Ark. Mat., **50** (2012), 359–378
DOI: 10.1007/s11512-011-0163-3

Fonction maximale centrée de Hardy–Littlewood sur les espaces hyperboliques

Hong-Quan Li et Noël Lohoué

Résumé. On montre que la fonction maximale centrée de Hardy–Littlewood, M, sur les espaces hyperboliques réels $\mathbb{H}^n=\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^{n-1}$, satisfait l'inégalité de type faible $\|Mf\|_{L^{1,\infty}}\leq A(n\log n)\|f\|_1$ pour toute $f\in L^1(\mathbb{H}^n)$, où $A>0$ est une constante indépendante de la dimension n.

1. Introduction

Considérons la fonction maximale centrée standard de Hardy–Littlewood, M, sur $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}^*$, c'est-à-dire

$$Mf(x)=\sup_{h>0}\frac{1}{|B(x,h)|}\int_{B(x,h)}|f(y)|\,dy,\quad x\in\mathbb{R}^n \text{ et } f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n),$$

avec dy la mesure de Lebesgue, $|B(x,h)|$ le volume de la boule euclidienne de centre $x\in\mathbb{R}^n$ et de rayon $h>0$.

Par la propriété du triplement du volume, i.e.

$$|B(x,3h)|\leq 3^n|B(x,h)|,\quad x\in\mathbb{R}^n \text{ et } h>0,$$

on déduit du lemme de recouvrement de Vitali que M est de type faible $(1,1)$ avec

$$\|M\|_{L^1\to L^{1,\infty}}\leq 3^n.$$

Cependant, en utilisant le théorème ergodique maximal de Hopf–Dunford–Schwartz, Stein et Strömberg ont montré dans [15] qu'il existe une constante $A>0$, indépendante de n, telle que :

$$\|M\|_{L^1\to L^{1,\infty}}\leq A\phi(n),\quad \text{avec } \phi(n)=n. \tag{1.1}$$

Récemment, une estimation de type (1.1) a été obtenue dans le cadre des groupes de Heisenberg pour la fonction maximale centrée de Hardy–Littlewood définie soit par la distance de Carnot–Carathéodory, soit par la norme de Korányi, voir [9] pour le détail. On a aussi examiné dans [10] la fonction maximale M_G associée à la distance de Carnot–Carathéodory ou à la pseudo-distance liée à la solution fondamentale de l'opératuer de Grushin,

$$\Delta_G = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) \frac{\partial^2}{\partial u^2}.$$

On a obtenu l'estimation (1.1) pour M_G.

Comme on a déjà mentionné dans [10], les trois résultats ci-dessus s'expliquent en gros par une estimation de type

$$\inf_{\substack{n\geq 3\\ h>0\\ g\neq g'\in B(g,h)}} \phi(n)\frac{n}{h^2}|B(g,h)|(-\Delta)^{-1}(g,g') > 0, \quad \text{avec } \phi(n)=n, \tag{1.2}$$

dans le cadre des espaces euclidiennes et des groupes de Heisenberg, et dans le cadre des opérateurs de Grushin. En fait, le travail [10] est motivé par l'estimation (1.2). Aussi, les résultats de [15], de [9] et de [10] s'expliquent dans les grandes lignes par une estimation de type

$$\inf_{\substack{n\geq 3\\ h>0\\ g\neq g'\in B(g,h)}} \phi(n)\frac{\sqrt{n}}{h}|B(g,h)|(-\Delta)^{-1/2}(g,g') > 0. \tag{1.3}$$

Remarquons qu'en dehors d'une constante universelle, les deux terms n/h^2 et $\sqrt{n}/h$, qui se trouvent dans (1.2) et (1.3) respectivement, sont optimales. Observons aussi qu'il suffit de prendre $h=1$ dans les trois cas ci-dessus grâce à la structure de dilatation. Voir [9] et [10] pour les détails.

Pour démontrer les résultats de [9] et de [10], en utilisant le théorème ergodique maximal de Hopf–Dunford–Schwartz maximal comme dans [15], il suffit de montrer que pour une constante $U>0$, on a

$$\inf_{\substack{n\geq 3\\ h>0\\ g\neq g'\in B(g,h)}} \phi(n)|B(g,h)|\left(U\frac{h}{\sqrt{n}}\right)^{-1} \int_0^{Uh/\sqrt{n}} e^{-\lambda\sqrt{-\Delta}}(g,g')\,d\lambda > 0, \tag{1.4}$$

où $e^{-\lambda\sqrt{-\Delta}}(g,g')$, $\lambda>0$ désigne le noyau de Poisson. Ça nous conduit naturellement à étudier les estimations uniformément (en dimension) asymptotiques de $e^{-\lambda\sqrt{-\Delta}}(g,g')$. Observons que dans [15], Stein et Strömberg avaient utilisé le noyau de la chaleur, $e^{\lambda\Delta}(g,g')$ (on doit remplacer le terme $h/\sqrt{n}$ dans (1.4) par h^2/n et a besoin des estimations uniformément asymptotiques de $e^{\lambda\Delta}(g,g')$). Comme on a déjà vu dans le cadre des groupes de Heisenberg et des opérateurs de Grushin, c'est moins difficile d'obtenir les estimations uniformément asymptotiques de $e^{-\lambda\sqrt{-\Delta}}(g,g')$ que celles de $e^{\lambda\Delta}(g,g')$; en fait, on ne sait pas encore comment obtenir dans ces deux cas les estimations uniformément asymptotiques du noyau de la chaleur, bien que les estimations asymptotiques aient été obtenues dans [8] et dans [12] respectivement.

Le but principal de cet article est d'adapter les méthodes de [9] et de [10] dans des situations beaucoup plus compliquées.

Rappelons que pour un espace métrique mesuré à croissance exponentielle du volume, la propriété du triplement du volume n'est plus valable, et la continuité de $L^1 \to L^{1,\infty}$ de la fonction maximale centrée, M, n'est plus valable dans le cas général. Par exemple, pour tout $n \geq 2$ et tout $1 < p_0 < +\infty$, considérons $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}$ muni de la métrique hyperbolique d (voir (1.5) ci-après) et de la mesure

$$d\mu_{n,p_0}(y,x) = y^{-p_0/(2p_0-1)(n-1)-1}\, dy\, dx,$$

avec dx la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{n-1}$. On sait bien que $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}, d, d\mu_{n,p_0})$ est à croissance exponentielle du volume. Sur cet espace M est borné sur L^p pour $p > p_0$ mais pas pour $1 \leq p < p_0$, voir [7] pour les détails et pour plus d'exemples (lorsque $1 < p_0 < 2$, voir aussi [16] pour des contre-exemples des variétés riemanniennes de dimension 2). Cependant, dans le cadre des espaces symétriques de type non-compact, Clerc et Stein ont montré dans [3] que M est borné sur L^p pour tout $p > 1$, et Strömberg a montré dans [16] que M est aussi de type faible $(1,1)$. Les exemples typiques des espaces symétriques de type non-compact sont les espaces hyperboliques réels, $\mathbb{H}^n$, $n \geq 2$, on sait bien que $\mathbb{H}^n$ peut être considéré comme l'espace $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}$ muni de la métrique riemannienne

$$ds^2 = \frac{dy^2 + dx^2}{y^2}.$$

La mesure riemannienne induite s'écrit comme $d\mu(y,x) = y^{-n}\, dy\, dx$ avec dx la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{n-1}$, et la distance induite s'écrit comme

$$d((y,x),(u,w)) = \operatorname{arcosh} \frac{y^2 + u^2 + |x-w|^2}{2yu}, \quad (y,x),(u,w) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}, \tag{1.5}$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne.

Notons M la fonction maximale centrée de Hardy–Littlewood sur $\mathbb{H}^n$, le résultat principal de cet article est comme suit.

Théorème 1.1. *Il existe une constante $L > 0$ telle que pour tout $n \geq 2$, on a*

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}} \leq L(n \log n)\|f\|_1, \quad f \in L^1(\mathbb{H}^n). \tag{1.6}$$

Remarque 1.2. 1. L'estimation (1.6) est bien connue dans une vaste classe des espaces métriques mesurés satisfaisant la propriété du doublement du volume ; plus précisement, lorsque l'espace métrique mesuré, (M,ρ,σ), satisfait la propriété de «strong n-microdoubling with constant c», i.e.

$$\sigma\left(B\left(g',\left(1+\frac{1}{n}\right)h\right)\right)\leq c\sigma(B(g,h)),\quad g\in M,\ h>0 \text{ et } g'\in B(g,h), \tag{1.7}$$

il existe une constante $L=L(c)$, qui ne dépend que de $c>0$ telle que (1.6) soit vraie. Voir [14] pour les détails et [15] pour sa motivation. Rappelons que $\mathbb{H}^n$ est à croissance exponentielle du volume, donc il ne satisfait pas la propriété du doublement du volume. Par conséquent, $\mathbb{H}^n$ ne satisfait pas la propriété de «strong n-microdoubling with constant c». On ne peut donc pas utiliser le résultat de [14] dans cette situation.

2. Par les estimations (2.1) et (5.1) ci-après, il existe une constante $C>1$ telle que pour tous $n\geq 2$, $g\in\mathbb{H}^n$ et $d(g,g')>0$, on a

$$\frac{C^{-1}}{1+d^2(g,g')}\leq n^2\frac{1}{d^2(g,g')}|B(g,d(g,g'))|(-\Delta)^{-1}(g,g')\leq\frac{C}{1+d^2(g,g')}.$$

L'estimation (1.2) n'est plus valable lorsque $d(g,g')\geq\alpha(n)\to+\infty$. Afin de démontrer le Théorème 1.1, on utilisera la méthode de [16] pour traîter le cas où $d(g,g')\geq\alpha(n)$. Aussi, on devra modifier les estimations de type (1.2) et (1.3) sous la condition que $h\leq\alpha(n)$ (≥ 1) à cause de la structure spéciale de $\mathbb{H}^n$. Voir ci-après pour les détails.

1.1. Idée principale de la démonstration du Théorème 1.1

On explique brièvement d'où vient l'estimation (1.6).

Tout d'abord, par le résultat de [16], on peut supposer dans la suite $n\gg 1$. Afin de démontrer le Théorème 1.1, on écrit d'abord

$$\begin{aligned} Mf(g)\leq&\sup_{0<h<\varepsilon}\frac{1}{|B(g,h)|}\int_{B(g,h)}|f(g')|\,d\mu(g')\\ &+\sup_{\varepsilon\leq h<\alpha(n)}\frac{1}{|B(g,h)|}\int_{B(g,h)}|f(g')|\,d\mu(g')\\ &+\int_{\mathbb{H}^n}\frac{|f(g')|}{|B(g,\max\{\alpha(n),d(g,g')\})|}\,d\mu(g')\\ =&M_1f(g)+M_2f(g)+M_3f(g), \end{aligned} \tag{1.8}$$

avec $\varepsilon<1$ et $\alpha(n)\geq 1$ déterminés plus tard. En utilisant la méthode de [16], on peut montrer que pour

$$\alpha(n)=\operatorname{arcoth} e^{\log n/(n-1)}=\frac{1}{2}\log\left(2\frac{n-1}{\log n}\right)(1+o(1)),$$

il existe une constante $L>0$ telle que

$$\left|\left\{g\in\mathbb{H}^n;M_3f(g)>\frac{\lambda}{3}\right\}\right|\leq Ln\frac{\|f\|_1}{\lambda},\quad \text{pour tous } \lambda>0,\ f\in L^1 \text{ et } n\gg 1. \tag{1.9}$$

Pour traiter M_1 et M_2, on utilisera le théorème ergodique maximal de Hopf–Dunford–Schwartz maximal comme dans [15]. Dans [1], Anker et Ji ont obtenu les estimations asymptotiques du noyau de la chaleur et celles du noyau de Poisson sur les espaces symétriques de type non-compact ; cependant, leurs estimations ne sont pas uniformes en dimension, et elles sont insuffisantes pour notre tâche comme on a déjà vu dans les cadres des groupes de Heisenberg et des opérateurs de Grushin. Vraisemblablement, c'est impossible d'obtenir les estimations uniformément asymptotiques de $e^{-\lambda\sqrt{-\Delta}}$ (et de $e^{\lambda\Delta}$) dans le cadre des espaces hyperboliques réels. Observons qu'on peut aussi écrire dans (1.4) pour $\gamma_0>0$,

$$\begin{aligned}\int_0^{\gamma_0} e^{-\lambda\sqrt{-\Delta}}\,d\lambda &=(-\Delta)^{-1/2}-(-\Delta)^{-1/2}e^{-\gamma_0\sqrt{-\Delta}}\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}(\lambda^2-\Delta)^{-1}[1-\cos\gamma_0\lambda]\,d\lambda\\ &=\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}(\lambda^2-\Delta)^{-1}\sin^2\frac{\gamma_0\lambda}{2}\,d\lambda,\end{aligned}$$

et qu'une expression explicite de $(\lambda^2-\Delta)^{-1}$ a été obtenue par Matsumoto [13] via la fonction de Legendre associée.

On montrera qu'il existe une constante $L>0$ telle que

$$\left|\left\{g\in\mathbb{H}^n;M_1f(g)>\frac{\lambda}{3}\right\}\right|\leq Ln\frac{\|f\|_1}{\lambda},\quad \text{pour tous } \lambda>0,\ f\in L^1 \text{ et } n. \tag{1.10}$$

Pour ceci, il suffit d'établir une estimation de type (1.4). On rappelle que le trou spectral de $-\Delta$ sur $L^2(\mathbb{H}^n)$ est

$$\rho^2=\left(\frac{n-1}{2}\right)^2. \tag{1.11}$$

Afin de s'identifier avec (1.14) ci-dessous, on a avec $\varepsilon = \frac{1}{4}$,

$$(1.12)\qquad \inf_{\substack{n\geq 7\\ 0<h<\varepsilon\\ g\neq g'\in B(g,h)}} n|B(g,h)|\left(\frac{h}{\sqrt{\rho}}\right)^{-1}\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}(\lambda^2-\Delta)^{-1}(g,g')\sin^2\left(\frac{h}{\sqrt{\rho}}\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda>0.$$

Enfin, pour $\varepsilon = \frac{1}{4}$ et $\alpha(n)\geq 1$, on verra qu'il existe une constante $L>0$ telle que

$$(1.13)\qquad \left|\left\{g\in\mathbb{H}^n; M_2 f(g)>\frac{\lambda}{3}\right\}\right|\leq Ln\alpha(n)\frac{\|f\|_1}{\lambda},\quad \text{pour tous } \lambda>0,\ f\in L^1 \text{ et } n.$$

Pour expliquer à peu près l'estimation (1.13), il y a plusieurs façons : l'une est ce que pour maximiser

$$\frac{1}{\gamma_0}\int_0^{\gamma_0} e^{\lambda\Delta}(g,g')\,d\lambda,\quad \text{avec } d(g,g')\gg 1,$$

en rappelant le facteur

$$e^{-d^2(g,g')/4\lambda-\rho^2\lambda-\rho d(g,g')},$$

qui se trouve dans l'estimation de $e^{\lambda\Delta}(g,g')$, on doit choisir $\gamma_0 = d(g,g')/\rho$ à une constante universelle près. Donc, dans (1.2), pour $h\geq 1$, on doit remplacer le terme n/h^2 par ρ/h ; l'estimation de $(-\Delta)^{-1}$ (voir (5.1) ci-après) implique (1.13).

Afin de démontrer rigoureusement (1.13), on établira l'estimation

$$(1.14)\qquad \inf_{\substack{n\geq 7\\ 1/4\leq h\leq\alpha(n)\\ g\neq g'\in B(g,h)}} n\alpha(n)|B(g,h)|\left(\sqrt{\frac{h}{\rho}}\right)^{-1}\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}(\lambda^2-\Delta)^{-1}(g,g')\sin^2\left(\sqrt{\frac{h}{\rho}}\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda>0.$$

De plus, on montrera que, le terme $\sqrt{h/\rho}$ dans (1.14) est optimal à une constante universelle près. Donc, en continuant à utiliser les méthodes de cet article, la seule possibilité pour améliorer l'estimation (1.6) serait l'amélioration de la valeur de $\alpha(n)$ provenant de (1.8).

1.2. Extension potentielle

Le théorème principal peut se généraliser dans plusieurs directions. Nous n'avons écrit la preuve que pour les espaces hyperboliques réels mais on a la même preuve pour les autres espaces hyperboliques ou bien pour les groupes AN harmoniques, où un groupe AN est l'extension soluble d'un groupe de type Heisenberg N. La preuve analogue est probablement correcte pour les espaces symétriques de type non-compact.

Une estimation de type

$$\|Mf\|_p \le C_p \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{H}^n),\ 1 < p < +\infty,$$

vient d'être obtenue par une méthode naturelle qui peut aussi s'adapter facilement dans le cadre des groupes AN harmoniques, voir [11] pour les détails.

Cet article est organisé de la façon suivante : on évaluera $|B(g,h)|$ (avec $g \in \mathbb{H}^n$ et $h>0$) dans la section 2. On montrera (1.9) dans la section 3. La démonstration de (1.10) sera donnée dans la section 4 et dans la section 5 pour (1.13).

1.3. Notations

Dans toute la suite, c, c', A, etc. désigneront des constantes universelles qui peuvent changer d'une ligne à l'autre.

Pour deux fonctions f et g, on dit que $f \sim_1 g$ s'il existe une constante $A>1$ telle que $A^{-1} f \le g \le Af$.

2. Évaluations de $|B(g,h)|$

Dans cet article, on aura besoin des estimations du volumes des boules dans $\mathbb{H}^n$. Rappelons que $|B(g,h)|$ ne dépend pas de $g \in \mathbb{H}^n$, posons dans la suite

$$V(h) = |B(g,h)|,$$

$$\upsilon(h) = \sinh^{n-1}(h) \min\{1, \sinh h\},$$

$$\omega_{n-1} = 2\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \qquad \text{la surface de la sphère unitaire de } \mathbb{R}^n,$$

$$\Omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} \qquad \text{le volume de la boule unitaire de } \mathbb{R}^n.$$

Proposition 2.1. *Il existe deux constantes $c, C>0$, indépendantes de $n \ge 2$, telles que*

$$c\Omega_n \upsilon(h) \le V(h) \le C\Omega_n \upsilon(h), \quad h > 0. \tag{2.1}$$

Remarque 2.2. Par (2.1), on voit facilement que $\mathbb{H}^n$ ne satisfait pas l'estimation de type (1.7).

Preuve. On rappelle que (voir [6], p. 153) :

$$V(h)=\omega_{n-1}\int_0^h \sinh^{n-1} r\,dr=\omega_{n-1}\int_0^{\sinh h}\frac{y^{n-1}}{\sqrt{1+y^2}}\,dy,$$

par le changement de variable $y=\sinh r$. De plus, on a pour $0<h\le 1$,

$$\int_0^{\sinh h}\frac{y^{n-1}}{\sqrt{1+y^2}}\,dy\sim_1\int_0^{\sinh h} y^{n-1}\,dy=\frac{1}{n}\sinh^n h.$$

Pour $h>1$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\sinh h}\frac{y^{n-1}}{\sqrt{1+y^2}}\,dy&\sim_1\int_0^1 y^{n-1}\,dy+\int_1^{\sinh h} y^{n-2}\,dy\\&=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}[\sinh^{n-1}h-1]\sim_1\frac{1}{n}\sinh^{n-1}h.\end{aligned}$$

On a donc montré (2.1). □

3. Le choix de $\alpha(n)$ et la preuve de (1.9)

Le but de cette section est de démontrer l'estimation (1.9) en choisissant bien $\alpha(n)\ge 1$.

(2.1) implique qu'il existe une constante $c>0$ telle que pour tous $g=(y,x)$, $g'=(u,w)\in\mathbb{H}^n$ satisfaisant $\varsigma=d(g,g')\ge\alpha(n)$, on a

$$\begin{aligned}V(\max\{\alpha(n),\varsigma\})&\ge c\Omega_n\sinh^{n-1}\varsigma=c\Omega_n\cosh^{n-1}\varsigma\tanh^{n-1}\varsigma\\&\ge c\Omega_n(\tanh\alpha(n))^{n-1}\left(\frac{y^2+u^2+|x-w|^2}{2yu}\right)^{n-1},\end{aligned}$$

par (1.5) et le fait que $\tanh r$ est strictement croissante pour $r>0$.

Donc, pour toute $f\in L^1(\mathbb{H}^n)$ et tout $g=(y,x)\in\mathbb{H}^n$, on a

$$\begin{aligned}M_3f(g)&\le c^{-1}\Omega_n^{-1}(\coth\alpha(n))^{n-1}\int_{\mathbb{H}^n}\left(\frac{2yu}{y^2+u^2+|x-w|^2}\right)^{n-1}|f(u,w)|u^{-n}\,du\,dw\\&\le y^{n-1}\Phi_nf(x),\end{aligned}$$

où on a noté

$$\Phi_nf(x)=c^{-1}2^{n-1}\Omega_n^{-1}(\coth\alpha(n))^{n-1}\int_{\mathbb{H}^n}\left(\frac{u}{u^2+|x-w|^2}\right)^{n-1}|f(u,w)|u^{-n}\,du\,dw.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\left|\left\{(y,x); M_3 f(y,x) > \frac{\lambda}{3}\right\}\right| &\leq \left|\left\{(y,x); y^{n-1}\Phi_n f(x) > \frac{\lambda}{3}\right\}\right| \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{(\lambda/3\Phi_n f(x))^{1/(n-1)}}^{+\infty} y^{-n}\, dy\right] dx \\ &= \frac{1}{n-1}\frac{3}{\lambda} c^{-1} 2^{n-1}\Omega_n^{-1}(\coth\alpha(n))^{n-1} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{H}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\frac{u}{u^2+|x-w|^2}\right)^{n-1} dx\right]|f(u,w)|u^{-n}\,du\,dw.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\frac{u}{u^2+|x-w|^2}\right)^{n-1} dx &= \omega_{n-2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{u^2+r^2}\right)^{n-1} r^{n-2}\,dr \\ &= \omega_{n-2}\int_0^{+\infty} h^{n-2}(1+h^2)^{1-n}\,dh \\ &= \frac{1}{2}\omega_{n-2} B\left(\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2}\right)\end{aligned}$$

voir [5], p. 10, (16), on en déduit que

$$\begin{aligned}&\left|\left\{(y,x); M_3 f(y,x) > \frac{\lambda}{3}\right\}\right| \\ &\qquad \leq \frac{1}{n-1}\frac{3}{\lambda} c^{-1} 2^{n-2} B\left(\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2}\right)\frac{\omega_{n-2}}{\Omega_n}(\coth\alpha(n))^{n-1}\|f\|_{L^1}.\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}2^{n-2}B\left(\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2}\right) &= 2^{n-2}\frac{\Gamma((n-1)/2)\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(2(n-1)/2)} \\ &= \sqrt{\pi}\frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(n/2)}\end{aligned}$$

(voir [5], p. 5), et

$$\frac{\omega_{n-2}}{\Omega_n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{n\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)},$$

on a donc

$$\left|\left\{(y,x); M_3 f(y,x) > \frac{\lambda}{3}\right\}\right| \leq \frac{n}{n-1}\frac{3}{\lambda} c^{-1}(\coth\alpha(n))^{n-1}\|f\|_{L^1}.$$

En choisissant

$$\alpha(n) = \operatorname{arcoth} e^{\log n/(n-1)} = \frac{1}{2}\log\left(2\frac{n-1}{\log n}\right)(1+o(1)), \quad n \to +\infty,$$

on obtient immédiatement (1.9). □

4. Le choix de ε et la preuve de (1.10)

Par les propriétés élémentaires du noyau de la chaleur sur les variétés riemanniennes complètes, non compactes avec courbure de Ricci minorée (voir par exemple [2]), en utilisant

$$e^{-s\sqrt{-\Delta}} = \frac{s}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^{-3/2} e^{-s^2/4t} e^{t\Delta}\, dt, \quad s > 0,$$

on sait bien que

$$e^{-s\sqrt{-\Delta}}(g, g') \geq 0, \ g, g' \in \mathbb{H}^n, \quad \text{et} \quad \|e^{-s\sqrt{-\Delta}}\|_1 = 1, \ s > 0.$$

Par le théorème ergodique maximal de Hopf–Dunford–Schwartz (voir [4], p. 690–691), on a

$$\left|\left\{g; \sup_{t>0} \frac{1}{t}\int_0^t e^{-s\sqrt{-\Delta}} f(g)\, ds > \lambda\right\}\right| \leq \frac{2}{\lambda}\|f\|_1, \quad \text{pour tous } \lambda > 0 \text{ et } f \in L^1(\mathbb{H}^n).$$

Pour montrer (1.10), il nous reste à montrer qu'il existe une constante $A>0$ telle que pour n assez grand, on a

$$M_1 f(g) \leq An \sup_{t>0} \frac{1}{t}\int_0^t e^{-s\sqrt{-\Delta}} f(g)\, ds, \quad \text{pour tous } g \in \mathbb{H}^n \text{ et } 0 \leq f \in L^1(\mathbb{H}^n).$$

Donc, par la définition de M_1, il suffit de démontrer (1.12). Pour ceci, on aura besoin des

4.1. Propriétés des fonctions hypergéométriques de Gauss

Lorsque $c>b>0$ et $a>0$ satisfaisant $a+b<c$, on sait que (voir [5], p. 56–57) la fonction hypergéométrique de Gauss $F(a, b; c; \cdot) \in C^1(0,1)$ est continue et strictement croissante sur $[0,1]$. Rappelons aussi que (voir [5], p. 61, (14) et p. 58, (7))

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},$$

$$\frac{d}{dr}F(a,b;c;r)=\frac{ab}{c}F(a+1,b+1;c+1;r).$$

En particulier, pour $\alpha\geq\beta>1$, on a

$$F(1+\alpha-\beta,1+\alpha;2+2\alpha;1)=\frac{\Gamma(2+2\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)}, \tag{4.1}$$

$$\frac{d}{dr}F(1+\alpha-\beta,1+\alpha;2+2\alpha;r)=\frac{1+\alpha-\beta}{2}F(2+\alpha-\beta,2+\alpha;3+2\alpha;r). \tag{4.2}$$

Par le théorème des accroissements finis, on a, avec $1/\cosh^2(r/2)<\phi<1$

$$\begin{aligned}0&\leq F(1+\alpha-\beta,1+\alpha;2+2\alpha;1)-F\left(1+\alpha-\beta,1+\alpha;2+2\alpha;\frac{1}{\cosh^2 r/2}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{\cosh^2 r/2}\right)\frac{d}{ds}\bigg|_{s=\phi}F(1+\alpha-\beta,1+\alpha;2+2\alpha;s)\\&\leq\frac{1+\alpha-\beta}{2}F(2+\alpha-\beta,2+\alpha;3+2\alpha;1)\tanh^2\frac{r}{2}\\&=\frac{\Gamma(2+2\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)}\frac{1}{\beta-1}(1+\alpha)(1+\alpha-\beta)\tanh^2\frac{r}{2}.\end{aligned}$$

Par le fait que

$$\begin{aligned}&F\left(1+\alpha-\beta,1+\alpha;2+2\alpha;\frac{1}{\cosh^2 r/2}\right)\\&\qquad=F(1+\alpha-\beta,1+\alpha;2+2\alpha;1)\\&\qquad\quad-\left[F(1+\alpha-\beta,1+\alpha;2+2\alpha;1)-F\left(1+\alpha-\beta,1+\alpha;2+2\alpha;\frac{1}{\cosh^2 r/2}\right)\right],\end{aligned}$$

on a donc,

$$\begin{aligned}&F\left(1+\alpha-\beta,1+\alpha;2+2\alpha;\frac{1}{\cosh^2 r/2}\right)\geq\frac{1}{2}\frac{\Gamma(2+2\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)},\\&\qquad\text{lorsque }\frac{1}{\beta-1}(1+\alpha)(1+\alpha-\beta)\tanh^2\frac{r}{2}\leq\frac{1}{2}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

On donne maintenant la preuve de (1.12).

4.2. Preuve de (1.12)

Par le Theorem 3.3 de [13], on a

$$(\lambda^2-\Delta)^{-1}(g,g')=(2\pi)^{-n/2}(\sinh\varsigma)^{-(n-2)/2}e^{-i(\pi(n-2)/2)}Q_{\theta_n(\lambda)}^{(n-2)/2}(\cosh\varsigma), \tag{4.4}$$

avec

$$\theta_n(\lambda)=\sqrt{\lambda^2+\rho^2}-\frac{1}{2}=\sqrt{\lambda^2+\frac{(n-1)^2}{4}}-\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \varsigma=d(g,g'), \tag{4.5}$$

et la fonction de Legendre du second genre $Q_\alpha^\beta(\cosh r)$ (avec $\alpha,\beta>0$ et $r\geq 0$) est définie par (voir [5], p. 132–133) :

$$\begin{aligned} e^{-i\pi\beta}Q_\alpha^\beta(\cosh r) &= \frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2\alpha+2)(\sinh r)^\beta}\left(2\cosh^2\frac{r}{2}\right)^{\beta-\alpha-1} \\ &\quad\times F\left(1+\alpha-\beta,1+\alpha;2+2\alpha;\frac{1}{\cosh^2 r/2}\right) \\ &= \frac{2^{\beta-1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2\alpha+2)(\sinh r)^\beta e^{2(\alpha+1-\beta)\log\cosh r/2}} \\ &\quad\times F\left(1+\alpha-\beta,1+\alpha;2+2\alpha;\frac{1}{\cosh^2 r/2}\right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

On a l'inégalité

$$\int_0^{+\infty}(\lambda^2-\Delta)^{-1}(g,g')\sin^2\left(\frac{h}{\sqrt{\rho}}\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda \geq \left(\sin\frac{1}{12}\right)^2\int_{\sqrt{\rho}/6h}^{\sqrt{\rho}/4h}(\lambda^2-\Delta)^{-1}(g,g')\,d\lambda.$$

Pour $n\geq 7$, on constate d'abord que

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\lambda^2+\rho^2}\right)(1+\sqrt{\lambda^2+\rho^2}-\rho) &= \left(\frac{1}{2}+\sqrt{\lambda^2+\rho^2}\right)\left(1+\frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2+\rho^2}+\rho}\right) \\ &\leq \lambda^2+\left(\tfrac{1}{2}+\sqrt{\lambda^2+\rho^2}\right)\leq 4(\lambda^2+\rho),\end{aligned}$$

puis, par le fait que $(n-2)/2-1\geq\rho/2$ et le fait que $\tanh s\leq s$ pour $s\geq 0$, que pour tout $\sqrt{\rho}/6h<\lambda<\sqrt{\rho}/4h$, on a

$$\frac{(2^{-1}+\sqrt{\lambda^2+\rho^2})}{(n-2)/2-1}(1+\sqrt{\lambda^2+\rho^2}-\rho)\tanh^2\frac{\varsigma}{2}\leq 2\left(\lambda\frac{\varsigma}{\sqrt{\rho}}\right)^2+2\varsigma^2<\frac{1}{8}\left(\frac{\varsigma}{h}\right)^2+2\varsigma^2<\frac{1}{2},$$

lorsque $0<\varsigma=d(g,g')<\frac{1}{4}$ et $\varsigma<h$. Par (4.4), (4.6) et (4.3), on a donc

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}(\lambda^2-\Delta)^{-1}(g,g')\sin^2\left(\frac{h}{\sqrt{\rho}}\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda \\ \geq\left(\sin\frac{1}{12}\right)^2\frac{1}{8}(\sinh\varsigma)^{2-n}\pi^{-n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right) \\ \times\int_{\sqrt{\rho}/6h}^{\sqrt{\rho}/4h}e^{-2(1+\sqrt{\lambda^2+(n-1)^2/4}-(n-1)/2)\log\cosh\varsigma/2}\,d\lambda.\end{aligned}$$

Comme $\log(1+r)\leq r$ et $\cosh r-1\leq r^2$ pour tout $0\leq r\leq 1$, pour $n\geq 7$, $0<\varsigma=d(g,g')<\frac{1}{4}$, $\varsigma<h$ et $\sqrt{\rho}/6h<\lambda<\sqrt{\rho}/4h$, on a

$$\begin{aligned}&\left(1+\sqrt{\lambda^2+\frac{(n-1)^2}{4}}-\frac{n-1}{2}\right)\log\cosh\frac{\varsigma}{2} \\ &\quad=\left(1+\frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2+(n-1)^2/4}+(n-1)/2}\right)\log\left[1+\left(\cosh\frac{\varsigma}{2}-1\right)\right] \\ &\quad\leq\left(1+\frac{\lambda^2}{n-1}\right)\varsigma^2 \\ &\quad\leq 1.\end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant le fait que

$$\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)=\Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

on voit qu'il existe une constante $c>0$ telle que pour tout $n\geq 7$, $0<\varsigma=d(g,g')<\frac{1}{4}$ et $\varsigma<h$,

$$\int_0^{+\infty}(\lambda^2-\Delta)^{-1}(g,g')\sin^2\left(\frac{h}{\sqrt{\rho}}\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda\geq c(\sinh\varsigma)^{2-n}\pi^{-n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)h^{-1}\rho^{-1/2}. \tag{4.7}$$

(2.1) donne immédiatement (1.12) avec $\varepsilon=\frac{1}{4}$. □

5. Preuve de (1.13)

Comme on a déjà expliqué au début de la section 4, pour démontrer (1.13), il suffit d'établir l'estimation (1.14). Pour ceci, on utilisera (4.4) et (5.3).

On distinguera deux cas : $0<\varsigma=d(g,g')<\frac{1}{4}$ et $\varsigma\geq\frac{1}{4}$.

Cas 1. $0<\varsigma=d(g,g')<\frac{1}{4}$. Par (4.7) et (2.1), on a immédiatement

$$\inf_{\substack{n\geq 7\\ h\geq 1/4\\ 0<d(g,g')<1/4}} n|B(g,h)|\left(\sqrt{\frac{h}{\rho}}\right)^{-1}\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}(\lambda^2-\Delta)^{-1}(g,g')\sin^2\left(\sqrt{\frac{h}{\rho}}\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda>0.$$

Cas 2. $\varsigma\geq\frac{1}{4}$. Remarquons d'abord que

$$\int_0^{+\infty}(\lambda^2-\Delta)^{-1}(g,g')\sin^2\left(\sqrt{\frac{h}{\rho}}\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda$$

$$\geq\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\int_0^{\sqrt{\rho/h}/4}(\lambda^2-\Delta)^{-1}(g,g')\left(\sqrt{\frac{h}{\rho}}\frac{\lambda}{2}\right)^2d\lambda,$$

puisque

$$\frac{\sin s}{s}\geq\frac{2}{\pi},\quad 0\leq s\leq\frac{\pi}{2}.$$

On a besoin du lemme suivant dont la preuve sera donnée plus tard.

Lemme 5.1. *Il existe une constante $C>1$ telle que pour tout $n\geq 7$, tout $0\leq\lambda\leq\sqrt{\rho}$ et tout $\varsigma=d(g,g')>0$, on a*

$$C^{-1}\leq\frac{(\lambda^2-\Delta)^{-1}(g,g')}{n^{-2}\Omega_n^{-1}(\sinh\varsigma)^{2-n}\min\{1,(\sinh\varsigma)^{-1-\lambda^2/(\rho+\sqrt{\lambda^2+\rho^2})}\}}\leq C.\tag{5.1}$$

On admet le lemme pour l'instant et on continue avec la démonstration de (1.14) dans le cas où $\varsigma\geq\frac{1}{4}$.

Comme $\frac{1}{4}\leq\varsigma<h$, par (5.1), on a

$$\int_0^{+\infty}(\lambda^2-\Delta)^{-1}(g,g')\sin^2\left(\sqrt{\frac{h}{\rho}}\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda$$

$$\geq cn^{-2}\Omega_n^{-1}(\sinh\varsigma)^{1-n}\int_0^{\sqrt{\rho/h}/4}(\sinh\varsigma)^{-\lambda^2/(\rho+\sqrt{\lambda^2+\rho^2})}\left(\sqrt{\frac{h}{\rho}}\frac{\lambda}{2}\right)^2d\lambda$$

$$\geq cn^{-2}\Omega_n^{-1}(\sinh\varsigma)^{1-n}\int_0^{\sqrt{\rho/h}/4}e^{-\lambda^2/2\rho\varsigma}\left(\sqrt{\frac{h}{\rho}}\frac{\lambda}{2}\right)^2d\lambda$$

$$\geq ce^{-1}n^{-2}\Omega_n^{-1}(\sinh\varsigma)^{1-n}\int_0^{\sqrt{\rho/h}/4}\left(\sqrt{\frac{h}{\rho}}\frac{\lambda}{2}\right)^2 d\lambda$$

$$=c'n^{-2}\Omega_n^{-1}(\sinh\varsigma)^{1-n}\sqrt{\frac{\rho}{h}}. \tag{5.2}$$

(2.1) implique immédiatement (1.14) avec $\varsigma\geq\frac{1}{4}$.

5.1. Preuve de (5.1)

Rappelons que (voir [5], p. 155) :

$$e^{-i(\pi\beta)}Q_\alpha^\beta(\cosh r)$$
$$=2^{-\alpha-1}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)}(\sinh r)^{-\beta}\int_0^\pi(\cosh r+\cos t)^{\beta-\alpha-1}(\sin t)^{2\alpha+1}\,dt. \tag{5.3}$$

D'après (4.4) et (5.3), on a

$$(\lambda^2-\Delta)^{-1}(g,g')=(2\pi)^{-n/2}(\sinh\varsigma)^{2-n}2^{-\theta_n(\lambda)-1}\frac{\Gamma(\theta_n(\lambda)+(n-2)/2+1)}{\Gamma(\theta_n(\lambda)+1)}$$
$$\times\int_0^\pi(\cosh\varsigma+\cos t)^{\rho-\sqrt{\lambda^2+\rho^2}-1}(\sin t)^{2\theta_n(\lambda)+1}\,dt. \tag{5.4}$$

Posons dans la suite,

$$\eta(\rho,\lambda)=\rho-\sqrt{\lambda^2+\rho^2}=-\frac{\lambda^2}{\rho+\sqrt{\lambda^2+\rho^2}},\quad \lambda\geq 0. \tag{5.5}$$

Lorsque $0\leq\lambda\leq\sqrt{\rho}$, on a $-1\leq\eta(\rho,\lambda)\leq 0$, donc,

$$\int_0^\pi(\cosh\varsigma+\cos t)^{\eta(\rho,\lambda)-1}(\sin t)^{2\theta_n(\lambda)+1}\,dt$$
$$\sim_1\int_0^{\pi/2}(\cosh\varsigma-\cos t)^{\eta(\rho,\lambda)-1}(\sin t)^{2\theta_n(\lambda)+1}\,dt$$
$$=\int_0^{\pi/2}(\cosh\varsigma+\cos t)^{1-\eta(\rho,\lambda)}(\cosh^2\varsigma-\cos^2 t)^{\eta(\rho,\lambda)-1}(\sin t)^{2\theta_n(\lambda)+1}\,dt$$
$$\sim_1(\cosh\varsigma)^{-\eta(\rho,\lambda)+1}\int_0^{\pi/2}(\sinh^2\varsigma+\sin^2 t)^{\eta(\rho,\lambda)-1}(\sin t)^{2\theta_n(\lambda)+1}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}(\cosh\varsigma)^{-\eta(\rho,\lambda)+1}\int_0^1\frac{y^{\theta_n(\lambda)}}{\sqrt{1-y}}(y+\sinh^2\varsigma)^{\eta(\rho,\lambda)-1}\,dy.$$

Dans le cas où $\varsigma \geq \frac{1}{4}$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{y^{\theta_n(\lambda)}}{\sqrt{1-y}}(y+\sinh^2\varsigma)^{\eta(\rho,\lambda)-1}\,dy &\sim_1 (\sinh^2\varsigma)^{\eta(\rho,\lambda)-1}\int_0^1 \frac{y^{\theta_n(\lambda)}}{\sqrt{1-y}}\,dy\\ &= (\sinh^2\varsigma)^{\eta(\rho,\lambda)-1}B\left(\theta_n(\lambda)+1,\frac{1}{2}\right)\\ &\sim_1 \rho^{-1/2}(\sinh\varsigma)^{2(\eta(\rho,\lambda)-1)},\end{aligned}$$

puisque $\lambda \leq \sqrt{\rho}$ et la formule de Stirling impliquent que

$$\begin{aligned}B\left(\theta_n(\lambda)+1,\frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\theta_n(\lambda)+1)}{\Gamma\left(\theta_n(\lambda)+\frac{3}{2}\right)}\\ &= \sqrt{\pi}(\theta_n(\lambda)+1)^{-1/2}(1+o(1)) = \sqrt{2\pi}\rho^{-1/2}(1+o(1)), \quad n\to+\infty.\end{aligned}$$

Dans le cas où $\varsigma < \frac{1}{4}$, de la même façon, on a

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{y^{\theta_n(\lambda)}}{\sqrt{1-y}}(y+\sinh^2\varsigma)^{\eta(\rho,\lambda)-1}\,dy\\ &\qquad = \int_0^{\sinh^2\varsigma} + \int_{\sinh^2\varsigma}^1\\ &\qquad \sim_1 (\sinh\varsigma)^{2(\eta(\rho,\lambda)-1)}\int_0^{\sinh^2\varsigma}\frac{y^{\theta_n(\lambda)}}{\sqrt{1-y}}\,dy + \int_{\sinh^2\varsigma}^1 \frac{y^{\theta_n(\lambda)+\eta(\rho,\lambda)-1}}{\sqrt{1-y}}\,dy\\ &\qquad = \int_0^1 \frac{y^{\theta_n(\lambda)+\eta(\rho,\lambda)-1}}{\sqrt{1-y}}\,dy + \int_0^{\sinh^2\varsigma}\frac{y^{\theta_n(\lambda)}}{\sqrt{1-y}}[(\sinh^2\varsigma)^{\eta(\rho,\lambda)-1} - y^{\eta(\rho,\lambda)-1}]\,dy\\ &\qquad \sim_1 \rho^{-1/2}.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}(\lambda^2-\Delta)^{-1}(g,g') \sim_1 (2\pi)^{-n/2}2^{-\theta_n(\lambda)-1}\frac{\Gamma(\theta_n(\lambda)+(n-2)/2+1)}{\Gamma(\theta_n(\lambda)+1)}\rho^{-1/2}(\sinh\varsigma)^{2-n}\\ \times\min\{1,(\sinh\varsigma)^{\eta(\rho,\lambda)-1}\},\end{aligned}$$

pour tous $n \geq 7$, $\varsigma = d(g,g') > 0$ et $0 \leq \lambda \leq \sqrt{\rho}$. Pour terminer la preuve de (5.1), il nous reste à montrer que

$$2^{-\theta_n(\lambda)-n/2-1}\frac{\Gamma(\theta_n(\lambda)+(n-2)/2+1)}{\Gamma(\theta_n(\lambda)+1)\Gamma((n-2)/2)}n^{-1/2} \sim_1 1. \tag{5.6}$$

En effet, par la formule de Stirling, on a

$$\begin{aligned}
&2^{-\theta_n(\lambda)-n/2-1}\frac{\Gamma(\theta_n(\lambda)+(n-2)/2+1)}{\Gamma(\theta_n(\lambda)+1)\Gamma((n-2)/2)}n^{-1/2}\\
&\quad\sim_1 \left(\frac{\theta_n(\lambda)+(n-2)/2+1}{2(\theta_n(\lambda)+1)}\right)^{\theta_n(\lambda)+1}\left(\frac{\theta_n(\lambda)+(n-2)/2+1}{2((n-2)/2)}\right)^{n-2/2}\\
&\quad=\exp\left\{(\theta_n(\lambda)+1)\log\left(1-\frac{2+\theta_n(\lambda)-n/2}{2(\theta_n(\lambda)+1)}\right)+\frac{n-2}{2}\log\left(1+\frac{2+\theta_n(\lambda)-n/2}{n-2}\right)\right\}\\
&\quad\sim_1 1.
\end{aligned}$$

On a donc montré (5.1).

5.2. Explication pour le choix de $\sqrt{\rho/h}$ dans (1.14)

Le but de cette sous-section est de montrer que dans (1.14), le choix de $\sqrt{\rho/h}$ est optimal à une constante universelle près. Autrement dit, il existe une constante $c>0$ telle que pour tout n assez grand et tout $h=\varsigma=d(g,g')\geq 1$ et tout $\gamma_0>0$, on a

$$\begin{aligned}
&\gamma_0^{-1}\int_0^{+\infty}(\lambda^2-\Delta)^{-1}(g,g')\sin^2\left(\gamma_0\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda\\
&\qquad\leq c\left(\sqrt{\frac{h}{\rho}}\right)^{-1}\int_0^{+\infty}(\lambda^2-\Delta)^{-1}(g,g')\sin^2\left(\sqrt{\frac{h}{\rho}}\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda.
\end{aligned}$$

Par (5.2), il suffit de démontrer que

$$\gamma_0^{-1}\int_0^{+\infty}(\lambda^2-\Delta)^{-1}(g,g')\sin^2\left(\gamma_0\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda\leq cn^{-2}\Omega_n^{-1}(\sinh\varsigma)^{1-n}\frac{\rho}{\varsigma}. \tag{5.7}$$

En effet, (5.4) implique que

$$\begin{aligned}
(\lambda^2-\Delta)^{-1}(g,g')&\leq(2\pi)^{-n/2}(\sinh\varsigma)^{2-n}2^{-\theta_n(\lambda)-1}\frac{\Gamma(\theta_n(\lambda)+(n-2)/2+1)}{\Gamma(\theta_n(\lambda)+1)}\\
&\qquad\times(\cosh\varsigma-1)^{\rho-\sqrt{\lambda^2+\rho^2}-1}\int_0^{\pi}(\sin t)^{2\theta_n(\lambda)+1}\,dt\\
&\leq c(2\pi)^{-n/2}(\sinh\varsigma)^{1-n}2^{-\theta_n(\lambda)-1}\frac{\Gamma(\theta_n(\lambda)+(n-2)/2+1)}{\Gamma(\theta_n(\lambda)+1)}\rho^{-1/2}\\
&\qquad\times(\cosh\varsigma-1)^{\eta(\rho,\lambda)},
\end{aligned}$$

puis, en utilisant

$$\log(1-s)=-\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{s^l}{l},\ 0<s<1,\quad \text{et}\quad \log(1+r)\le r,\ r\ge 0,$$

on modifie un peu la preuve de (5.6), et on voit qu'il existe une constante $c>0$ telle que pour tout $n\ge 7$, tout $d(g,g')=\varsigma\ge 1$ et tout $\lambda\ge 0$, on a

$$(\lambda^2-\Delta)^{-1}(g,g')\le cn^{-2}\Omega_n^{-1}(\sinh\varsigma)^{1-n}(\cosh\varsigma-1)^{\eta(\rho,\lambda)}.$$

Donc, il nous reste à montrer que

$$\gamma_0^{-1}\int_0^{+\infty}(\cosh\varsigma-1)^{\eta(\rho,\lambda)}\sin^2\left(\gamma_0\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda\le c\frac{\rho}{\varsigma}.$$

On constate d'abord que

$$\inf_{r\ge 1}\frac{\log(\cosh r-1)}{r}>0,$$

puis que

$$\begin{aligned}
&\gamma_0^{-1}\int_0^{+\infty}(\cosh\varsigma-1)^{\eta(\rho,\lambda)}\sin^2\left(\gamma_0\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda\\
&\qquad\le\gamma_0^{-1}\int_0^{+\infty}e^{-c\lambda^2/(\rho+\sqrt{\lambda^2+\rho^2})\varsigma}\sin^2\left(\gamma_0\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda\\
&\qquad\le\gamma_0^{-1}\int_0^{+\infty}e^{-c'\lambda^2/\rho\varsigma}\sin^2\left(\gamma_0\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda+\gamma_0^{-1}\int_\rho^{+\infty}e^{-c'\lambda\varsigma}\sin^2\left(\gamma_0\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda\\
&\qquad=T_1+T_2.
\end{aligned}$$

Cas 1. $\gamma_0>\sqrt{\varsigma/\rho}$. On a

$$T_1\le\gamma_0^{-1}\int_0^{+\infty}e^{-c'\lambda^2\varsigma/\rho}\,d\lambda=c\frac{1}{\gamma_0}\sqrt{\frac{\rho}{\varsigma}}<c\frac{\rho}{\varsigma},$$

et

$$T_2\le\gamma_0^{-1}\int_\rho^{+\infty}e^{-c'\lambda\varsigma}\,d\lambda=c\frac{e^{-c'\rho\varsigma}}{\gamma_0\varsigma}<c\frac{\rho}{\varsigma}\frac{e^{-c'\rho\varsigma}}{\sqrt{\varsigma\rho}}<c\frac{\rho}{\varsigma},$$

puisque $\varsigma\rho\ge 1$.

Cas 2. $\gamma_0\le\sqrt{\varsigma/\rho}$. On a

$$T_1\le\gamma_0^{-1}\int_0^{+\infty}e^{-c'\lambda^2\varsigma/\rho}\left(\gamma_0\frac{\lambda}{2}\right)^2d\lambda=c\gamma_0\left(\frac{\rho}{\varsigma}\right)^{3/2}\le c\frac{\rho}{\varsigma},$$

et

$$T_2 \leq \gamma_0^{-1} \int_0^{+\infty} e^{-c'\lambda\varsigma} \left(\gamma_0 \frac{\lambda}{2}\right)^2 d\lambda = c\gamma_0\varsigma^{-3/2} < c\frac{\rho}{\varsigma}.$$

Ceci achève la preuve de (5.7).

Remerciements. Le premier auteur est partiellement financé par le NSF of China (Grant No. 10871048), NCET-09-0316, «Fok Ying Tong Education Foundation (Grant No. 111001)» et «The Program for Professor of Special Appointment (Eastern Scholar) at Shanghai Institutions of Higher Learning». Ce travail a été commencé pendant la visite du premier auteur au Département de mathématiques d'Orsay entre mi-février et mi-mars 2010, et il tient à remercier ce département pour l'accueil chaleureux. Nous voudrions remercier Prof. P. Sjögren et le rapporteur pour avoir très soigneusement lu cet article et pour de nombreuses suggestions afin que cet article soit beaucoup plus lisible.

Bibliographie

1. Anker, J.-P. et Ji, L.-Z., Heat kernel and Green function estimates on noncompact symmetric spaces, *Geom. Funct. Anal.* **9** (1999), 1035–1091.
2. Chavel, I., *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Pure and Applied Mathematics **115**, Academic Press, Orlando, FL, 1984.
3. Clerc, J. L. et Stein, E. M., L^p-multipliers for non-compact symmetric spaces, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **71** (1974), 3911–3912.
4. Dunford, N. et Schwartz, J. T., *Linear Operators* **I**. *General Theory*, Interscience Publishers, New York–London, 1958.
5. Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. et Tricomi, F. G., *Higher Transcendental Functions* **I**, McGraw-Hill, New York, 1953.
6. Helgason, S., *Groups and Geometric Analysis. Integral Geometry, Invariant Differential Operators, and Spherical Functions*, Mathematical Surveys and Monographs **83**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
7. Li, H.-Q., La fonction maximale de Hardy–Littlewood sur une classe d'espaces métriques mesurables, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **338** (2004), 31–34.
8. Li, H.-Q., Estimations asymptotiques du noyau de la chaleur sur les groupes de Heisenberg, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **344** (2007), 497–502.
9. Li, H.-Q., Fonctions maximales centrées de Hardy–Littlewood sur les groupes de Heisenberg, *Studia Math.* **191** (2009), 89–100.
10. Li, H.-Q., Fonctions maximales centrées de Hardy–Littlewood pour les opérateurs de Grushin, *Prépublication*, 2010.
11. Li, H.-Q., Centered Hardy–Littlewood maximal functions on hyperbolic spaces, $p>1$, *Prépublication*, 2011.

12. Li, H.-Q., Estimations asymptotiques du noyau de la chaleur pour l'opérateur de Grushin, à paraître dans *Comm. Partial Differential Equations*. doi:10.1080/03605302.2011.600800
13. Matsumoto, H., Closed form formulae for the heat kernels and the Green functions for the Laplacians on the symmetric spaces of rank one, *Bull. Sci. Math.* **125** (2001), 553–581.
14. Naor, A. et Tao, T., Random martingales and localization of maximal inequalities, *J. Funct. Anal.* **259** (2010), 731–779.
15. Stein, E. M. et Strömberg, J.-O., Behavior of maximal functions in $\mathbb{R}^n$ for large n, *Ark. Mat.* **21** (1983), 259–269.
16. Strömberg, J. O., Weak type L^1 estimates for maximal functions on noncompact symmetric spaces, *Ann. of Math.* **114** (1981), 115–126.

Hong-Quan Li
School of Mathematical Sciences
Fudan University
220 Handan Road
Shanghai 200433
China
hongquan_li@fudan.edu.cn

Noël Lohoué
Département de Mathématiques
Université de Paris-Sud
Bâtiment 425
FR-91405 Orsay Cedex
France
Noel.Lohoue@math.u-psud.fr

Reçu le 24 mai 2010
révisé le 22 novembre 2011
publié en ligne le 29 mars 2012