^k$ *par*

$$T_1:=\mathrm{dd^c}G_1\quad\textit{et}\quad T_j:=\mathrm{dd^c}(G_iT_{j-1}).$$

C'est un courant positif, fermé, de masse 1, *porté par* $\overline{\mathcal{K}}_{i-1}$. *Il ne charge pas les ensembles pluripolaires et on a*

$$f^*T_j=(\alpha_i)^{j-l_{i-1}+1}(\alpha_{i-1})^{l_{i-1}-l_{i-2}}\ldots(\alpha_1)^{l_1-l_0}T_j.$$

De plus, le courant T_{l_i-1} *est porté par* $\overline{\mathcal{K}}_i$.

Pour démontrer ces théorèmes, nous allons montrer des inégalités analogues que celles du lemme 2.2. Puisque $f\circ\pi$ est régulier, il est plus facile d'utiliser $\pi(z)$ au lieu de z comme «coordonnées». L'application π n'est pas inversible en général mais elle est scindée. Ceci nous permet de travailler avec π^{-1} comme avec une application polynomiale.

Posons $I_0^\pi:=\{[z:0]\}$, $X_0^\pi=\emptyset$ et pour tout $1\leq i\leq m$

$$X_i^\pi:=I_{i-1}^\pi\cap\{z:z_{(>i)}=0\}\quad\text{et}\quad I_i^\pi:=I_{i-1}^\pi\cap\{z:P_{(i)}^{\pi+}=0\}.$$

On a $X_i^\pi\cap I_i^\pi=\emptyset$ pour $1\leq i\leq s$. Soit $\mathcal{K}_0^\pi=\mathbf{C}^k$. Posons

$$U_i^\pi:=\{z\in\mathbf{C}^k:\pi^{-1}\circ f^n\circ\pi(z)\text{ tend vers }X_i^\pi\}\quad\text{et}\quad\mathcal{K}_i^\pi:=\mathcal{K}_{i-1}^\pi\setminus U_i^\pi$$

pour tout $1\leq i\leq s$. Observons que $\pi^{-1}\circ f^n\circ\pi(z)$ contient plusieurs points dont les modules sont comparables quand $f^n\circ\pi(z)$ tend vers l'infini. Ceci est une conséquence de la propriété «π est scindée». Par définition, $\mathcal{K}_i^\pi$ et U_i^π sont invariants par $\pi^{-1}\circ f\circ\pi$ et par $\pi^{-1}\circ f^{-1}\circ\pi$.

Lemme 3.6. (1) *Pour* $z\in\mathcal{K}^\pi_{i-1}$ *tendant vers* X^π_i, *on a*
$$|f_{(i)}\circ\pi(z)|\sim|z|^{d^\pi_i} \quad et \quad |f_{(>i)}\circ\pi(z)|=o(|z|^{d^\pi_i});$$
(2) *pour tout* $z\in\mathcal{K}^\pi_{i-1}$ *tendant vers* X^π_i, *on a*
$$|\pi^{-1}\circ f\circ\pi(z)|\sim|z|^{\alpha_i} \quad et \quad |\pi^{-1}\circ f\circ\pi(z)|_{(>i)}=o(|z|^{\alpha_i});$$
(3) U^π_i *est un ouvert de* $\mathcal{K}^\pi_{i-1}$, $\mathcal{K}^\pi_i$ *est un fermé de* $\mathcal{K}^\pi_{i-1}$ *et* $\overline{\mathcal{K}}^\pi_i\subset\mathcal{K}^\pi_i\cup I^\pi_i$;
(4) *pour* $z\in\mathcal{K}^\pi_i$ *tendant vers* I^π_i, *on a* $|P^\pi_{(i)}(z)|=o(|z|^{d^\pi_i})$.

Preuve. On montre le lemme par récurrence. On suppose qu'il est vrai jusqu'au rang $i-1$.

(1) La partie homogène de plus haut degré $P^\pi_{(i)}$ de $f_{(i)}\circ\pi$ ne s'annule pas sur X^π_i car $f\circ\pi$ est s-régulier. Par conséquent, pour $z\in\mathcal{K}^\pi_{i-1}$ tendant vers X^π_i, on a $|f_{(i)}\circ\pi(z)|\sim|z|^{d^\pi_i}$. Quant à $f_{(>i)}\circ\pi$, il est de degré $d^\pi_{i+1}<d^\pi_i$. On a donc
$$|f_{(>i)}\circ\pi(z)|=o(|z|^{d^\pi_i}).$$

(2) Par hypothèse de récurrence, $\overline{\mathcal{K}}^\pi_{i-1}\subset\mathcal{K}^\pi_{i-1}\cup I^\pi_{i-1}$. D'autre part,
$$I^\pi_{i-1}\cap\{z:z_{(\geq i)}=0\}=\emptyset.$$
On en déduit que pour $z\in\mathcal{K}^\pi_{i-1}$ tendant vers I^π_{i-1}, on a $|z|\sim|z|_{(\geq i)}$. Comme $\pi^{-1}\circ f\circ\pi$ préserve $\mathcal{K}^\pi_{i-1}$, on a
$$|\pi^{-1}\circ f\circ\pi(z)|\sim|\pi^{-1}\circ f\circ\pi(z)|_{(\geq i)}.$$
D'après la partie 1, si $z\in\mathcal{K}^\pi_{i-1}$ tend vers X^π_i, la dernière relation et la croissance des p_i impliquent
$$|\pi^{-1}\circ f\circ\pi(z)|\sim|\pi^{-1}\circ f\circ\pi(z)|_{(i)}\sim|f_{(i)}\circ\pi(z)|^{1/p_i}\sim|z|^{\alpha_i}$$
et
$$|\pi^{-1}\circ f\circ\pi(z)|_{(>i)}=o(|z|^{d^\pi_i/p_i})=o(|z|^{\alpha_i}).$$

(3) Soit V un voisinage suffisamment petit de X^π_i. La partie 2 implique
$$V\cap\mathcal{K}^\pi_{i-1}\subset U^\pi_i.$$
Par définition, on a $U^\pi_i:=\bigcup_{n\geq0}\pi^{-1}\circ f^{-n}\circ\pi(\mathcal{K}^\pi_{i-1}\cap V)$. C'est donc un ouvert de I^π_{i-1}. Par suite, $\mathcal{K}^\pi_i$ est un fermé de I^π_{i-1}.

Fixons un voisinage W de I^π_i. Observons que lorsque $z\in\mathcal{K}^\pi_{i-1}$ tend vers $I^\pi_{i-1}\setminus W$, la partie 1 du lemme est encore vraie ; par suite, $\pi^{-1}\circ f\circ\pi(z)$ tend vers X^π_i. Donc, pour $z\in\mathcal{K}^\pi_{i-1}$ suffisamment proche de $I^\pi_{i-1}\setminus W$, on a $z\in U^\pi_i$. D'où $\overline{\mathcal{K}}^\pi_i\subset\mathcal{K}^\pi_i\cup I^\pi_i$.

(4) Soit $(z^{(n)})\subset\mathcal{K}^\pi_{i-1}$ une suite tendant vers I^π_{i-1}. Si $|P^\pi_{(i)}(z^{(n)})|\sim|z^{(n)}|^{d^\pi_i}$, alors comme dans la partie 1, on montre que
$$|f_{(i)}\circ\pi(z^{(n)})|\sim|z^{(n)}|^{d^\pi_i} \quad \text{et} \quad |f_{(>i)}\circ\pi(z^{(n)})|=o(|z^{(n)}|^{d^\pi_i}).$$
Par conséquent, $\pi^{-1}\circ f\circ\pi(z^{(n)})$ tend vers X^π_i. D'après la partie 3, $z^{(n)}$ appartient à U^π_i pour n assez grand. Ceci démontre la partie 4. $\square$

Lemme 3.7. (1) *Si* $w^*\in\mathcal{K}_{i-1}$ *tend vers* X_i, *on a* $|f(w^*)|\sim|w^*|^{\alpha_i}$.

(2) *On a* $\pi(\mathcal{K}_i^\pi)=\mathcal{K}_i$, $\pi(U_i^\pi)=U_i$ *et* $\overline{\mathcal{K}}_i\subset\mathcal{K}_i\cup I_i$.

Preuve. On montre le lemme par récurrence. Supposons qu'il est vrai jusqu'au rang $i-1$.

(1) Soit $w^*=\pi(z^*)\in\mathcal{K}_{i-1}$ tendant vers X_i. Par hypothèse de récurrence, on peut choisir $z^*\in\mathcal{K}_{i-1}^\pi$ et z^* tend vers I_{i-1}^π quand w^* tend vers X_i. Puisque les degrés p_i des composantes $\pi_{(i)}$ de π sont croissantes, z^* tend vers X_i^π. D'après le lemme 3.3, on a

$$X_i\cap\{w:w_{(i)}=0\}=I_{i-1}\cap\{w:w_{(\geq i)}=0\}=I_{i-1}\cap X_{i-1}=\emptyset.$$

Rappelons aussi que $X_i\subset\{w:w_{(>i)}=0\}$. La suite (p_i) étant croissante, on en déduit que

$$|z^*|\sim|z^*_{(i)}|\sim|w^*_{(i)}|^{1/p_i}\sim|w^*|^{1/p_i}.$$

La première relation de la dernière ligne vient du fait que $z^*\to X_i^\pi$.

L'invariance de $\mathcal{K}_{i-1}$ implique que $f(w^*)$ appartient à $\mathcal{K}_{i-1}$ et tend vers I_{i-1}. De plus, $I_{i-1}\cap\{w:w_{(\geq i)}=0\}=\emptyset$. On en déduit

$$|f(w^*)|\sim|f_{(\geq i)}(w^*)|=|f_{(\geq i)}\circ\pi(z^*)|.$$

D'après le lemme 3.6, ceci implique

$$|f(w^*)|\sim|f_{(i)}\circ\pi(z^*)|\sim|z^*|^{d_i^\pi}\sim|w^*|^{d_i^\pi/p_i}=|w^*|^{\alpha_i}.$$

(2) Soit $w^*=\pi(z^*)\in U_i$. Puisque $f^n(w^*)$ tend vers X_i et que la suite (p_i) est croissante, $\pi^{-1}\circ f^n(w^*)=\pi^{-1}\circ f^n\circ\pi(z^*)$ tend vers X_i^π. Donc $z^*\in U_i^\pi$ et $U_i\subset\pi(U_i^\pi)$.

Soit maintenant $z^*\in U_i^\pi$. On a $f^n\circ\pi(z^*)=f\circ\pi\circ(\pi^{-1}\circ f\circ\pi)^{n-1}(z^*)$. On applique les parties 1 et 2 du lemme 3.6 aux points de $(\pi^{-1}\circ f\circ\pi)^{n-1}(z^*)$ qui tendent vers X_i^π. On obtient que la suite $(f^n\circ\pi(z^*))$ tend vers $I_{i-1}\cap\{w:w_{(>i)}=0\}=X_i$. Par conséquent, $\pi(z^*)\in U_i$ et $\pi(U_i^\pi)\subset U_i$. D'où $\pi(U_i^\pi)=U_i$. On en déduit que $\mathcal{K}_i=\pi(\mathcal{K}_i^\pi)$.

Soit $w^{(n)}=\pi(z^{(n)})\subset\mathcal{K}_i$ une suite tendant vers $a\in I_{i-1}$ avec $z^{(n)}\in\mathcal{K}_i^\pi$. Puisque $z^{(n)}$ tend vers I_i^π, on a $|z^{(n)}|\sim|z^{(n)}|_{(\geq i)}$. Par conséquent, si $p_j<p_i$, on a $a_{(j)}=0$, c.-à-d. que $a\in\{z:z_{(j)}=0\}$.

D'après la partie 4 du lemme 3.6, on a

$$\breve{P}_{(i)}(w^{(n)})=\mathrm{o}(|z^{(n)}|^{d_i^\pi})=\mathrm{o}(|z^{(n)}_{(\geq i)}|^{d_i^\pi})=\mathrm{o}(|w^{(n)}_{(\geq i)}|^{\alpha_i}).$$

Ceci implique que $\breve{P}^+_{(i)}(a)=0$. On utilise l'hypothèse de récurrence : $\breve{P}^+_{(<i)}(a)=0$

On a montré que $w^{(n)}$ tend vers $a\in I_i$. Donc $\overline{\mathcal{K}}_i\subset\mathcal{K}_i\cup I_i$. □

Utilisant ces deux derniers lemmes, on montre les théorèmes 3.4 et 3.5 de même manière que dans le cas des applications régulières. □

Proposition 3.8. *Soit f un endomorphisme π-régulier comme précédement avec $\alpha_m>1$ et soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des points d'orbite bornée. Posons*

$$M:=\lim_{n\to\infty}\sup_{\mathcal{K}}\|\mathrm{D}f^n\|^{1/n}$$

où D *désigne la dérivée. Alors :*

(1) *Pour tous $1\leq i\leq m$ et $0<a_i<\log\alpha_i/\log M$, il existe une constante $c>0$ telle que si $z\in\mathcal{K}_{i-1}$ on ait $G_i(z)\leq c\delta(z)^{a_i}$ où $\delta(z)$ désigne la distance entre z et $\mathcal{K}$.*

(2) *La mesure $\mu:=T_k$ ne charge pas les ensembles de dimension de Hausdorff a pour tout $a<\log d_t/\log M$.*

Preuve. (1) Puisque la fonction G_i est à croissance logarithmique, il suffit de montrer que $G_i(z)\leq c\delta(z)^{a_i}$ dans un voisinage fixe de $\mathcal{K}$. Soit W un voisinage assez petit de $\mathcal{K}$ et soit N assez grand tels que $a_i<a_i^*:=\log\alpha_i/\log M_N$ pour tout $1\leq i\leq m$ où $M_N:=\sup_W\|\mathrm{D}f^N\|^{1/N}$. Notons $\delta>0$ la distance entre $\mathcal{K}$ et ∂W. On choisit une constante $A>0$ telle que $G_i(z)\leq A$ pour tout $z\in\mathcal{K}_{i-1}\cap W$ et tout $1\leq i\leq m$.

Il suffit de montrer qu'il existe $c>0$ tel que pour tout $z\in\mathcal{K}_{i-1}\cap W$ on a $|G_i(z)|\leq c\delta(z)^{a_i^*}$. Comme $G_i=0$ sur $\mathcal{K}$, il suffit de considérer le cas où $z\notin\mathcal{K}$. Soit n l'entier minimal tel que $f^{Nn}(z)\notin W$. Si $x\in\mathcal{K}$ est un point tel que $|x-z|=\delta(z)$ alors on a

$$\delta\leq|f^{Nn}(x)-f^{Nn}(z)|\leq(M_N)^{Nn}|x-z|=(M_N)^{Nn}\delta(z)$$

donc

$$(M_N)^{Nn}\geq\frac{\delta}{\delta(z)}.$$

Cela entraîne que pour une certaine constante $c'>0$ on a

$$\frac{1}{\alpha_i^{N(n-1)}}=\alpha_i^N M_N^{-Nna_i^*}\leq\alpha_i^N\left(\frac{\delta(z)}{\delta}\right)^{a_i^*}\leq c'\delta(z)^{a_i^*}.$$

Puisque $f^{N(n-1)}(z)\in\mathcal{K}_{i-1}\cap W$, en posant $c=Ac'$, on a

$$G_i(z)=\frac{G_i(f^{N(n-1)}(z))}{\alpha_i^{N(n-1)}}\leq Ac'\delta(z)^{a_i^*}=c\delta(z)^{a_i^*}.$$

(2) Comme dans la partie 1, on peut choisir W de sorte que

$$a<a^*:=\frac{\log d_t}{\log M_N}.$$

Puisque $d_t=\alpha_m^{l_m-l_{m-1}}\ldots\alpha_1^{l_1-l_0}$, on a $a^*=(l_m-l_{m-1})a_m^*+\ldots+(l_1-l_0)a_1^*$. Soit $\Sigma\subset\mathcal{K}$ un ensemble de dimension de Hausdorff a. Fixons un $\varepsilon>0$ assez petit. Comme $a<a^*$,

pour $r>0$ assez petit on peut recouvrir Σ par εr^{-a^*} boules $B_n(r)$ de centres $x_n\in\mathcal{K}$ et de rayon r. Soit χ_n une fonction positive à support dans $B_n(2r)$, égale à 1 sur $B_n(r)$ et telle que $dd^c\chi_n\le c''r^{-2}\omega$ avec $c''>0$, où on a posé $\omega:=dd^c|z|^2$. On a

$$\begin{aligned}\mu(B_n(r)) &\le \int \chi_n dd^c G_m\wedge T_{k-1} = \int_{B_n(2r)} dd^c\chi_n G_m\wedge T_{k-1}\\ &\le \int_{B_n(2r)} c''r^{-2}\omega c r^{a^*_m} c''\wedge T_{k-1} = c_1 r^{a^*_m-2}\int_{B_n(2r)}\omega\wedge T_{k-1}\end{aligned}$$

où $c_1:=cc''$.

On peut répéter ce procédé $(k-1)$ fois et on obtient, pour des constantes $c_k>0$ et $c'_k>0$ convenables, que

$$\mu(B_n(r))\le c_k r^{a^*-2k}\int_{B(2^k r)}\omega^k = c'_k r^{a^*}.$$

Par conséquent,

$$\mu(\Sigma)\le\sum\mu(B_n(r))\le\varepsilon r^{-a^*}c'_k r^{a^*}=c'_k\varepsilon.$$

Ceci est vrai pour tout $\varepsilon>0$. Donc $\mu(\Sigma)=0$. □

Remarque 3.9. Les résultats pour les endomorphismes (π,s)-réguliers s'appliquent aux automorphismes, bien sûr on a alors $s\le m$. Si f est (π,s)-régulier et f^{-1} est $(\tilde\pi,\tilde s)$-régulier on construit des courants invariants T^+ pour f et T^- pour f^{-1}. On peut, pour π, $\tilde\pi$, s et $\tilde s$ convenables, considérer la mesure invariante $\mu:=T^+\wedge T^-$. Le cas le plus simple de cette situation est celui des applications de Hénon. On trouve d'autres exemples dans [19] et [13].

4. D'autres remarques

Soit $f\colon \mathbf{C}^k\to\mathbf{C}^k$ une application polynomiale propre de degré topologique $d_t\ge2$. Supposons que l'infini soit attirant dans le sens où il existe $c>1$ tel que $|f(z)|\ge c|z|$ pour $|z|$ grand. On peut construire la mesure d'équilibre μ de f comme la limite faible de la suite $d_t^{-n}(f^n)^*\nu$ où ν est une mesure de probabilité qui ne charge pas les ensembles pluripolaires [6]. La mesure μ est f^*-invariante, mélangeante, d'entropie maximale $\log d_t$ et elle ne dépend pas de ν. Lorsque l'exposant de Łojasiewicz λ_1 de f est strictement supérieur à 1, en utilisant la méthode de Lyubich [16] et de Briend–Duval [4], [3], on montre [6, 3.4.3] que $d_t^{-n}(f^n)^*\delta_z$ tend vers μ pour tout z hors d'un ensemble exceptionnel $\mathcal{E}$ qui est *analytique*. On a noté δ_z la masse de Dirac en z. Les exposants de Lyapounov de μ sont minorés par $\log\lambda_1/2$. Les points périodiques répulsifs sont denses et équidistribués sur supp μ. La vitesse de mélange de μ est de l'ordre λ_1^{-n}. Cette mesure μ est de plus l'unique mesure d'entropie maximale $\log d_t$. Pour cette dernière propriété de μ, il suffit de reprendre la preuve de Lyubich [16] et Briend–Duval [4] en remplaçant un calcul cohomologique par le lemme de comparaison suivant :

Lemme 4.1. *Soit Ω une forme de bidegré $(k-1,k-1)$ positive fermée dans $\mathbf{C}^k$. Alors on a pour tout $m\geq 0$*

$$\int \Omega\wedge (f^m)^*\omega \leq \frac{1}{\lambda_1}\int \Omega\wedge (f^{m+1})^*\omega.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer la proposition 5.4 pour $V=\mathbf{C}^k$, $\varrho(z)=\log(1+|z|^2)$, $v_1=\log(1+|f^m|^2)-A$, $v_2=\lambda_1^{-1}\log(1+|f^{m+1}|^2)$ et A une constante suffisamment grande. □

Les résultats cités ci-dessus sont valables, en particulier, si f est semi-régulier avec $\alpha_m>1$. Dans ce cas, la mesure d'équilibre μ est égale à T_k qui est une intersection généralisée de courants positifs fermés. En particulier, d'après la proposition 5.3, les fonctions p.s.h. sont μ-intégrables : c'est une mesure PLB [6].

En général, une application f d'exposant de Łojasiewicz $\lambda_1>1$ n'est pas conjuguée à une application semi-régulière. Il peut exister une infinité de vitesses d'échapement vers l'infini et on rencontre d'autres phénomènes dynamiques.

Dans la suite, nous considérons des exemples d'applications régulières avec $d_m=1$. Soit $f:\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}^2$ défini par $f(z)=(P(z),az_1+bz_2)$ où a, b sont des nombres complexes, $|b|>1$, P est un polynôme de degré $d\geq 2$. Supposons que P^+ est indépendant de z_2. L'application f est régulière et de degré topologique $d_t=d$. En particulier, elle est algébriquement stable. D'après le théorème 2.1, l'exposant de Łojasiewicz et l'exposant de Łojasiewicz asymptotique de f sont égaux à 1. On vérifie que $|f(z)|\geq c|z|$ pour tout $1<c<|b|$ fixé et pour $|z|$ assez grand.

Nous ne savons pas si $\mathcal{E}$ est analytique et si les exposants de Lyapounov sont strictement positifs sauf si P est indépendant de z_2.

On peut construire la fonction de Green p.s.h., continue, positive, invariante : $G_1\circ f=dG_1$ et le courant de Green $T_1:=dd^cG_1$, positif, fermé, invariant par f : $f^*T_1=dT_1$. L'ensemble $\mathcal{K}_1:=\{z:G_1(z)=0\}$, qui est le complément du bassin d'attraction U_1 de $X_1:=[1:0:0]$, n'est pas compact et donc n'est pas égal à $\mathcal{K}$. Le seul point adhérent à $\mathcal{K}_1$ dans l'hyperplan à l'infini est l'unique point d'indétermination $I_1:=[0:1:0]$. On en déduit que si $z\in\mathcal{K}_1$ tend vers I_1, on a $|z_1|\lesssim|z_2|^{(d-1)/d}$ car $f(\mathcal{K}_1)=\mathcal{K}_1$. On a aussi $|f(z)|\simeq|b|\,|z|$. Le courant T_1 ne charge pas les ensembles pluripolaires car son potentiel G_1 est continu. Notons que $T_1\wedge T_1=0$ dans $\mathbf{C}^2$ car

$f^*(T_1\wedge T_1)=d^2T_1\wedge T_1$ et $d_t<d^2$. On a, d'après [6, théorème 3.2.1]

$$\mu=\lim_{n\to\infty}(f^n)^*\omega\wedge T_1=\lim_{n\to\infty}\mathrm{dd}^c u_n\wedge T_1$$

où $u_n(z):=\log^+|f^n(z)|-n\log|b|$.

Il est clair que $\lim_{n\to\infty}u_n=-\infty$ sur $\mathcal{K}$. La suite (u_n) converge uniformément sur les compacts de $\mathcal{K}_1\setminus\mathcal{K}$. En effet, on a, en posant $f^n(z)=w=(w_1,w_2)$

$$|u_{n+1}(z)-u_n(z)|\sim\log\left|\frac{aw_1+bw_2}{bw_2}\right|\sim\log\left|1+\frac{aw_1}{bw_2}\right|\sim\left|\frac{w_1}{w_2}\right|\lesssim\frac{1}{|w|^{1/d}}\lesssim\frac{1}{|c|^{n/d}}.$$

La constante c étant supérieure à 1, la fonction $u:=\lim_{n\to\infty}u_n$ est donc continue sur $\mathcal{K}_1\setminus\mathcal{K}$ et vérifie la relation $u\circ f=u+\log|b|$. Elle est T_1-p.s.h. sur $\mathcal{K}_1\setminus\mathcal{K}$ et tend vers $-\infty$ quand z tend vers $\mathcal{K}$.

5. Appendice: fonctions T-p.s.h.

Nous explicitons dans cet appendice quelques propriétés, que nous utilisons, des fonctions T-p.s.h., c.-à-d. les fonctions p.s.h. relativement à un courant positif fermé T. Ces propriétés sont classiques dans le cadre des fonctions p.s.h. et les démonstrations sont de simples extensions du cas des fonctions p.s.h. [1], [21], [5], [10].

Soit T un courant positif fermé de bidegré (j,j) dans une variété kählérienne V de dimension $k\geq 1$ (*voir* [5], [11], [15] pour les définitions de base). Rappelons cependant que pour un courant $T\geq 0$ de bidegré $(1,1)$, on a localement $T=\mathrm{dd}^c u$ où u est une fonction p.s.h. On dit que u est un *potentiel local* de T. Rappelons les définitions de [2]. Une fonction semi-continue supérieurement v sur $\operatorname{supp}T$ est dite *T-p.s.h.* si elle est localement limite décroissante d'une suite $(v^{(n)})$ de fonctions $\mathcal{C}^2$ vérifiant $\mathrm{dd}^c v^{(n)}\wedge T\geq 0$. On dira que v est *fortement T-p.s.h.* si les $v^{(n)}$ sont p.s.h. au voisinage du point considéré de $\operatorname{supp}T$. On pose

$$\sigma_T:=\frac{T\wedge\omega^{k-j}}{(k-j)!}$$

où ω désigne la forme de Kähler sur V. C'est *la mesure trace de T*. On pose $\|T\|_K:=\sigma_T(K)$.

Proposition 5.1. *Soient $L_1\Subset L_2$ deux compacts de V. Soit $v\in\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\sigma_T)$ une fonction T-p.s.h. Alors :*

(1) *Le courant $\mathrm{dd}^c v\wedge T:=\mathrm{dd}^c(vT)$ est positif fermé de bidegré $(j+1,j+1)$.*

(2) *Il existe une constante* $c_{L_1,L_2}>0$, *indépendante de* v *et des* v_i, *telle que* $\|dd^c v\wedge T\|_{L_1}\leq c_{L_1,L_2}\|vT\|_{L_2}$.

(3) *Si* $v_1,\dots,v_q$ *sont des fonctions* T*-p.s.h., localement bornées, on a*

$$\|dd^c v_1\wedge\dots\wedge dd^c v_q\wedge T\|_{L_1}\leq c_{L_1,L_2}\|v_1\|_{L^\infty(L_2)}\cdots\|v_q\|_{L^\infty(L_2)}\|T\|_{L_2}.$$

Preuve. Pour la positivité, il suffit d'observer que localement

$$dd^c(vT)=\lim_{n\to\infty}dd^c(v^{(n)}T)=\lim_{n\to\infty}dd^c v^{(n)}\wedge T\geq 0.$$

Soit χ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ à support dans L_2 et égale à 1 sur L_1. Posons $c_{L_1,L_2}:=\|dd^c\chi\|_{L^\infty(L_2)}$. Il suffit d'estimer par intégration par parties :

$$\|dd^c v\wedge T\|_{L_1}\leq\|\chi dd^c(vT)\|_{L_2}\leq\|dd^c\chi\wedge vT\|_{L_2}\leq c_{L_1,L_2}\|vT\|_{L_2}.$$

La dernière relation se démontre par récurrence sur q. □

Le résultat suivant est l'analogue du théorème de continuité de Bedford–Taylor [1] (*voir* aussi [5]).

Proposition 5.2. *Soient* $v_1,\dots,v_q$ *des fonctions* T*-p.s.h. localement bornées. Soient* $v_1^{(n)},\dots,v_q^{(n)}$ *des fonctions* T*-p.s.h. décroissant vers* $v_1,\dots,v_q$. *Alors*

(1) $v_1^{(n)}dd^c v_2^{(n)}\wedge\dots\wedge dd^c v_q^{(n)}\wedge T\rightharpoonup v_1 dd^c v_2\wedge\dots\wedge dd^c v_q\wedge T$ *faiblement*;

(2) $dd^c v_1^{(n)}\wedge\dots\wedge dd^c v_q^{(n)}\wedge T\rightharpoonup dd^c v_1\wedge\dots\wedge dd^c v_q\wedge T$ *faiblement.*

En particulier, l'application

$$(v_1,\dots,v_q)\mapsto dd^c v_1\wedge\dots\wedge dd^c v_q\wedge T$$

est symétrique en $v_1,\dots,v_q$. *Si l'on suppose que les* v_l *et* $v_l^{(n)}$ *sont fortement* T*-p.s.h., la décroissance est superflue, il suffit de supposer* $v_l^{(n)}\geq v_l$ *pour* $1\leq l\leq q$.

Preuve. Pour reprendre la démonstration de [1] et [5], il suffit de faire les remarques suivantes.

Soit χ une fonction convexe dans $\mathbf{R}^q$ croissante par rapport à chaque variable. Si $v_1,\dots,v_q$ sont T-p.s.h. alors $\chi(v_1,\dots,v_q)$ est T-p.s.h. En particulier, le sup d'un nombre fini de fonctions T-p.s.h. l'est aussi. Cela permet de se ramener au cas où V est la boule unité et toutes les fonctions $v_l^{(n)}$ sont égales à $|z|^2-1$ au voisinage de la sphère unité. On peut alors appliquer les intégrations par parties usuelles comme dans [1] ou [5].

Lorsque les fonctions sont fortement T-p.s.h., une utilisation du lemme de Hartogs comme dans [10, p. 405] permet de montrer le résultat. □

Proposition 5.3. (Chern–Levine–Nirenberg) *Soient $L_1 \Subset L_2$ deux compacts de V. Soient $v_1, \ldots, v_q$ des fonctions T-p.s.h. localement bornées. Alors il existe une constante $c_{L_1,L_2}>0$ telle que pour toute fonction T-p.s.h. $\varphi \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\sigma_T)$, on ait*

$$\|\varphi \mathrm{dd^c} v_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{dd^c} v_q \wedge T\|_{L_1} \le c_{L_1,L_2} \|\varphi\|_{\mathrm{L}^1(\sigma_T, L_2)} \|v_1\|_{\mathrm{L}^\infty(L_2)} \cdots \|v_q\|_{\mathrm{L}^\infty(L_2)}.$$

En particulier, si

$$T = \mathrm{dd^c} u_j \wedge \ldots \wedge \mathrm{dd^c} u_1$$

avec u_1 p.s.h. bornée et u_l fonction $(\mathrm{dd^c} u_{l-1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{dd^c} u_1)$-p.s.h. localement bornée pour tout $2 \le l \le j$, alors les fonctions p.s.h. sont localement σ_T-intégrables et T ne charge pas les ensembles pluripolaires.

Preuve. Il suffit de reprendre la démonstration de [5, p. 126] en introduisant le courant T (*voir* également [8]). Pour la commodité du lecteur, nous donnons ici la preuve. On se ramène au cas où L_1 et L_2 sont des boules centrées en 0 et de rayon respectif R' et R et où tous les v_j sont égaux à $|z|^2 - R^2$ pour $R' < |z| < R$. On peut aussi supposer que $j+q=k-1$. Soit $0 \le \chi \le R^2$ une fonction égale à $R^2 - |z|^2$ pour $|z| < R'$ et à support dans B_{R_1} la boule de centre 0 et de rayon R_1 avec $R' < R_1 < R$. On peut supposer $\varphi < 0$. On a pour un $c>0$ indépendant de φ,

$$\begin{aligned}
I &:= \int_{|z|<R'} -\varphi \mathrm{dd^c} v_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{dd^c} v_q \wedge T \wedge \mathrm{dd^c}|z|^2 \\
&= \int_{|z|<R_1} \varphi \mathrm{dd^c} v_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{dd^c} v_q \wedge T \wedge \mathrm{dd^c}\chi - \int_{R'<|z|<R_1} \varphi \mathrm{dd^c} v_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{dd^c} v_q \wedge T \wedge \mathrm{dd^c}\chi \\
&\le \int \chi \mathrm{dd^c}\varphi \wedge \mathrm{dd^c} v_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{dd^c} v_q \wedge T + c\|\varphi\|_{\mathrm{L}^1(\sigma_T, L_2)} \|v_1\|_{\mathrm{L}^\infty(L_2)} \cdots \|v_q\|_{\mathrm{L}^\infty(L_2)}
\end{aligned}$$

car $\mathrm{dd^c} v_j = \mathrm{dd^c}|z|^2$ sur le support de $\mathrm{dd^c}\chi$. Par suite,

$$I \le R^2 \int_{|z|<R_1} \mathrm{dd^c}\varphi \wedge \mathrm{dd^c} v_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{dd^c} v_q \wedge T + c\|\varphi\|_{\mathrm{L}^1(\sigma_T, L_2)} \|v_1\|_{\mathrm{L}^\infty(L_2)} \cdots \|v_q\|_{\mathrm{L}^\infty(L_2)}.$$

Il reste à majorer la dernière intégrale. Pour ceci, puisque φ est la limite décroissante de fonctions T-p.s.h. lisses, on peut supposer φ lisse et passer ensuite à la limite. Soit R_2 tel que $R_1 < R_2 < R$. D'après la proposition 5.2, on a

$$\begin{aligned}
\int_{|z|<R_1} \mathrm{dd^c}\varphi \wedge \mathrm{dd^c} v_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{dd^c} v_q \wedge T &= \int_{|z|<R_1} \mathrm{dd^c} v_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{dd^c} v_q \wedge \mathrm{dd^c}(\varphi T) \\
&\le c_1 \|v_1\|_{\mathrm{L}^\infty(L_2)} \cdots \|v_q\|_{\mathrm{L}^\infty(L_2)} \|\mathrm{dd^c}\varphi T\|_{\mathrm{L}^1(B_{R_2})} \\
&\le c_2 \|v_1\|_{\mathrm{L}^\infty(L_2)} \cdots \|v_q\|_{\mathrm{L}^\infty(L_2)} \|\varphi\|_{\mathrm{L}^1(\sigma_T, L_2)}.
\end{aligned}$$

Les dernières inégalités sont des conséquences de la proposition 5.1; c_1, c_2 sont des constantes indépendantes de φ. □

Enonçons un *théorème de comparaison* (*voir* [21]).

Proposition 5.4. *Soit V une variété de Stein de dimension $k\geq 1$. Soit ϱ une fonction lisse p.s.h. d'exhaustion de V, i.e. ϱ tend vers l'infini à l'infini. Posons $\omega:=dd^c\varrho$. Soit T un courant de bidegré $(k-1,k-1)$ positif fermé. Soient v_1, v_2 deux fonctions T-p.s.h. avec $v_j\in L^1_{loc}(\sigma_T)$. On suppose que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

(1) *Sur* $\operatorname{supp} T$, *on a $v_1\leq v_2$ à l'infini et $v_2\to+\infty$ à l'infini.*

(2) *Sur* $\operatorname{supp} T$, *on a $v_1\leq v_2$ à l'infini, $\int T\wedge dd^c\varrho<\infty$ et $v_2+\varepsilon\varrho\to+\infty$ à l'infini pour tout $\varepsilon>0$.*

Alors

$$\int_V dd^c v_1\wedge T\leq\int_V dd^c v_2\wedge T.$$

Preuve. D'après la proposition 5.2, il suffit de montrer la proposition pour $v_{i,M}:=\max\{v_i,-M\}$ puis de faire tendre M vers $+\infty$. On peut donc supposer que les v_i sont localement bornées. Soient $\varepsilon>0$ assez petit et $R>0$ assez grand. Posons pour le premier cas

$$W_\varepsilon:=\max\{v_1+A,(1+\varepsilon)v_2\}$$

et pour le second cas

$$W_\varepsilon:=\max\{v_1+A,v_2+\varepsilon\varrho\}.$$

La constante A est telle que sur $(v_2<R)$ (resp. sur $(v_2+\varepsilon\varrho<R)$ pour le second cas) on ait $W_\varepsilon=v_1+A$. Soit χ une fonction test à support compact, $0\leq\chi\leq 1$, $\chi=1$ sur $(v_2<R)$ (resp. sur $(v_2+\varepsilon\varrho<R)$) et telle que $(d\chi\neq 0)$ soit contenu dans l'ensemble où $W_\varepsilon=(1+\varepsilon)v_2$ (resp. $W_\varepsilon:=v_2+\varepsilon\varrho$). On a pour le premier cas

$$\begin{aligned}\int_{(v_2<R)} dd^c v_1\wedge T&=\int_{(v_2<R)} dd^c W_\varepsilon\wedge T\\&\leq\int\chi dd^c W_\varepsilon\wedge T\\&=\int W_\varepsilon dd^c\chi\wedge T\\&=\int(1+\varepsilon)v_2 dd^c\chi\wedge T\\&=(1+\varepsilon)\int dd^c\chi\wedge v_2T\\&=(1+\varepsilon)\int\chi dd^c v_2\wedge T\\&\leq(1+\varepsilon)\int_V dd^c v_2\wedge T.\end{aligned}$$

On peut faire tendre ε vers 0 puis R vers l'infini. Le second cas se démontre de la même manière. $\square$

Bibliographie

1. BEDFORD, E. et TAYLOR, B. A., A new capacity for plurisubharmonic functions, *Acta Math.* **149** (1982), 1–40.
2. BERNDTSSON, B. et SIBONY, N., The $\bar{\partial}$-equation on a positive current, *Invent. Math* **147** (2002), 371–428.
3. BRIEND, J.-Y. et DUVAL, J., Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de $\mathbf{CP}^k$, *Acta Math.* **182** (1999), 143–157.
4. BRIEND, J.-Y. et DUVAL, J., Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **93** (2001), 145–159.
5. DEMAILLY, J. P., Monge–Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory, dans *Complex Analysis and Geometry*, pp. 115–193, Plenum Press, New York, 1993.
6. DINH, T.-C. et SIBONY, N., Dynamique des applications d'allure polynomiale, *J. Math. Pures Appl.* **82** (2003), 367–423.
7. DINH, T.-C. et SIBONY, N., Green currents for holomorphic automorphisms of compact Kähler manifolds, *Prépublication*, 2003.
8. FAVRE, C. et GUEDJ, V., Dynamique des applications rationnelles des espaces multiprojectifs, *Indiana Univ. Math. J.* **50** (2001), 881–934.
9. FORNÆSS, J. E. et SIBONY, N., Complex dynamics in higher dimension, dans *Complex Potential Theory, (Montréal, PQ, 1993)*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. **439**, p. 131–186, Kluwer, Dordrecht, 1994.
10. FORNÆSS, J. E. et SIBONY, N., Oka's inequality for currents and applications, *Math. Ann.* **301** (1995), 399–419.
11. GRIFFITHS, P. et HARRIS, J., *Principles of Algebraic Geometry,*, Wiley, New York, 1994.
12. GUEDJ, V., Dynamics of polynomial mappings of $\mathbf{C}^2$, *Amer. J. Math.* **124** (2002), 75–106.
13. GUEDJ, V. et SIBONY, N., Dynamics of polynomial automorphisms of $\mathbf{C}^k$, *Ark. Mat.* **40** (2002), 207–243.
14. HUBBARD, J. H. et PAPADOPOL, P., Superattractive fixed points in $\mathbf{C}^n$, *Indiana Univ. Math. J.* **43** (1994), 321–365.
15. LELONG, P., *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives*, Dunod, Paris, 1968.
16. LYUBICH, M. YU., Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **3** (1983), 351–385.
17. MILNOR, J., *Dynamics in One Complex Variable, Introductory Lectures*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1999.
18. PLOSKI, A., On the growth of proper polynomial mappings, *Ann. Polon. Math.* **45** (1985), 297–309.
19. SIBONY, N., Dynamique des applications rationnelles de $\mathbf{P}^k$, dans *Dynamique et géométrie complexes* (*Lyon, 1997*), Panor. Synthèses **8**, p. 97–185, Soc. Math. France, Paris, 1999.
20. SKODA, H., Prolongement des courants positifs, fermés de masse finie, *Invent. Math.* **66** (1982), 361–376.

21. TAYLOR, B. A., An estimate for an extremal plurisubharmonic function on $\mathbf{C}^n$, dans *P. Lelong–P. Dolbeault–H. Skoda Analysis Seminar, 1981/1983*, Lectures Notes in Math. **1028**, p. 318–328, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

Reçu le 15 novembre 2002
Révisé le 6 octobre 2003

Tien-Cuong Dinh
Mathématique, Bât. 425
UMR 8628
Université Paris-Sud
FR-91405 Orsay
France
email: Tiencuong.Dinh@math.u-psud.fr

Nessim Sibony
Mathématique, Bât. 425
UMR 8628
Université Paris-Sud
FR-91405 Orsay
France
email: Nessim.Sibony@math.u-psud.fr