Ark. Mat., **53** (2015), 271–301
DOI: 10.1007/s11512-014-0205-8

Un scindage du morphisme de Frobenius quantique

Michel Gros et Masaharu Kaneda

Résumé. Nous montrons que le morphisme de Frobenius quantique construit par Lusztig dans le cadre des algèbres enveloppantes quantiques $U_{\mathcal{B}}$ spécialisées en une racine de l'unité admet un scindage multiplicatif (non unitaire). Nous utilisons pour ce faire une base de la partie torique de la petite algèbre quantique constituée d'idempotents orthogonaux deux à deux et de somme 1 et faisons de même dans le cas « modulaire » pour l'algèbre des distributions d'un groupe algébrique semi-simple.

Abstract. We show that the quantum Frobenius morphism constructed by Lusztig in the setting of the quantum enveloping algebra $U_{\mathcal{B}}$ specialized at a root of unity admits a (nonunital) multiplicative splitting. We construct the splitting using a basis of the toral part of the small quantum algebra consisting of pairwise orthogonal idempotents summing up to 1, and likewise in the modular case of the algebra of distributions for a semisimple algebraic group.

1. Introduction

1.1. Soient A une matrice de Cartan $\ell\times\ell$ de type fini, $\mathcal{A}=\mathbb{Z}[v,v^{-1}]$ l'anneau des polynômes de Laurent en l'indéterminée v, et U la $\mathcal{A}$-forme (i.e. avec « puissances divisées ») de l'algèbre quantique associée à A. Soit maintenant $l>1$ un entier premier avec tous les coefficients de A. Soient $\mathcal{B}$ le quotient de $\mathbb{Z}\big[\frac{1}{2}\big][v]$ par l'idéal engendré par le l-ième polynôme cyclotomique Φ_l, q l'image de v dans $\mathcal{B}$, et $U_{\mathcal{B}}=U\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{B}$. Soient enfin $\mathbf{U}$ la $\mathbb{Z}$-forme de Kostant de l'algèbre enveloppante universelle associée à A, et $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}=\mathbf{U}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{B}$. Lusztig a établi dans [13, théorème 8.10] l'existence d'un morphisme de Frobenius quantique $\mathrm{Fr}\colon U_{\mathcal{B}}\to\mathbf{U}_{\mathcal{B}}$, qui, lorsque l est premier et noté alors p, est un relèvement du morphisme de Frobenius usuel sur l'algèbre des distributions correspondante sur le corps premier $\mathbb{F}_p$ à p éléments. Nous construisons dans cet article un homomorphisme *non unifère* d'algèbres ([3, section III.1.1]).

M.K. a bénéficié d'un soutien partiel JSPS Grants in Aid for Scientific Research 235-40023.

$\phi\colon \mathbf{U}_{\mathcal{B}} \to U_{\mathcal{B}}$ scindant (cf. théorème 1.4.1) le morphisme Fr et relevant, en un sens qu'on précisera dans le corollaire 4.5.1, le scindage du Frobenius usuel construit dans [5, théorème 1.3].

1.2. Dans une situation similaire mais avec toutefois des hypothèses différentes sur l (cf. [10, section 2]), adaptant donc en conséquence les notations précédentes, rappelons que Littelmann a défini à l'aide de [10, théorème 1] la *contraction* d'un $U_{\mathcal{B}}$-module de Weyl dans le but de compléter son programme visant à établir une théorie de « monômes standards » pour les $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}$-modules de Weyl duaux. Il utilise simplement pour ce faire un certain scindage sur la seule partie nilpotente de $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}$. Le prolongement naïf de son scindage à tout $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}$ s'avère ne pas être multiplicatif. Néanmoins, revenant à nos hypothèses de la section 1.1, reprenant sa construction et faisant intervenir en plus une mesure involutive invariante de la partie torique de la sous-algèbre infinitésimale de $U_{\mathcal{B}}$, un miracle analogue à celui du cas modulaire [5] nous permet de construire un prolongement *multiplicatif*. On est alors en mesure de contracter n'importe quel $U_{\mathcal{B}}$-module pour en faire un $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}$-module. Si bien sûr on ne s'intéresse qu'aux $U_{\mathcal{B}}$-modules ayant une décomposition suivant leurs poids, on dispose [15, proposition 3.4] déjà d'une façon de les contracter : il suffit d'interpréter ces modules comme des modules unitaires (« unital modules ») sur l'algèbre quantique modifiée pour laquelle un scindage du Frobenius est défini dans *loc. cit.* (et ce, sans même la restriction sur l ci-dessus).

1.3. Pour énoncer plus précisément notre résultat principal, notons $\mathbb{Q}(v)$ (resp. $\mathbb{Q}(q)$) le corps de fractions de $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) et $U_{\mathbb{Q}(v)}$ l'algèbre quantique associée à $A=(a_{ij})$ sur $\mathbb{Q}(v)$ avec ses générateurs standards E_i, K_i et F_i, $i\in[1,\ell]$. Soient $d_i\in\{1,2,3\}$, $i\in[1,\ell]$, tels que la matrice $(d_i a_{ij})$ soit symétrique, et $v_i=v^{d_i}$. Pour tous $i\in[1,\ell]$ et $n\in\mathbb{N}$ posons $[n]_i^!=(v_i^n-v_i^{-n})/(v_i-v_i^{-1})$, $E_i^{(n)}=E_i^n/[n]_i^!$ et $F_i^{(n)}=F_i^n/[n]_i^!$. Alors, U est simplement la $\mathcal{A}$-sous-algèbre de $U_{\mathbb{Q}(v)}$ engendrée par les $E_i^{(n)}$, $F_i^{(n)}$, K_i et K_i^{-1}, $i\in[1,\ell]$, $n\in\mathbb{N}$. Soient également X_i et Y_i, $i\in[1,\ell]$, les générateurs standards de l'algèbre enveloppante universelle $\mathbf{U}_{\mathbb{Q}(q)}$ associée à A sur $\mathbb{Q}(q)$. Si $X_i^{(n)}=X_i^n/n!$ et $Y_i^{(n)}=Y_i^n/n!$, $i\in[1,\ell]$, $n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}$ est la $\mathcal{B}$-sous-algèbre de $\mathbf{U}_{\mathbb{Q}(q)}$ engendrée par les $X_i^{(n)}$, $Y_i^{(n)}$, pour $i\in[1,\ell]$ et $n\in\mathbb{N}$. Le morphisme de Frobenius introduit par Lusztig (strictement dit, Lusztig travaille dans [13] au-dessus de $\mathbb{Z}[v]$ modulo l'idéal engendré par Φ_l)

$$\mathrm{Fr}\colon U_{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathbf{U}_{\mathcal{B}} \tag{1.3.1}$$

est alors défini, pour tous $i\in[1,\ell]$ et $n\in\mathbb{N}$, par

$$(1.3.2)\quad E_i^{(n)}\longmapsto\begin{cases}X_i^{(n/l)} & \text{si } l|n,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}\quad F_i^{(n)}\longmapsto\begin{cases}Y_i^{(n/l)} & \text{si } l|n,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}\quad\text{et}\quad K_i^{\pm1}\longmapsto 1.$$

1.4. Si $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\pm}$ désigne la $\mathcal{B}$-sous-algèbre de $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}$ engendrée par les $X_i^{(n)}$ (resp. $Y_i^{(n)}$), pour $i\in[1,\ell]$ et $n\in\mathbb{N}$, Lusztig définit [13, lemme 8.6] un scindage $(\mathrm{Fr}')^{\pm}$ de $\mathrm{Fr}|_{U_{\mathcal{B}}^{\pm}}$ par $X_i^{(n)}\mapsto E_i^{(nl)}$ (resp. $Y_i^{(n)}\mapsto F_i^{(nl)}$) pour tous $i\in[1,\ell]$ et $n\in\mathbb{N}$. Si $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\geqslant 0}$ (resp. $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\leqslant 0}$) désigne la $\mathcal{B}$-sous-algèbre de $\mathbf{U}_{\mathbb{Q}(q)}$ engendrée par $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\pm}$ et par les

$$\binom{H_i}{n}=\frac{H_i(H_i-1)...(H_i-n+1)}{n!},\quad i\in[1,\ell],n\in\mathbb{N},$$

Kumar et Littelmann [9, théorème 1.2] prolongent ensuite $(\mathrm{Fr}')^{\pm}$ à $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\geqslant 0}$ et $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\leqslant 0}$, mais au prix du passage au quotient (lequel est indispensable pour conserver la multiplicativité) par l'idéal $(K_i^l-1|i\in[1,\ell])$. Si l'on introduit maintenant pour $i\in[1,\ell]$,

$$(1.4.1)\qquad \varkappa_{i0}=\frac{1}{2l}\sum_{j=0}^{2l-1}K_i^j\in U_{\mathbb{Q}(v)}\quad\text{et}\quad\varkappa=\varkappa_{10}...\varkappa_{\ell 0},$$

il s'avère que $\varkappa$ appartient en fait à $U_{\mathcal{B}}$ et est l'unique idempotent non trivial de la $\mathcal{B}$-sous-algèbre $u_{\mathcal{B}}^0$ de $U_{\mathcal{B}}$ engendrée par les K_i, $i\in[1,\ell]$, à être invariant sous l'action naturelle à gauche, autrement dit : $\varkappa\in\{x\in u_{\mathcal{B}}^0|yx=\varepsilon(y)x$ pour tout $y\in u_{\mathcal{B}}^0\}$ (avec ε la coünité de $u_{\mathcal{B}}^0$). Cet élément $\varkappa$ apparait donc comme la variante quantique de la mesure invariante μ_0, introduite dans [5, section 1.3], sur le noyau de Frobenius d'un tore maximal du groupe algébrique semi-simple G sur $\mathbb{F}_p$ correspondant.

Théorème 1.4.1. (i) *Il existe un unique homomorphisme* (*non unifère*) *de $\mathcal{B}$-algèbres*

$$(1.4.2)\qquad \phi\colon\mathbf{U}_{\mathcal{B}}\longrightarrow U_{\mathcal{B}}$$

tel que $X_i^{(n)}\mapsto E_i^{(nl)}\varkappa$ et $Y_i^{(n)}\mapsto F_i^{(nl)}\varkappa$ pour tous $i\in[1,\ell]$ et $n\in\mathbb{N}$.

(ii) *L'application ϕ se factorise à travers le facteur direct $\varkappa U_{\mathcal{B}}\varkappa$ de $U_{\mathcal{B}}$ en un homomorphisme unifère de $\mathcal{B}$-algèbres. On a* $\mathrm{Fr}\circ\phi=\mathrm{id}_{\mathbf{U}_{\mathcal{B}}}$.

La démonstration dont nous disposons est sensiblement plus délicate que dans le cas modulaire [5] mais tout à fait terre-à-terre. Elle nous a semblé néanmmoins méritée d'être donnée, le résultat suggérant par exemple une alternative à l'emploi

des algèbres quantiques modifées pour certaines applications. L'article est structuré en trois grandes parties. Nous traitons tout d'abord en détail (sections 2 et 3) le cas de l'algèbre $\mathfrak{sl}_2$ en montrant l'intégralité de $\varkappa=\varkappa_{10}$ ainsi que de quelques autres idempotents utiles pour la suite et en établissant l'existence du scindage ϕ. Nous en déduisons l'existence de décompositions associées de $U_{\mathcal{B}}$. La seconde partie (section 4) est d'un intérêt assez largement indépendant. Les idempotents qui sont naturellement apparus lors la démonstration du théorème 1.4.1 invitent à revenir sur leurs analogues modulaires et leurs généralisations (lesquelles sont spécifiques à la caractéristique $p>0$). Nous montrons comment ils permettent de décrire précisément (cf. proposition 2.6.1) plusieurs des algèbres apparaissant dans ce travail et aussi, dans le cas modulaire d'obtenir une nouvelle preuve de l'existence (cf. théorème 4.11.1) d'un scindage du morphisme de Frobenius obtenu précédemment dans [4], résultat clef dans la preuve du caractère Frobenius scindé des variétés de drapeaux ([5]). Enfin, dans la dernière partie section 5, nous expliquons les aménagements, essentiellement typographiques, à apporter pour traiter le cas général du théorème 1.4.1 et terminons par quelques remarques.

Remerciements. Le premier auteur remercie très sincèrement le second auteur pour son généreux accueil lors de son séjour en mai 2012 à l'Université de la Ville d'Osaka (OCU) ayant rendu possible ce travail ainsi que le département de mathématiques pour l'atmosphère stimulante dans laquelle il a été effectué. Après une première rédaction de ce travail, nous avons pu bénéficier de divers commentaires nous permettant d'améliorer la rédaction et de renforcer certains résultats. Nous remercions tous leurs auteurs et tout particulièrement Yoshihisa Saito dont une remarque lumineuse nous a conduit à simplifier considérablement certaines démonstrations des sections 2 et 3. Nous remercions également H. H. Andersen d'avoir attiré notre attention sur [16].

2. Le cas $\mathfrak{sl}_2$: sur l'intégralité de quelques idempotents

2.1. On se place ici dans le cas $\ell=1$, $A=(2)$ et l est par conséquent un nombre impair quelconque. Rappelons qu'on a (avec un allègement de notations évident) dans $U_{\mathcal{B}}$ les relations

$$KE=q^2EK,\quad KF=q^{-2}FK \quad \text{et} \quad [E,F]=\frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}, \tag{2.1.1}$$

et qu'on note, pour $c\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{N}$,

$$\begin{bmatrix} K;c \\ m \end{bmatrix}=\prod_{h=1}^{m}\frac{Kv^{c-h+1}-K^{-1}v^{-(c-h+1)}}{v^h-v^{-h}}\in U_{\mathbb{Q}(v)}. \tag{2.1.2}$$

Cet élément appartient en fait à U ([14, théorème 6.7]) et nous noterons par le même symbole son image dans $U_{\mathcal{B}}$. Nous poserons aussi simplement

$$\begin{bmatrix} K \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K;0 \\ m \end{bmatrix} \in U_{\mathcal{B}}. \tag{2.1.3}$$

Notons

$$U_q = U_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}} \mathbb{Q}(q) \quad \text{et} \quad u_q^0 = u_{\mathcal{B}}^0 \otimes_{\mathcal{B}} \mathbb{Q}(q) = \mathbb{Q}(q)[K]. \tag{2.1.4}$$

Pour toute la suite de ce travail, nous noterons $q^{1/2} = -q^{-(l-1)/2} \in \mathcal{B}$ qui est une racine primitive $2l$-ième de 1.

Posons, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$\varkappa_n = \frac{1}{2l} \sum_{i=0}^{2l-1} q^{-ni/2} K^i \in U_q. \tag{2.1.5}$$

On a de manière évidente $\varkappa_0 = \varkappa$ (1.4.1) et $\varkappa_n = \varkappa_m$ si $n \equiv m \bmod 2l$.

On vérifie immédiatement à l'aide de la relation $K^{2l} = 1$ que

$$K\varkappa_n = q^{n/2}\varkappa_n. \tag{2.1.6}$$

Il s'ensuit que les $\varkappa_n$ pour $n \in [0, 2l[$, appartenant à des sous-espaces propres deux-à-deux distincts pour l'action de K, forment une base du $\mathbb{Q}(q)$-espace vectoriel, u_q^0. De plus, comme les $\mathbb{Q}(q)\varkappa_n$ pour $n \in [0, 2l[$ sont des idéaux deux-à-deux distincts de u_q^0, les $\varkappa_n$ doivent être orthogonaux entre eux lorsqu'ils sont distincts :

$$\varkappa_i \varkappa_j = 0 \tag{2.1.7}$$

pour tout $i \neq j$.

Enfin, utilisant de nouveau que $K^{2l} = 1$, on vérifie que chaque $\varkappa_n$ est un idempotent et que l'on a donc

$$1 = \sum_{n=0}^{2l-1} \varkappa_n. \tag{2.1.8}$$

Remarquons également pour la suite qu'on a, pour tout $m \in \mathbb{Z}$,

$$\text{si } K \longmapsto q^m \text{ alors } \varkappa_n \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 2l | 2m-n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.1.9}$$

D'autre part, lorsque $m \in [0, l[$, on a

$$\begin{bmatrix} K;c \\ m \end{bmatrix}_q \varkappa_n = \prod_{h=1}^{m} \frac{Kq^{c-h+1} - K^{-1}q^{-c+h-1}}{q^h - q^{-h}} \varkappa_n = \begin{bmatrix} n/2+c \\ m \end{bmatrix}_q \varkappa_n. \tag{2.1.10}$$

Lemme 2.1.1. *On a*

$$\varkappa_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{l-1}(-1)^i \begin{bmatrix} K \\ i \end{bmatrix} (q^i + q^{-i}K) \in u_{\mathcal{B}}^0. \tag{2.1.11}$$

Démonstration. Rappelons (cf. par exemple [12], preuve de la proposition 2.14) d'abord qu'on a dans U, pour tout $i \geq 0$, la relation

$$K^2 \begin{bmatrix} K \\ i \end{bmatrix} = v^i(v^{i+1} - v^{-i-1})K \begin{bmatrix} K \\ i+1 \end{bmatrix} + v^{2i} \begin{bmatrix} K \\ i \end{bmatrix}. \tag{2.1.12}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
K\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{l-1}(-1)^i \begin{bmatrix} K \\ i \end{bmatrix} (q^i + q^{-i}K) &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{l-1}(-1)^i \begin{bmatrix} K \\ i \end{bmatrix} (q^i K + q^{-i}K^2) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{l-1}(-1)^i \left(\begin{bmatrix} K \\ i \end{bmatrix} q^i K + q^{-i}\left(q^i(q^{i+1} - q^{-i-1})K \begin{bmatrix} K \\ i+1 \end{bmatrix} + q^{2i} \begin{bmatrix} K \\ i \end{bmatrix} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{l-1}(-1)^i \left(\begin{bmatrix} K \\ i \end{bmatrix} q^i K + (q^{i+1} - q^{-i-1})K \begin{bmatrix} K \\ i+1 \end{bmatrix} + q^i \begin{bmatrix} K \\ i \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{l-1}(-1)^i \begin{bmatrix} K \\ i \end{bmatrix} (q^i + q^{-i}K) + (q^l - q^{-l})K \begin{bmatrix} K \\ l \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{l-1}(-1)^i \begin{bmatrix} K \\ i \end{bmatrix} (q^i + q^{-i}K).
\end{aligned}$$

Grâce à (2.1.6), on obtient donc que $\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{l-1}(-1)^i \left[\begin{smallmatrix} K \\ i \end{smallmatrix}\right](q^i + q^{-i}K) \in \mathbb{Q}(q)\varkappa_0$. Posant maintenant $\varkappa = \varkappa_0$ et $\varkappa' = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{l-1}(-1)^i \left[\begin{smallmatrix} K \\ i \end{smallmatrix}\right](q^i + q^{-i}K)$, on voit donc qu'il existe $\alpha(q) \in \mathbb{Q}(q)$ tel que $\varkappa' = \alpha(q)\varkappa_0$. Cette dernière égalité peut se spécialiser en envoyant K sur 1 et l'on déduit immédiatement de (2.1.9) que $\alpha(q) = 1$; d'où la proposition. □

2.2. Pour la suite, il est commode d'introduire, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$\varkappa'_n = \varkappa_{2n} = \frac{1}{2l}\sum_{i=0}^{2l-1} q^{-ni}K^i \in U_q. \tag{2.2.1}$$

On a clairement $\varkappa'_n=\varkappa'_m$ si $n\equiv m \mod l$ et l'on étend donc la notation $\varkappa'_n$ au cas où $n\in\mathbb{Z}/l$.

Proposition 2.2.1. *On a, pour tout* $n\in\mathbb{Z}$,

$$\varkappa_{2n}=\varkappa'_n=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{l-1}(-1)^i\begin{bmatrix}K;-n\\ i\end{bmatrix}(q^i+q^{-i-n}K)\in u^0_{\mathcal{B}}. \tag{2.2.2}$$

Démonstration. Comme $\varkappa'_n$ ne dépend que de la réduction modulo l de n, on peut se limiter à établir la formule lorsque n est pair. Tout d'abord, on déduit immédiatement de la relation $KF=q^{-2}FK$ (2.1.1) la relation de commutation

$$F^{(n)}\varkappa'_{2n}=\varkappa F^{(n)}. \tag{2.2.3}$$

On écrit alors

$$\begin{aligned}F^{(n)}\varkappa'_{2n}=\varkappa F^{(n)}&=\left(\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{l-1}(-1)^i\begin{bmatrix}K\\ i\end{bmatrix}(q^i+q^{-i}K)\right)F^{(n)}\\ &=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{l-1}(-1)^i\begin{bmatrix}K\\ i\end{bmatrix}F^{(n)}(q^i+q^{-i}q^{-2n}K)\\ &=F^{(n)}\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{l-1}(-1)^i\begin{bmatrix}K;-2n\\ i\end{bmatrix}(q^i+q^{-i-2n}K),\end{aligned}$$

d'où la proposition puisque $F^{(n)}$ ne peut être diviseur de 0 dans cette situation suite à l'existence de la décomposition triangulaire de U_q. □

2.3. On va aussi établir l'intégralité de $\varkappa_n$ lorsque n est impair. Pour cela, soit $\tilde{}$ l'automorphisme de U ([11, section 4.6]) tel que $E\mapsto -E$, $F\mapsto F$ et $K\mapsto -K$.

Lemme 2.3.1. *Pour tout* $n\in\mathbb{Z}$, *on a*

$$\tilde{\varkappa}'_n=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{l-1}\begin{bmatrix}K;-n\\ i\end{bmatrix}(q^i-q^{-i-n}K)\in u^0_{\mathcal{B}}. \tag{2.3.1}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la transformation de K en $-K$ dans (2.2.2) et de remarquer que celle-ci transforme $\left[\begin{smallmatrix}K;-n\\ i\end{smallmatrix}\right]$ en $\left[\begin{smallmatrix}K;-n\\ i\end{smallmatrix}\right]$ pour i pair et en $-\left[\begin{smallmatrix}K;-n\\ i\end{smallmatrix}\right]$ pour i impair. □

2.4. Dans la proposition suivante, $n/2$ désigne l'unique élément de $\mathbb{Z}/l$ dont le double est la classe de n dans $\mathbb{Z}/l$.

Proposition 2.4.1. (i) *On a*

$$\varkappa_n = \begin{cases} \varkappa'_{n/2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \widetilde{\varkappa}'_{n/2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \tag{2.4.1}$$

et par conséquent $\varkappa_n \in u_{\mathcal{B}}^0$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ (*ou tout* $n \in \mathbb{Z}/l$).

(ii) *On a*

$$\widetilde{\varkappa}_n = \varkappa_{n+l}. \tag{2.4.2}$$

Démonstration. Pour (i), c'est une conséquence immédiate des définitions de $\varkappa'_n$ (2.2.1) et de $\varkappa_n$ (2.1.5). Pour (ii), si n est pair,

$$\widetilde{\varkappa}_n = \widetilde{\varkappa}'_{n/2} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{l-1}(-1)^i \begin{bmatrix} -K; -n/2 \\ i \end{bmatrix} (q^i - q^{-i-n/2}K)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{l-1} \begin{bmatrix} K; -n/2 \\ i \end{bmatrix} (q^i - q^{-i-n/2}K) = \widetilde{\varkappa}'_{n/2} = \varkappa_{n+l}.$$

Le cas n impair se traite par un argument analogue. □

Corollaire 2.4.2. *Posons*

$$\varkappa^+ = \sum_{m \in [0,l[} \varkappa_{2m} \quad \text{et} \quad \varkappa^- = \sum_{m \in [0,l[} \varkappa_{2m+1}.$$

Les éléments $\varkappa^+$ *et* $\varkappa^-$ *sont des idempotents centraux de* $U_{\mathcal{B}}$ *tels que* $\widetilde{\varkappa}^+ = \varkappa^-$. *La* $\mathcal{B}$*-algèbre* $U_{\mathcal{B}}$ *admet une décomposition en somme d'idéaux*

$$U_{\mathcal{B}} = \varkappa^+ U_{\mathcal{B}} \varkappa^+ \oplus \varkappa^- U_{\mathcal{B}} \varkappa^- = U_{\mathcal{B}} \varkappa^+ \oplus U_{\mathcal{B}} \varkappa^- = U_{\mathcal{B}} \varkappa^+ \oplus \widetilde{U_{\mathcal{B}} \varkappa^+}.$$

Tout U_q*-module* M *se décompose en une somme directe* $M = \varkappa^+ M \oplus \varkappa^- M$ *telle que* K^l *agisse sur* $\varkappa^+ M$ (*resp.* $\varkappa^- M$) *par* 1 (*resp.* -1).

Démonstration. On remarquera simplement que pour tout $r \in \mathbb{N}$ on a

$$E^{(r)}\varkappa_n = E^{(r)} \frac{1}{2l} \sum_{i=0}^{2l-1} q^{-ni/2} K^i = \frac{1}{2l} \sum_{i=0}^{2l-1} q^{-ni/2-2ri} K^i E^{(r)}$$

$$= \frac{1}{2l} \sum_{i=0}^{2l-1} q^{-(n+4r)i/2} K^i E^{(r)} = \varkappa_{n+4r} E^{(r)}. \tag{2.4.3}$$

De même, on prouve que

$$F^{(r)}\varkappa_n = \varkappa_{n-4r}F^{(r)}. \tag{2.4.4}$$

On a

$$K\varkappa_n = \frac{1}{2l}\sum_{i=0}^{2l-1} q^{-ni/2}K^{i+1} = q^{n/2}\varkappa_n = (-1)^n q^{(1-l)n/2}\varkappa_n, \tag{2.4.5}$$

et en particulier, $K^l\varkappa_n = (-1)^n\varkappa_n$. □

2.5. Soit u_q la $\mathbb{Q}(q)$-sous-algèbre de U_q (2.1.4) engendrée par E, F et K. Tout u_q-module M de dimension finie admet une décomposition en sous-espaces propres relativement à l'action de K avec des valeurs propres des puissances de $q^{1/2}$.

Définition 2.5.1. On dit qu'un u_q-module de dimension finie M est de type 1 (resp. -1) si et seulement si $M = \varkappa^+ M$ (resp. $M = \varkappa^- M$).

Cette définition est cohérente avec celle donnée dans [11, section 4.6] et un u_q-module de dimension finie de type 1 n'est pas autre chose qu'un $\varkappa^+ u_q \varkappa^+$-module de dimension finie. Si M est un u_q-module de type -1, on remarquera qu'en tordant l'action de u_q par l'automorphisme $\tilde{}$, on obtient un u_q-module de type 1 qu'on notera $\widetilde{M}$.

2.6. Tout u_q-module indécomposable injectif/projectif est facteur direct d'un $u_q\varkappa_n$ avec $n \in [0, 2l[$. Rappelons ([2]) maintenant quelques généralités sur les u_q-modules de type 1. Soit $u_q^{\geq 0}$ la sous-algèbre de u_q engendrée par E et K. Pour $m \in \mathbb{Z}$, désignons encore par m le $u_q^{\geq 0}$-module $\mathbb{Q}(q)$ tel que $K1 = q^m$ et $E1 = 0$, et considérons le u_q-module $\bar{\Delta}_q(m) = u_q \otimes_{u_q^{\geq 0}} m$. Le u_q-module simple de plus haut poids m (qui est aussi le module de tête de $\bar{\Delta}_q(m)$) sera noté $\bar{L}_q(m)$. On a $\bar{L}_q(m) = \bar{L}_q(m')$ si et seulement si $m \equiv m' \bmod l$. On note $Q_q(m)$ la couverture projective (qui est aussi l'enveloppe injective) de $\bar{L}_q(m)$. On a alors $Q_q(l-1) = \bar{L}_q(l-1) = \bar{\Delta}_q(l-1)$ qui n'est autre que le module de Steinberg que nous noterons en abrégé St_q. Chaque $Q_q(m)$ (resp. $\bar{\Delta}_q(m)$) pour $m \in [0, l-1[$ est, quant à lui, une extension non scindée de $\bar{\Delta}_q(l-m-2)$ (resp. $\bar{L}_q(l-m-2)$) par $\bar{\Delta}_q(m)$ (resp. $\bar{L}_q(m)$).

Proposition 2.6.1. *Soit* $n \in [0, 2l[$.

(i) *Si* $n = 2m$ *est pair, on a*

$$u_q\varkappa_n = \coprod_{r \in \mathbb{Z} \cap ([0, m/2[\cup [m, (l+m-1)/2])} Q_q(2r-m)$$

avec $Q_q(2r-m)=\mathrm{St}_q$ *pour*

$$r=\begin{cases}\dfrac{l+m-1}{2} & \textit{si } m \textit{ pair},\\[2ex] \dfrac{m-1}{2} & \textit{si } m \textit{ impair}.\end{cases}$$

(ii) *Si* n *est impair, on a*

$$\widetilde{u_q\varkappa_n}=u_q\varkappa_{n+l}. \tag{2.6.1}$$

Démonstration. Pour (i), nous aurons à utiliser l'involution Ω de $\mathcal{B}$-algèbre définie par

$$\Omega(E)=F,\quad \Omega(F)=E \quad\text{et}\quad \Omega(K)=K^{-1}. \tag{2.6.2}$$

Examinons l'action de $F^{(l-1)}$ sur les vecteurs primitifs $E^{(l-1)}F^{(r)}\varkappa_n$ de poids $2(l-1-r)+m$. On a

$$\begin{aligned}
F^{(l-1)}E^{(l-1)}F^{(r)}\varkappa_n &= \sum_{i=0}^{l-1} E^{(l-1-i)}(-1)^i \begin{bmatrix} K;-i+2(l-1)-1\\ i\end{bmatrix} F^{(l-1-i)}F^{(r)}\varkappa_n\\
&= \sum_{i=0}^{l-1} E^{(l-1-i)}(-1)^i \begin{bmatrix} K;-i+2l-3\\ i\end{bmatrix}\begin{bmatrix} l-1-i+r\\ r\end{bmatrix} F^{(l-1-i+r)}\varkappa_n\\
&= \sum_{i=0}^{l-1} E^{(l-1-i)}(-1)^i \begin{bmatrix} l-1-i+r\\ r\end{bmatrix} F^{(l-1-i+r)}\\
&\quad\times\begin{bmatrix} K;-i+2l-3-2(l-1-i+r)\\ i\end{bmatrix}\varkappa_n\\
&= \sum_{i=0}^{l-1} E^{(l-1-i)}F^{(l-1-i+r)}(-1)^i \begin{bmatrix} l-1-i+r\\ r\end{bmatrix}\begin{bmatrix} K;i-2r-1\\ i\end{bmatrix}\varkappa_n\\
&= \sum_{i=0}^{l-1} E^{(l-1-i)}F^{(l-1-i+r)}(-1)^i \begin{bmatrix} l-1-i+r\\ r\end{bmatrix}\begin{bmatrix} m+i-2r-1\\ i\end{bmatrix}\varkappa_n\\
&= \sum_{i=0}^{l-1} E^{(l-1-i)}F^{(l-1-i+r)} \begin{bmatrix} l-1-i+r\\ r\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2r-m\\ i\end{bmatrix}\varkappa_n.
\end{aligned}$$

Si $0\le r<m/2$ ou si $m\le r\le(l+m-1)/2$, avec $i=r$ on a $\left[\begin{smallmatrix} l-1-i+r\\ r\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 2r-m\\ i\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix} l-1\\ r\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 2r-m\\ r\end{smallmatrix}\right]\neq 0$, et donc

$$\coprod_{r\in\mathbb{Z}\cap([0,m/2[\cup[m,(l+m-1)/2])} \bar{\Delta}_q(m-2-2r)\subseteq u_q\varkappa_n.$$

Alors

$$u_q\varkappa_n = \coprod_{r\in\mathbb{Z}\cap([0,m/2[\cup[m,(l+m-1)/2])} Q_q(2r-m)$$

pour des raisons de dimension avec $Q_q(2r-m)=\mathrm{St}_q$ pour $r=(l+m-1)/2$ (resp. $r=(m-1)/2$) si m est pair (resp. si m est impair). □

3. Le cas $\mathfrak{sl}_2$: scindage du Frobenius

3.1. Les idempotents précédents nous permettent maintenant de définir le scindage annoncé.

Proposition 3.1.1. *Posons, pour alléger, $\varkappa=\varkappa_0$. L'application $\mathcal{B}$-linéaire*

$$\phi\colon \mathbf{U}_{\mathcal{B}} \longrightarrow U_{\mathcal{B}} \tag{3.1.1}$$

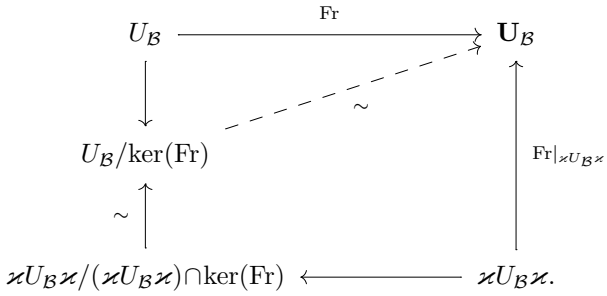
induite par multiplicativité par,

$$\phi(X^{(i)})=E^{(li)}\varkappa, \quad \phi(Y^{(i)})=F^{(li)}\varkappa \quad \textit{et} \quad \phi\left(\binom{H}{i}\right)=\begin{bmatrix}K\\ li\end{bmatrix}\varkappa, \tag{3.1.2}$$

pour tout $i\geq 0$ est un homomorphisme (non unifère) d'algèbres qui scinde l'application de Frobenius Fr (1.3.2).

Remarquons les égalités évidentes $\varkappa E^{(li)}=E^{(li)}\varkappa$, $\varkappa F^{(li)}=F^{(li)}\varkappa$ et $\left[\begin{smallmatrix}K\\ li\end{smallmatrix}\right]\varkappa=\varkappa\left[\begin{smallmatrix}K\\ li\end{smallmatrix}\right]$ pour tout $i\geq 0$: dans la définition de ϕ (3.1.2), on pourrait donc tout aussi bien multiplier par $\varkappa$ à gauche.

3.2. Si l'on veut formuler l'existence de cet homomorphisme en terme d'homomorphisme unifère d'algèbres comme dans le théorème 1.4.1(ii), on peut procéder comme suit. On remarque que l'on a une décomposition $U_{\mathcal{B}}=\coprod_{i,j=0}^{2l-1}\varkappa_i U_{\mathcal{B}}\varkappa_j$ en somme directe de $U_{\mathcal{B}}$ en $\mathcal{B}$-sous-modules telle que $\mathrm{Fr}(\varkappa_i U_{\mathcal{B}}\varkappa_j)\neq 0$ si et seulement si $i=j=0$ et telle que $\phi\colon \mathbf{U}_{\mathcal{B}}\to U_{\mathcal{B}}$ se factorise à travers $\varkappa_0 U_{\mathcal{B}}\varkappa_0=\varkappa U_{\mathcal{B}}\varkappa$. Comme $\mathrm{Fr}(\varkappa_n)=\delta_{n0}$ pour tout $n\in[0,2l[$, on obtient un diagramme commutatif d'homomorphismes de $\mathcal{B}$-algèbres



L'application ϕ va alors être un scindage (comme homomorphisme unifère de $\mathcal{B}$-algèbres) de $\mathrm{Fr}|_{\varkappa U_{\mathcal{B}}\varkappa}$.

3.3. Passons à la démonstration de la proposition 3.1.1. Soit, comme dans l'introduction, $U_{\mathcal{B}}^{\geq 0}$ (resp. $U_{\mathcal{B}}^{\leq 0}$) la $\mathcal{B}$-sous-algèbre de $U_{\mathcal{B}}$ engendrée par les $\{E^{(i)}|i\in\mathbb{N}\}$ et les $\left\{K^{\pm 1}, \begin{bmatrix} K;c \\ m \end{bmatrix} | c\in\mathbb{Z} \text{ et } m\in\mathbb{N}\right\}$ (resp. les $F^{(i)}$ et les $\left\{K^{\pm 1}, \begin{bmatrix} K;c \\ m \end{bmatrix} | c\in\mathbb{Z} \text{ et } m\in\mathbb{N}\right\}$) et $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\geq 0}$ (resp. $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\leq 0}$) la $\mathcal{B}$-sous-algèbre de $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}$ engendrée par les $\{X^{(i)}|i\in\mathbb{N}\}$ et les $\left\{\binom{H}{m} | m\in\mathbb{N}\right\}$ (resp. les $\{Y^{(i)}|i\in\mathbb{N}\}$ et les $\left\{\binom{H}{m} | m\in\mathbb{N}\right\}$). Avec ces notations, il résulte alors de [9, théorème 1.2] que l'application (rappelons ici que K^l est central dans $U_{\mathcal{B}}$)

$$\mathrm{Fr}' : \mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\geq 0} \longrightarrow U_{\mathcal{B}}^{\geq 0}/(K^l-1)(U_{\mathcal{B}}^{\geq 0}\otimes_{\mathcal{B}}\mathbb{Q}(q))\cap U_{\mathcal{B}}^{\geq 0} \tag{3.3.1}$$

définie par

$$\mathrm{Fr}'(X^{(i)}) = E^{(li)} \quad \text{et} \quad \mathrm{Fr}'\left(\binom{H}{i}\right) = \begin{bmatrix} K;0 \\ li \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ li \end{bmatrix}, \tag{3.3.2}$$

et son analogue évident $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\leq 0}\to U_{\mathcal{B}}^{\leq 0}/(K^l-1)(U_{\mathcal{B}}^{\leq 0}\otimes_{\mathcal{B}}\mathbb{Q}(q))\cap U_{\mathcal{B}}^{\leq 0}$ sont des homomorphismes d'algèbres.

Comme la restriction de ϕ à $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\geq 0}$ et $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\leq 0}$ se factorise par Fr', on voit donc, compte tenu de la remarque suivant la proposition 3.1.1, que cette restriction est un homomorphisme d'algèbres. On utilise maintenant la relation ([6, lemma 26.2])

$$X^{(b)}Y^{(a)} - Y^{(a)}X^{(b)} = \sum_{r=1}^{\min(a,b)} Y^{(a-r)} \binom{H-a-b+2r}{r} X^{(b-r)}, \tag{3.3.3}$$

pour tous $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}$. Il suffit donc pour prouver la proposition 3.1.1, de montrer qu'on a l'égalité suivante dans $U_{\mathcal{B}}$,

$$\phi(X^{(b)})\phi(Y^{(a)}) - \phi(Y^{(a)})\phi(X^{(b)}) = \sum_{r=1}^{\min(a,b)} \phi(Y^{(a-r)})\phi\binom{H-a-b+2r}{r}\phi(X^{(b-r)}). \tag{3.3.4}$$

D'après ([13, (a2), section 6.5]), on a

$$E^{(lb)}F^{(la)} - F^{(la)}E^{(lb)} = \sum_{s=1}^{\min(la,lb)} F^{(la-s)} \begin{bmatrix} K;-la-lb+2s \\ s \end{bmatrix} E^{(lb-s)}. \tag{3.3.5}$$

Utilisant la relation (2.2.3), on voit immédiatement que la vérification de (3.3.4) revient à établir que pour tout s tel que $\min(la,lb)\geq s\geq 1$ et ne divisant pas l, on a

$$\varkappa'_{2(la+lb-s)} \begin{bmatrix} K;-la-lb+2s \\ s \end{bmatrix} = \varkappa'_{-2s} \begin{bmatrix} K;2s-la-lb \\ s \end{bmatrix} = 0. \tag{3.3.6}$$

On conclut en utilisant l'égalité suivante.

Lemme 3.3.1. *Pour tous $n,m\in\mathbb{Z}$ et tout $t\in\mathbb{N}$ non divisible par l, on a*

$$\varkappa'_n\begin{bmatrix}K;-n+lm\\ t\end{bmatrix}=0. \tag{3.3.7}$$

Démonstration. Supposons tout d'abord $t<l$ et posons, pour $a\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{bmatrix}a\\ t\end{bmatrix}=\prod_{s=1}^{t}\frac{q^{a-s+1}-q^{-a+s-1}}{q^s-q^{-s}}\in\mathcal{B}.$$

Cet élément est nul si a est un multiple de l. On a alors

$$\begin{aligned}\varkappa'_n\begin{bmatrix}K;-n+lm\\ t\end{bmatrix}&=\varkappa_n\prod_{s=1}^{t}\frac{Kq^{-n+lm-s+1}-K^{-1}q^{n-lm+s-1}}{q^s-q^{-s}}\\ &=\prod_{s=1}^{t}\frac{q^{lm-s+1}-q^{-lm+s-1}}{q^s-q^{-s}}=\begin{bmatrix}lm\\ t\end{bmatrix}=0.\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Plus généralement, écrivons $t=t_0+t_1l$ avec $t_0\in[0,l[$ et $t_1\in\mathbb{Z}$. On remarque alors qu'on dispose d'un analogue de [12, (g3), section 2.3], à savoir que pour tous $k,k'\in\mathbb{N}$, on a

$$\begin{bmatrix}K;m\\ k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K;m-k\\ k'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k+k'\\ k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K;m\\ k+k'\end{bmatrix}. \tag{3.3.9}$$

Faute de référence pour cette égalité, signalons qu'il suffit de la vérifier dans $U_{\mathbb{Q}(v)}$:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}K;m\\ k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K;m-k\\ k'\end{bmatrix}&=\prod_{s=1}^{k}\frac{Kv^{m-s+1}-K^{-1}v^{-m+s-1}}{v^s-v^{-s}}\\ &\quad\times\prod_{s=1}^{k'}\frac{Kv^{m-k-s+1}-K^{-1}v^{-m+k+s-1}}{v^s-v^{-s}}\\ &=\prod_{s=1}^{k+k'}\frac{Kv^{m-s+1}-K^{-1}v^{-m+s-1}}{v^s-v^{-s}}\,\frac{\prod_{s=1}^{k+k'}(v^s-v^{-s})}{\prod_{s=1}^{k}(v^s-v^{-s})\prod_{s=1}^{k'}(v^s-v^{-s})}\\ &=\begin{bmatrix}K;m\\ k+k'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k+k'\\ k\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

On en déduit alors

$$\varkappa'_n\begin{bmatrix}K;-n+lm\\ t\end{bmatrix}=\varkappa'_n\begin{bmatrix}t\\ t_1l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K;-n+lm\\ t\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}K;-n+lm\\ t_1l\end{bmatrix}\varkappa'_n\begin{bmatrix}K;-n+lm-lt_1\\ t_0\end{bmatrix}=0. \quad \square$$

Remarque 3.3.3. Si l'on utilise le lemme 3.3.1, on peut se dispenser d'invoquer [9, théorème 1.2] pour voir que Fr' s'étend en une application multiplicative $\phi\colon \mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\geq 0}\to U_{\mathcal{B}}^{\leq 0}$ and $\phi\colon \mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\leq 0}\to U_{\mathcal{B}}^{\leq 0}$.

4. Retour sur la théorie modulaire

4.1. Soit p un nombre premier impair. La théorie que nous qualifions ici en abrégé de *modulaire* réfère toujours au cas où $l=p$ et où, éventuellement, l'on « réduit » modulo p la théorie quantique en un sens qu'on va préciser tout de suite dans la proposition 4.4.1. Soient alors G le $\mathbb{F}_p$-groupe algébrique SL_2 des matrices carrés d'ordre 2 et de déterminant 1 et T le tore maximal formé des matrices diagonales. Pour $r\in\mathbb{N}^+$, soient G_r (resp. T_r) le r-ième noyau de Frobenius de G (resp. T) et $\mathrm{Dist}(G)$ (resp. $\mathrm{Dist}(G_r)$, $\mathrm{Dist}(T)$ et $\mathrm{Dist}(T_r)$) l'algèbre des distributions de G (resp. G_r, T et T_r). On a, dans $\mathrm{Dist}(G)$, les relations suivantes pour tous $a,a',b,c,c'\in\mathbb{N}$,

$$X^{(a)}X^{(a')}=\binom{a+a'}{a}X^{(a+a')},\quad Y^{(c)}Y^{(c')}=\binom{c+c'}{c}Y^{(c+c')}, \tag{4.1.1}$$

$$X^{(a)}\binom{H}{b}=\binom{H-2a}{b}X^{(a)},\quad Y^{(c)}\binom{H}{b}=\binom{H+2c}{b}Y^{(c)}. \tag{4.1.2}$$

4.2. Conservons les notations de la section 4.1. On dispose sur $\mathrm{Dist}(T)$ de l'endomorphisme (dit de Frobenius) noté $\mathrm{Dist}(\mathrm{Fr})$ (ou parfois simplement Fr) de $\mathbb{F}_p$-algèbres tel que pour tout $m\in\mathbb{N}$,

$$\binom{H}{m}\longmapsto\begin{cases}\binom{H}{m/p} & \text{si } p|m,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases} \tag{4.2.1}$$

et de son scindage évident Fr' défini par

$$\mathrm{Fr}'\left(\binom{H}{m}\right)=\binom{H}{pm} \tag{4.2.2}$$

qui est un endomorphisme de $\mathbb{F}_p$-algèbres comme on le vérifie aisément. Il résulte des propriétés de l'application $(\mathrm{Fr}')^{\pm}$ mentionnée en section 1.3 que cette notation est cohérente avec (3.3.2).

4.3. Nous aurons besoin plus bas dans la proposition 4.4.1, pour $n\in\mathbb{Z}$, de

$$\mu_n = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \binom{H-n}{i} \in \mathrm{Dist}(T_1). \tag{4.3.1}$$

Ces éléments sont ceux qui étaient notés $\Delta_{T,n}$ dans [4, section 3.1]. Mentionnons à cette occasion que [4, proposition 3.1.6] contient (au moins) une erreur typographique : avec les notations adoptées ici, c'est $X^{(n)}\mu_m = \mu_{m+2n}X^{(n)}$ et $Y^{(n)}\mu_m = \mu_{m-2n}Y^{(n)}$ qu'il faut lire. Rappelons aussi ([4, corollaire 3.1.5]) que $\mu_n = \mu_m$ si et seulement si $n\equiv m \bmod p$.

4.4. La relation avec les $\varkappa'_n\in U_q$, $n\in\mathbb{Z}$, considérés en (2.2.1) s'énonce comme suit.

Proposition 4.4.1. *Si $l=p$ est premier, via l'homomorphisme canonique*

$$U_{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathrm{Dist}(G) \tag{4.4.1}$$

induit par la projection canonique $\mathcal{B}\to\mathbb{F}_p$ $(q\mapsto 1)$ et tel que $K\mapsto 1$, l'image de $\varkappa'_n$ est égale à μ_n.

Démonstration. Cela découle aussi de (2.2.3) jointe à [4, proposition 3.1.6]. □

4.5. On avait introduit dans la théorie modulaire [5, théorème 1.3] un scindage (non unifère) noté aussi (le contexte enlevant tout risque de confusion avec (1.4.2) dans les notations)

$$\phi\colon \mathrm{Dist}(G) \longrightarrow \mathrm{Dist}(G) \tag{4.5.1}$$

de l'application canonique de Frobenius

$$\mathrm{Dist}(\mathrm{Fr}) = \mathrm{Fr}\colon \mathrm{Dist}(G) \longrightarrow \mathrm{Dist}(G). \tag{4.5.2}$$

Rappelons que cet endomorphisme ϕ, restreint à $\mathrm{Dist}(T)$ s'obtient simplement en composant Fr' (4.2.2) et la multiplication par μ_0 (4.3.1). On déduit alors immédiatement de la proposition 4.4.1 spécialisé au cas $n=0$ le résultat suivant.

Corollaire 4.5.1. *Pour $l=p$, l'application ϕ quantique* (1.4.2) *relève, via* (4.4.1), *l'application ϕ modulaire* (4.5.1).

4.6. On revient à la situation des sections 4.1–4.3.

Proposition 4.6.1. *On a*

$$\sum_{n=0}^{p-1}\mu_n = 1 \in \mathrm{Dist}(T_1) \tag{4.6.1}$$

et cette décomposition est une décomposition en idempotents deux à deux orthogonaux. Les μ_n, $n\in[0,p[$, forment une base orthogonale de $\mathrm{Dist}(T_1)$. *Par rapport à la base standard de* $\mathrm{Dist}(T_1)$ *formée des $\binom{H}{i}$, $i\in[0,p[$, on a les formules de changement de base pour tout $n\in[0,p[$,*

$$\mu_n = \sum_{i=0}^{p-1}\binom{p-1-n}{p-1-i}\binom{H}{i}, \tag{4.6.2}$$

$$\binom{H}{n} = \sum_{i=n}^{p-1}\binom{i}{n}\mu_i. \tag{4.6.3}$$

Démonstration. Le fait que chaque μ_n soit un idempotent résulte de [4, corollaire 3.1.4] et de [4, corollaire 3.1.3] qu'on ait

$$\begin{aligned}\mu_n &= \binom{H-n-1}{p-1} = \frac{(H-n-1)(H-n-2)...(H-n-p+1)}{(p-1)!}\\ &= -(H-n-1)(H-n-2)...(H-n-p+1).\end{aligned} \tag{4.6.4}$$

Soient $n<m$, $(n,m)\in[0,p[^2$. Pour vérifier que $\mu_m\mu_n=0$, il suffit de voir dans $\mathrm{Dist}(T_1)$ que

$$(H-m-1)(H-m-2)...(H-m-p+1)(H-n-1)(H-n-2)...(H-n-p+1)=0. \tag{4.6.5}$$

Comme $-m-p+1\leq -n$, on remarque alors que le membre de gauche de (4.6.5) contient le produit $H(H-1)...(H-p+1)=\binom{H}{p}p!=0$.

D'autre part, d'après [4, corollaires 3.1.3 et 3.1.5, et proposition 3.1.1] on a

$$\mu_n = \mu_{n-p} = \binom{H+p-n-1}{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1}\binom{p-n-1}{p-i-1}\binom{H}{i}.$$

Comme la matrice $\left(\binom{p-n-1}{p-i-1}\right)_{(n,i)\in[0,p[^2}$ est unipotente, les μ_n, $n\in[0,p[$, forment une base de $\mathrm{Dist}(T_1)$. Ecrivant

$$\binom{H}{n}=\sum_{i=0}^{p-1}c_i\mu_i=\sum_{i=0}^{p-1}c_i\binom{H-i-1}{p-1}$$

et appliquant aux deux côtés les caractères $\bar{\chi}_j$, $j\in\mathbb{Z}$, définis pour tout $i\in\mathbb{N}$ par

$$\bar{\chi}_j\left(\binom{H}{i}\right)=\binom{j}{i}, \tag{4.6.6}$$

on obtient $\left(\binom{p-n-1}{p-i-1}\right)^{-1}=\left(\binom{i}{n}\right)$. En particulier, $1=\sum_{i=0}^{p-1}\mu_i$. □

4.7. Comme nous l'indiquerons plus loin dans la section 4.9 il existe un analogue modulaire de la proposition 2.6.1 mais l'on va tout d'abord introduire la généralisation suivante de la proposition 4.6.1 qui nous sera utile plus bas. Posons, pour tous $r\in\mathbb{N}^+$ et $n\in\mathbb{Z}$,

$$\mu_n^{(r)}=\sum_{i=0}^{p^r-1}(-1)^i\binom{H-n}{i}\in\mathrm{Dist}(T_r), \tag{4.7.1}$$

si bien que $\mu_n^{(1)}$ désigne le μ_n introduit en (4.3.1).

Proposition 4.7.1. *Soit $r\in\mathbb{N}^+$.*

(i) *Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on a $\mu_n^{(r)}=\binom{H-n-1}{p^r-1}=\sum_{i=0}^{p^r-1}\binom{-1}{p^r-1-i}\binom{H-n}{i}\in\mathrm{Dist}(T_r)$.*

(ii) *Pour tous $n,m\in\mathbb{Z}$, on a $\mu_n^{(r)}=\mu_m^{(r)}$ si et seulement si $n\equiv m \mod p^r$.*

(iii) *Soient ϕ le scindage de Frobenius modulaire (4.5.1) et Fr' l'homomorphisme (4.2.2). Pour tous $m\in[0,p[$ et $n\in\mathbb{Z}$, $\mu_{m+np}^{(r+1)}=\mu_m\mathrm{Fr}'(\mu_n^{(r)})$, et donc $\phi(\mu_n^{(r)})=\mu_{np}^{(r+1)}$.*

(iv) *Les $\mu_n^{(r)}$ pour $n\in[0,p^r[$, fournissent une décomposition de 1 en idempotents orthogonaux deux à deux. En particulier, $\mu_0^{(r)}$ est l'unique mesure involutive invariante de $\mathrm{Dist}(T_r)$, i.e., pour tout $\mu\in\mathrm{Dist}(T_r)$, $\mu\mu_0^{(r)}=\varepsilon(\mu)\mu_0^{(r)}$ avec $\varepsilon=\bar{\chi}_0$ (4.6.6) la coünité de $\mathrm{Dist}(T_r)$.*

(v) *Les $\mu_n^{(r)}$, pour $n\in[0,p^r[$, forment une base orthogonale de $\mathrm{Dist}(T_r)$. Par rapport à la base standard de $\mathrm{Dist}(T_r)$ formée des $\binom{H}{i}$, $i\in[0,p^r[$, on a les formules de changement de base pour tout $n\in[0,p^r[$:*

$$\mu_n^{(r)}=\mu_{n-p^r}^{(r)}=\sum_{i=0}^{p^r-1}\binom{p^r-1-n}{p^r-1-i}\binom{H}{i}, \tag{4.7.2}$$

$$\binom{H}{n} = \sum_{i=0}^{p^r-1} \binom{i}{n} \mu_i^{(r)} = \sum_{i=n}^{p^r-1} \binom{i}{n} \mu_i^{(r)}. \tag{4.7.3}$$

Plus généralement, pour tous $m \in \mathbb{Z}$ *et* $n \in [0, p^r[$,

$$\binom{H-m}{n} = \sum_{i=0}^{p^r-1} \binom{i-m}{n} \mu_i^{(r)}. \tag{4.7.4}$$

(vi) *Pour tout* $n \in [0, p^r[$, *on a* $\mathrm{Dist}(\mathrm{Fr}^r)(\mu_n^{(r)}) = \mathrm{Dist}(\mathrm{Fr})^r(\mu_n^{(r)}) = \delta_{n0}$.

Démonstration. Pour (i), la seconde égalité résulte de [4, corollaire 3.1.2]. Comme on a aussi trivialement

$$\binom{-1}{i} = (-1)^i, \tag{4.7.5}$$

l'assertion en découle. Pour (ii), on prouve d'abord le sens « si » pour lequel il suffit de montrer que $\mu_{n-p^r}^{(r)} = \mu_n^{(r)}$. Or,

$$\mu_{n-p^r}^{(r)} = \binom{H+p^r-n-1}{p^r-1} = \sum_{i=0}^{p^r-1} \binom{p^r}{p^r-1-i} \binom{H-n-1}{i} = \binom{H-n-1}{p^r-1} = \mu_n^{(r)}.$$

Pour (iii), soient $m \in [0, p[$ et $n \in \mathbb{Z}$. Grâce à ce qu'on vient juste de démontrer, on peut supposer $n \in [0, p^r[$. On a

$$\begin{aligned}
\mu_{m+np}^{(r+1)} &= \mu_{m+np-p^{r+1}}^{(r+1)} \\
&= \binom{H+p^{r+1}-m-np-1}{p^{r+1}-1} \\
&= \sum_{i=0}^{p^{r+1}-1} \binom{p^{r+1}-m-np-1}{p^{r+1}-1-i} \binom{H}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{p^{r+1}-1} \binom{p(p^r-n-1)+p-m-1}{p(p^r-i_1-1)+p-i_0-1} \binom{H}{i_0+i_1p} \\
&= \sum_{i=0}^{p^{r+1}-1} \binom{p^r-n-1}{p^r-i_1-1} \binom{p-m-1}{p-i_0-1} \binom{H}{i_0} \binom{H}{i_1p} \\
&= \mu_m \mathrm{Fr}'(\mu_n^{(r)}).
\end{aligned}$$

La première assertion de (iv) découle maintenant de la proposition 4.6.1 grâce à (iii) car Fr' est un homomorphisme de $\mathbb{F}_p$-algèbres. La partie « seulement si » de

(ii) en découle également. Quant aux formules de changement de base (v), elles se prouvent comme dans la proposition 4.6.1 à l'aide des $\overline{\chi}_j$. L'assertion (vi) découle immédiatement de (v). □

4.8. A l'aide de cette base orthogonale de $\mathrm{Dist}(T_r)$ formée par les $\mu_n^{(r)}$ (4.7.1), on peut voir que les $X^{(a)}\mu_b^{(r)}Y^{(c)}$ forment, pour $a,b,c\in[0,p^r[$, une base de $\mathrm{Dist}(G_r)$. Outre (4.1.1), les relations entre ces éléments (correspondantes à (3.3.3), (4.1.1) et (4.1.2)) définissant $\mathrm{Dist}(G_r)$ s'expriment comme suit.

Proposition 4.8.1. *Soient* $a,b,c\in[0,p^r[$.
(i) $X^{(a)}\mu_b^{(r)}=\mu_{b+2a}^{(r)}X^{(a)}$ *et* $Y^{(c)}\mu_b^{(r)}=\mu_{b-2c}^{(r)}Y^{(c)}$.
(ii) $X^{(a)}Y^{(c)}=\sum_{i=0}^{\min\{a,c\}}\sum_{j=0}^{p^r-1}\binom{j-a-c+2i}{i}Y^{(c-i)}\mu_j^{(r)}X^{(a-i)}$.

Démonstration. (i) Combinant (4.7.2) et (4.1.2), on a en effet pour tout $n\in\mathbb{Z}$,

$$X^{(a)}\mu_n^{(r)}=X^{(a)}\binom{H-n-1}{p^r-1}=\binom{H-2a-n-1}{p^r-1}X^{(a)}=\mu_{n+2a}^{(r)}X^{(a)}. \tag{4.8.1}$$

Par un calcul analogue (ou en utilisant l'involution de Chevalley),

$$Y^{(c)}\mu_n^{(r)}=\mu_{n-2c}^{(r)}Y^{(c)}. \tag{4.8.2}$$

(ii) Découle de (3.3.3) et de la formule de changement de base (4.7.2). □

Corollaire 4.8.2. *Soit* $r\in\mathbb{N}^+$.
(i) *Si* $1\leq s\leq r$, $\mathrm{Dist}(G_r)$ *admet une décomposition en somme directe*

$$\mathrm{Dist}(G_r)=\coprod_{n,m=0}^{p^s-1}\mu_n^{(s)}\mathrm{Dist}(G_r)\mu_m^{(s)} \tag{4.8.3}$$

et chaque $\mu_n^{(s)}\mathrm{Dist}(G_r)\mu_m^{(s)}$ *est un* $\mathbb{F}_p$*-espace vectoriel de base* $X^{(a)}Y^{(c)}\mu_{kp^s+m}^{(r)}$ *avec* $k\in[0,p^{r-s}[$ *et* $a,c\in[0,p^r[$ *tels que* $n+2c\equiv m+2a \bmod p^s$.
(ii) $\mathrm{Dist}(G)$ *admet une décomposition en somme directe*

$$\mathrm{Dist}(G)=\coprod_{n,m=0}^{p^r-1}\mu_n^{(r)}\mathrm{Dist}(G)\mu_m^{(r)} \tag{4.8.4}$$

et chaque $\mu_n^{(r)}\mathrm{Dist}(G_{r+s})\mu_m^{(r)}$, *pour tout* $s\in\mathbb{N}^+$, *est un* $\mathbb{F}_p$*-espace vectoriel de base* $X^{(a)}Y^{(c)}\mu_{kp^r+m}^{(r+s)}$, *avec* $k\in[0,p^s[$ *et* $a,c\in[0,p^{r+s}[$ *tels que* $n+2c\equiv m+2a \bmod p^r$.

Démonstration. La proposition 4.7.1(iv) permet d'écrire

$$\begin{aligned}\mathrm{Dist}(T_r)\mu_m^{(s)} &= \coprod_{k=0}^{p^r-1} \mathbb{F}_p\mu_k^{(r)}\mu_m^{(s)} = \coprod_{k=0}^{p^r-1} \mathbb{F}_p\mu_{k_0}^{(s)}(\mathrm{Fr}')^s(\mu_{k_1}^{(r-s)})\mu_m^{(s)}\\ &= \coprod_{k=0}^{p^{r-s}-1} \mathbb{F}_p\mu_m^{(s)}(\mathrm{Fr}')^s(\mu_k^{(r-s)}) = \coprod_{k=0}^{p^{r-s}-1} \mathbb{F}_p\mu_{m+kp^s}^{(r)}.\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}\mu_n^{(s)}X^{(a)}Y^{(c)}\mu_{m+kp^s}^{(r)} &= X^{(a)}Y^{(c)}\mu_{n-2a+2c}^{(s)}\mu_{m+kp^s}^{(r)}\\ &= \begin{cases} X^{(a)}Y^{(c)}\mu_{m+kp^s}^{(r)} & \text{si } n-2a+2c\equiv m \bmod p^s,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

□

4.9. Les arguments utilisés pour prouver le corollaire 4.8.2, spécialisés au cas $r=1$, donne l'existence d'une décomposition $\mathrm{Dist}(G_1)=\coprod_{n=0}^{p-1}\mathrm{Dist}(G_1)\mu_n$ de $\mathrm{Dist}(G_1)$ en somme de $\mathrm{Dist}(G_1)$-modules à la fois projectifs et injectifs qu'on peut décrire d'une manière parallèle à la proposition 2.6.1. On en déduit en particulier qu'aucun des $\mathrm{Dist}(G_1)\mu_n$, $n\in\mathbb{Z}$, n'est un progénérateur pour $\mathrm{Dist}(G_1)$. Il en va de même avec $\mathrm{Dist}(G_2)\mu_0$ pour $\mathrm{Dist}(G_2)$.

4.10. On peut aussi déduire de la simple existence des idempotents (4.7.1) et de leurs propriétés une nouvelle preuve de l'existence du scindage de $\mathrm{Dist}(\mathrm{Fr})$ sur $\mathrm{Dist}(G)$ de [4]. Commençons par le résultat préparatoire suivant.

Lemme 4.10.1. *L'ensemble* $\sum_{a,b,c\in\mathbb{N}}\sum_{n\in[0,p^b[}\mathbb{F}_pX^{(pa)}Y^{(pc)}\mu_{np^b}^{(1+b)}$ *est une sous-*$\mathbb{F}_p$*-algèbre de* $\mu_0\mathrm{Dist}(G)\mu_0$.

Démonstration. Par le corollaire 4.8.2, chaque $X^{(pa)}Y^{(pc)}\mu_{np^b}^{(1+b)}$, $a,b,c\in\mathbb{N}$, $n\in[0,p^b[$, appartient à $\mu_0\mathrm{Dist}(G)\mu_0$. Pour tous $r,s,t\in\mathbb{N}$, $m\in[0,p^s[$, prenant $d>\max\{b,s\}$ tel que $p^d>\max\{pc,pr\}$, on a, par la proposition 4.8.1,

$$\begin{aligned}&X^{(pa)}Y^{(pc)}\mu_{np^b}^{(1+b)}X^{(pr)}Y^{(pt)}\mu_{mp^s}^{(1+s)}\\ &\quad= X^{(pa)}Y^{(pc)}X^{(pr)}Y^{(pt)}\mu_{np^b-2pr+2pt}^{(1+b)}\mu_{mp^s}^{(1+s)}\\ &\quad= X^{(pa)}\left(\sum_{i=0}^{\min\{pc,pr\}}\sum_{j=0}^{p^d-1}\binom{j-pr-pc+2i}{i}X^{(pr-i)}\mu_j^{(d)}Y^{(pc-i)}\right)\\ &\qquad\times Y^{(pt)}\mu_{np^b-2pr+2pt}^{(1+b)}\mu_{mp^s}^{(1+s)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{\min\{pc,pr\}} \sum_{j=0}^{p^d-1} \binom{j-pr-pc+2i}{i} X^{(pa)} X^{(pr-i)} Y^{(pc-i)} Y^{(pt)} \mu^{(d)}_{j+2(pc-i+pt)} \\
&\quad \times \mu^{(1+b)}_{np^b-2pr+2pt} \mu^{(1+s)}_{mp^s} \\
&= \sum_{i=0}^{\min\{pc,pr\}} \sum_{j=0}^{p^d-1} \binom{j-pr-pc+2i}{i} \binom{pa+pr-i}{pa} \\
&\quad \times X^{(pa+pr-i)} \binom{pc+pt-i}{pt} Y^{(pc-i+pt)} \mu^{(d)}_{j+2(pc-i+pt)} \mu^{(1+b)}_{np^b-2pr+2pt} \mu^{(1+s)}_{mp^s} \\
&= \sum_{i=0}^{\min\{c,r\}} \sum_{j=0}^{p^d-1} \binom{j-pr-pc+2ip}{ip} \binom{pa+pr-ip}{pa} \\
&\quad \times X^{(pa+pr-ip)} \binom{pc+pt-ip}{pt} Y^{(pc-ip+pt)} \mu^{(d)}_{j+2(pc-ip+pt)} \mu^{(1+b)}_{np^b-2pr+2pt} \mu^{(1+s)}_{mp^s} \\
&= \sum_{i=0}^{\min\{c,r\}} \sum_{j=0}^{p^{d-1}-1} \binom{jp-pr-pc+2ip}{ip} \binom{a+r-i}{a} \\
&\quad \times X^{(p(a+r-i))} \binom{c+t-i}{t} Y^{(p(c-i+t))} \mu^{(d)}_{jp+2p(c-i+t)} \mu^{(1+b)}_{np^b-2pr+2pt} \mu^{(1+s)}_{mp^s} \\
&= \sum_{i=0}^{\min\{c,r\}} \sum_{j=0}^{p^{d-1}-1} \binom{j-a-c+2i}{i} \binom{a+r-i}{a} \binom{c+t-i}{t} \\
&\quad \times X^{(p(a+r-i))} Y^{(p(c-i+t))} \mu^{(d)}_{p(j+2(c-i+t))} \mu^{(1+b)}_{np^b-2pr+2pt} \mu^{(1+s)}_{mp^s}
\end{aligned}
$$

avec

$$\mu^{(d)}_{p(j+2(c-i+t))} \mu^{(1+b)}_{np^b-2pr+2pt} \mu^{(1+s)}_{mp^s} = \mu^{(d)}_{p(j+2(c-i+t))}$$

si $b{=}s{=}0$, ou bien si $b{>}0$ et $s{=}0$ avec $j{+}2(c{-}i{+}t){\equiv}np^{b-1}{-}2r{+}2t \bmod p^b$, ou bien si $b{=}0$ et $s{>}0$ avec $j{+}2(c{-}i{+}t){\equiv}np^{b-1}{-}2r{+}2t \bmod p^s$ ou bien finalement si $b, s{>}0$ avec à la fois $j{+}2(c{-}i{+}t){\equiv}np^{b-1}{-}2r{+}2t \bmod p^b$ et $j{+}2(c{-}i{+}t){\equiv}np^{b-1}{-}2r{+}2t \bmod p^s$, et

$$\mu^{(d)}_{p(j+2(c-i+t))} \mu^{(1+b)}_{np^b-2pr+2pt} \mu^{(1+s)}_{mp^s} = 0$$

sinon. □

4.11. Étendons maintenant linéairement à $\mathrm{Dist}(G)$ l'endomorphisme Fr' (4.2.2) de $\mathrm{Dist}(T)$ par

$$X^{(a)}\mu_n^{(1+b)}Y^{(c)} \longmapsto X^{(ap)}\mathrm{Fr}'(\mu_n^{(1+b)})Y^{(cp)} \tag{4.11.1}$$

pour tous $a, b, c \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Théorème 4.11.1. *L'application*

$$\phi\colon \mathrm{Dist}(G) \longrightarrow \sum_{a,b,c\in\mathbb{N}} \sum_{n\in[0,p^b[} \mathbb{F}_p X^{(pa)}Y^{(pc)}\mu_{np^b}^{(1+b)} \tag{4.11.2}$$

définie par

$$\phi(\mu) = \mu_0\mathrm{Fr}'(\mu)\mu_0 = \mathrm{Fr}'(\mu)\mu_0 \quad \textit{pour tout } \mu \in \mathrm{Dist}(G) \tag{4.11.3}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{F}_p$-algèbres tel que $\mathrm{Dist}(\mathrm{Fr})\circ\phi = \mathrm{id}_{\mathrm{Dist}(G)}$.

Démonstration. Comme le lecteur s'en assurera, l'utilisation de la lettre ϕ pour désigner (4.11.2) n'entraîne pas de confusion. Reprenons les notations de la preuve du lemme 4.10.1 et supposons tout d'abord $b=s=0$. On a

$$\begin{aligned}\phi(X^{(a)}Y^{(c)})\phi(X^{(r)}Y^{(t)}) &= X^{(ap)}Y^{(cp)}\mu_0 X^{(rp)}Y^{(tp)}\mu_0 \\ &= \sum_{i=0}^{\min\{c,r\}} \sum_{j=0}^{p^{l-1}-1} \binom{j-r-c+2i}{i}\binom{a+r-i}{a}\binom{c+t-i}{t} \\ &\quad \times X^{(p(a+r-i))}Y^{(p(c-i+t))}\mu_{p(j+2(c-i+t))}^{(l)}\end{aligned}$$

alors que

$$\begin{aligned}\phi(X^{(a)}Y^{(c)}X^{(r)}Y^{(t)}) &= \phi\Bigg(\sum_{i=0}^{\min\{c,r\}} \sum_{j=0}^{p^{l-1}-1} \binom{j-r-c+2i}{i}\binom{a+r-i}{a}\binom{c+t-i}{t} \\ &\quad \times X^{(a+r-i)}Y^{(c-i+t)}\mu_{j+2(c-i+t)}^{(l-1)}\Bigg) \\ &= \sum_{i=0}^{\min\{c,r\}} \sum_{j=0}^{p^{l-1}-1} \binom{j-r-c+2i}{i}\binom{a+r-i}{a}\binom{c+t-i}{t} \\ &\quad \times X^{p(a+r-i)}Y^{p(c-i+t)}\mu_0\mathrm{Fr}'\big(\mu_{j+2(c-i+t)}^{(l-1)}\big)\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{\min\{c,r\}} \sum_{j=0}^{p^{l-1}-1} \binom{j-a-c+2i}{i} \binom{a+r-i}{a} \binom{c+t-i}{t} \times X^{p(a+r-i)} Y^{p(c-i+t)} \mu^{(l)}_{p(j+2(c-i+t))}.$$

Il s'ensuit bien que

$$\phi(X^{(a)}Y^{(c)})\phi(X^{(r)}Y^{(t)}) = \phi(X^{(a)}Y^{(c)}X^{(r)}Y^{(t)}). \tag{4.11.4}$$

Si maintenant $b>0$ et $s=0$,

$$\begin{aligned}
&\phi(X^{(a)}Y^{(c)}\mu^{(b)}_{nb^{b-1}})\phi(X^{(r)}Y^{(t)}) \\
&\quad = X^{(ap)}Y^{(cp)}\mu^{(1+b)}_{np^b} X^{(rp)}Y^{(tp)}\mu_0 \\
&\quad = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\min\{c,r\}} \sum_{j=0}^{p^{l-1}-1} \binom{j-r-c+2i}{i} \\ \quad \times \binom{a+r-i}{a}\binom{c+t-i}{t} X^{(p(a+r-i))}Y^{(p(c-i+t))} \\ \quad \times \mu^{(l)}_{p(j+2(c-i+t))} & \text{si } j+2(c-i+t) \equiv np^{b-1}-2r+2t \bmod p^b, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}
\end{aligned}$$

alors que

$$\begin{aligned}
\phi(X^{(a)}Y^{(c)}\mu^{(b)}_{np^{b-1}}X^{(r)}Y^{(t)}) &= \phi\Bigg(\sum_{i=0}^{\min\{c,r\}} \sum_{j=0}^{p^{l-1}-1} \binom{j-r-c+2i}{i}\binom{a+r-i}{a}\binom{c+t-i}{t} \\
&\qquad \times X^{(a+r-i)}Y^{(c-i+t)}\mu^{(l-1)}_{j+2(c-i+t)}\mu^{(b)}_{np^{b-1}-2r+2t}\Bigg) \\
&= \begin{cases} \sum_{i=0}^{\min\{c,r\}} \sum_{j=0}^{p^{l-1}-1} \binom{j-r-c+2i}{i}\binom{a+r-i}{a} \\ \quad \times \binom{c+t-i}{t} X^{p(a+r-i)}Y^{p(c-i+t)} \\ \quad \times \mu_0 \mathrm{Fr}'(\mu^{(l-1)}_{j+2(c-i+t)}) & \text{si } j+2(c-i+t) \equiv np^{b-1}-2r+2t \bmod p^b, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sum_{i=0}^{\min\{c,r\}} \sum_{j=0}^{p^{l-1}-1} \binom{j-a-c+2i}{i}\binom{a+r-i}{a} \\ \quad \times \binom{c+t-i}{t} X^{p(a+r-i)}Y^{p(c-i+t)} \\ \quad \times \mu^{(l)}_{p(j+2(c-i+t))} & \text{si } j+2(c-i+t) \equiv np^{b-1}-2r+2t \bmod p^b, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}
\end{aligned}$$

et donc

$$\phi(X^{(a)}Y^{(c)}\mu^{(b)}_{nb^{b-1}})\phi(X^{(r)}Y^{(t)}) = \phi(X^{(a)}Y^{(c)}\mu^{(b)}_{nb^{b-1}}X^{(r)}Y^{(t)}). \tag{4.11.5}$$

On traite de la même façon les cas restants. □

5. Le cas général

5.1. Les notations et hypothèses générales de l'introduction des sections 1.1 et 1.3 sont désormais en vigueur. On remarquera que celles sur l impliquent que les ordres des $q_i^2 \in \mathcal{B}$ sont tous égaux à l. Rappelons que

$$\begin{bmatrix} K_i \\ t \end{bmatrix} = \prod_{s=1}^{t} \frac{K_i v_i^{-s+1} - K_i^{-1} v_i^{s-1}}{v_i^s - v_i^{-s}} \in U_{\mathbb{Q}(v)}, \quad i \in [1,\ell], t \in \mathbb{N},$$

appartient à U. Comme nous l'avons déjà sous-entendu plus haut (2.1.3), nous noterons $\left[\begin{smallmatrix} K_i \\ t \end{smallmatrix}\right] \otimes 1 \in U \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ simplement par le symbole $\left[\begin{smallmatrix} K_i \\ t \end{smallmatrix}\right]$.

5.2. Posons, pour $i \in [1,\ell]$ et $j \in [0, 2l[$,

$$\varkappa_{ij} = \frac{1}{2l} \sum_{r=0}^{2l-1} q^{-jr/2} K_i^r \in U_q \quad \text{et} \quad \varkappa = \prod_{i=1}^{\ell} \varkappa_{i0}. \tag{5.2.1}$$

Lorsque $\ell = 1$, ces éléments correspondent donc à ceux considérés dans (2.1.5).

Lemme 5.2.1. (i) *L'élément $\varkappa$ est l'unique idempotent non nul de la sous-algèbre $u^0_{\mathcal{B}}$ de $U_{\mathcal{B}}$ engendrée par les K_i, $1 \le i \le \ell$, tel que $K_i\varkappa = \varkappa$ pour tout $i \in [1,\ell]$.*

(ii) *Pout tous $i, j \in [1,\ell]$ et $r \in \mathbb{Z}$, on a*

$$E_i^{(lr)}\varkappa_{j0} = \varkappa_{j0}E_i^{(lr)} \quad \textit{et} \quad F_i^{(lr)}\varkappa_{j0} = \varkappa_{j0}F_i^{(lr)}. \tag{5.2.2}$$

(iii) *Chaque $\varkappa_{ij}$, avec $i \in [1,\ell]$ et $j \in [1, 2l[$, est un idempotent, et les $\prod_{i=1}^{\ell} \varkappa_{ij}$, $j \in [0, 2l[$, forment une décomposition de 1 en idempotents orthogonaux deux à deux.*

Démonstration. Les assertions (i) et (ii) découlent du cas $\ell = 1$ car les K_i, $i \in [1,\ell]$, commutent entre eux ainsi qu'avec les $E_i^{(lr)}$ et les $F_i^{(lr)}$ pour tout $i \in [1,\ell]$.

L'assertion (iii) découle de la section 2.1. □

5.3. Soient $\mathbf{U}^+_{\mathcal{B}}=\mathcal{B}[X_i^{(r)}\,|\,i\in I \text{ et } r\in\mathbb{N}]$ et $\mathbf{U}^-_{\mathcal{B}}=\mathcal{B}[Y_i^{(r)}\,|\,i\in I \text{ et } r\in\mathbb{N}]$ comme dans la section 1.4. Rappelons que si $H_i=[X_i,Y_i]$, chaque $\binom{H_i}{r}=H_i(H_i-1)...(H_i-r+1)/r!$, pour $i\in I$ et $r\in\mathbb{N}$, est un élément de $\mathbf{U}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$, qui appartient en fait à $\mathbf{U}$ et on le désignera abusivement par le même symbole, de même que ses images canoniques dans $\mathbf{U}_{\mathcal{A}}=\mathbf{U}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{A}$, $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}=\mathbf{U}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{B},\dots$. Si $\mathbf{U}^0_{\mathcal{B}}=\mathcal{B}\big[\binom{H_i}{r}\,|\,i\in I \text{ et } r\in\mathbb{N}\big]$, on dispose d'un isomorphisme $\mathcal{B}$-linéaire $\mathbf{U}^-_{\mathcal{B}}\otimes_{\mathcal{B}}\mathbf{U}^0_{\mathcal{B}}\otimes_{\mathcal{B}}\mathbf{U}^+_{\mathcal{B}}\to\mathbf{U}_{\mathcal{B}}$ donné par la multiplication. Soit $\mathbf{U}^{\geq 0}_{\mathcal{B}}$ (resp. $\mathbf{U}^{\leq 0}_{\mathcal{B}}$) l'image de $\mathbf{U}^0_{\mathcal{B}}\otimes_{\mathcal{B}}\mathbf{U}^+_{\mathcal{B}}$ (resp. $\mathbf{U}^-_{\mathcal{B}}\otimes_{\mathcal{B}}\mathbf{U}^0_{\mathcal{B}}$) par cette application. C'est une sous-$\mathcal{B}$-algèbre de $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}$.

Lemme 5.3.1. *Il existe des applications multiplicatives $\mathcal{B}$-linéaires $\phi^{\geq 0}\colon \mathbf{U}^{\geq 0}_{\mathcal{B}}\to U^{\geq 0}_{\mathcal{B}}$ et $\phi^{\leq 0}\colon \mathbf{U}^{\leq 0}_{\mathcal{B}}\to U^{\leq 0}_{\mathcal{B}}$ telles que pour tous $i\in I$ et $r\in\mathbb{N}$,*

$$\phi^{\geq 0}(X_i^{(r)})=E_i^{(rl)}\varkappa,\quad \phi^{\geq 0}\left(\binom{H_i}{r}\right)=\begin{bmatrix}K_i\\ rl\end{bmatrix}\varkappa=\phi^{\leq 0}\left(\binom{H_i}{r}\right),$$
$$\phi^{\leq 0}(Y_i^{(r)})=F_i^{(rl)}\varkappa.$$

Démonstration. En effet, il existe d'après [9, théorème 1.2] des homomorphismes de $\mathcal{B}$-algèbres ${}'\phi^{\geq 0}\colon \mathbf{U}^{\geq 0}_{\mathcal{B}}\to U^{\geq 0}_{\mathcal{B}}$ et ${}'\phi^{\leq 0}\colon \mathbf{U}^{\leq 0}_{\mathcal{B}}\to U^{\leq 0}_{\mathcal{B}}$ modulo $(K_i^l-1\,|\,i\in I)$ tels que pour tous $i\in I$, et $r\in\mathbb{N}$, on ait

$${}'\phi^{\geq 0}(X_i^{(r)})=E_i^{(rl)},\quad {}'\phi^{\geq 0}\left(\binom{H_i}{r}\right)=\begin{bmatrix}K_i\\ rl\end{bmatrix}={}'\phi^{\leq 0}\left(\binom{H_i}{r}\right),\quad {}'\phi^{\leq 0}(Y_i^{(r)})=F_i^{(rl)}.$$

Comme K_i^l est un élément central ([11, lemme 4.4]) dans $U_{\mathcal{B}}$ et comme $\varkappa_{i0}(K_i^l-1)=0$ pour tout i grâce au lemme 5.2.1(iii), l'assertion en découle. □

5.4. Avec ces notations, le même argument que celui utilisé dans [5, théorème 1.3] suffit pour obtenir le résultat suivant.

Proposition 5.4.1. *Il existe une application $\mathcal{B}$-linéaire multiplicative $\phi\colon \mathbf{U}_{\mathcal{B}}\to U_{\mathcal{B}}$ prolongeant $\phi^{\geq 0}$ et $\phi^{\leq 0}$, qui, de plus, scinde l'homomorphisme de Frobenius quantique* (1.3.1) $\mathrm{Fr}\colon U_{\mathcal{B}}\to\mathbf{U}_{\mathcal{B}}$.

Le théorème 1.4.1 est ainsi démontré.

5.5. L'application de Frobenius quantique (1.3.1) Fr est en réalité un homomorphisme de $\mathcal{B}$-algèbres de Hopf [13, sections 1.1 et 1.3] vérifiant quelques compatibi-

lités supplémentaires. La comultiplication sur U vérifie

$$\Delta(E_i^{(n)}) = \sum_{j=0}^{n} v_i^{j(n-j)} E_i^{(n-j)} K_i^j \otimes E_i^{(j)},$$
$$\Delta(F_i^{(n)}) = \sum_{j=0}^{n} v_i^{-j(n-j)} F_i^{(j)} \otimes K_i^{-j} F_i^{(n-j)},$$
$$\Delta(K_i) = K_i \otimes K_i,$$

pour tous $i \in [1, \ell]$ et $n \in \mathbb{N}$. On a donc $(\mathrm{Fr}\otimes\mathrm{Fr})\circ\Delta(E_i^{(n)}) = \sum_{j=0}^{n} X_i^{((n-j)/l)} \otimes X_i^{(j/l)}$, quantité qui s'annule sauf si $l|n$, auquel cas

$$(\mathrm{Fr}\otimes\mathrm{Fr})\circ\Delta(E_i^{(nl)}) = \sum_{j=0}^{n} X_i^{(n-j)} \otimes X_i^{(j)} = \Delta\circ\mathrm{Fr}(E_i^{(nl)}) \tag{5.5.1}$$

pout tous $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [1, \ell]$. De même $(\mathrm{Fr}\otimes\mathrm{Fr})\circ\Delta(F_i^{(n)}) = \Delta\circ\mathrm{Fr}(F_i^{(n)})$. On a également $(\mathrm{Fr}\otimes\mathrm{Fr})\circ\Delta(K_i) = (\mathrm{Fr}\otimes\mathrm{Fr})(K_i\otimes K_i) = 1\otimes 1 = \Delta\circ\mathrm{Fr}(K_i)$.

Comme $U = \mathcal{A}[E_i^{(n)}, F_i^{(n)}, K_i^{\pm 1} | i \in [1, \ell] \text{ et } n \in \mathbb{N}]$, on en déduit donc que

$$(\mathrm{Fr}\otimes\mathrm{Fr})\circ\Delta = \Delta\circ\mathrm{Fr}. \tag{5.5.2}$$

La coünité ε sur U annule tous les $E_i^{(n)}$ et $F_i^{(n)}$, $n>0$, et envoie K_i to 1. On a donc

$$\mathrm{Fr}\circ\varepsilon = \varepsilon\circ\mathrm{Fr}. \tag{5.5.3}$$

Finalement, l'antipode S sur U est donnée par $S(E_i^{(n)}) = (-1)^n v_i^{n(n-1)} K_i^{-n} E_i^{(n)}$, $S(F_i^{(n)}) = (-1)^n v_i^{-n(n-1)} F_i^{(n)} K_i^n$, et $S(K_i) = K_i^{-1}$. On a donc

$$(\mathrm{Fr}\otimes\mathrm{Fr})\circ S = \Delta\circ S. \tag{5.5.4}$$

Pour le scindage ϕ (1.4.2) la situation est toute autre. On a $\varepsilon\circ\phi = \phi\circ\varepsilon$, et $S(\varkappa) = \varkappa$ car $K_i^{2l} = 1$. Comme $K_i\varkappa = \varkappa$ pour tout $i \in [1, \ell]$ grâce au lemme 5.2.1(i), on a donc aussi

$$S\circ\phi = \phi\circ S. \tag{5.5.5}$$

L'application ϕ ne commute néanmoins pas avec les comultiplications :

$$(\phi\otimes\phi)\circ\Delta(1) = \varkappa\otimes\varkappa \neq \Delta(\varkappa) = \Delta\circ\phi(1).$$

Cependant,

$$\Delta(\varkappa)(\varkappa\otimes\varkappa) = (\varkappa\otimes\varkappa)\prod_{i=1}^{\ell}\left(\frac{1}{2l}\sum_{j=0}^{2l-1} K_i^j \otimes K_i^j\right) = \varkappa\otimes\varkappa.$$

Rappelons aussi [13, section 1.1], [14, section 3.1.3] qu'il existe une involution Ω et une anti-involution Ψ de U définies par

$$\Omega(E_i)=F_i,\qquad \Omega(F_i)=E_i,\qquad \Omega(K_i)=K_i^{-1},\qquad \Omega(v)=v, \tag{5.5.6}$$

$$\Psi(E_i)=E_i,\qquad \Psi(F_i)=F_i,\qquad \Psi(K_i)=K_i^{-1},\qquad \Psi(v)=v, \tag{5.5.7}$$

telles que l'anti-morphisme $\Psi\circ\Omega=\Omega\circ\Psi$ échange $E_i^{(n)}$ et $F_i^{(n)}$ et fixe K_i pour tout $i\in[1,\ell]$. Abrégeant $(\Omega\circ\Psi)\otimes_{\mathcal{A}}\mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$ en $\Omega\circ\Psi$, on a

$$\Omega\circ\Psi(\varkappa)=\varkappa. \tag{5.5.8}$$

Si maintenant τ désigne l'anti-involution de Chevalley de $\mathbf{U}_{\mathbb{Q}}$ échangeant chaque X_i avec Y_i, on a

$$\Omega\circ\Psi\circ\phi=\phi\circ\tau. \tag{5.5.9}$$

5.6. Nous renvoyons ici le lecteur à [14, section 23] pour tout ce que nous utiliserons concernant la $\mathbb{Q}(v)$-algèbre quantique *modifiée* associée aux données de la section 1.1. La $\mathcal{A}$-forme de cette algèbre quantique modifiée peut s'écrire $\dot{U}=\coprod_{\lambda\in\Lambda}U^+1_\lambda U^-=\coprod_{\lambda\in\Lambda}U^-1_\lambda U^+$ avec la structure de U-bimodule donnée dans [14, 23.1.3]. On a en particulier $K_i1_\lambda=v_i^{\langle\lambda,\alpha_i^\vee\rangle}1_\lambda$ pour tous $i\in[1,\ell]$ et $\lambda\in\Lambda$.

Soit

$$\begin{aligned}\psi\colon U&\longrightarrow\dot{U},\\ x&\longmapsto x1_0,\end{aligned} \tag{5.6.1}$$

l'application $\mathcal{A}$-linéaire donnée par l'action à gauche. On a $\psi(\varkappa)=1_0$.

Posons $\overline{\mathcal{A}}=\mathcal{A}/(v-1)\simeq\mathbb{Z}$ et soit

$$\eta\colon U\otimes_{\mathcal{A}}\overline{\mathcal{A}}\longrightarrow\mathbf{U} \tag{5.6.2}$$

le morphisme de passage au quotient $U\otimes_{\mathcal{A}}\overline{\mathcal{A}}\to(U\otimes_{\mathcal{A}}\overline{\mathcal{A}})/(K_i-1\,|\,i\in[1,\ell])\simeq\mathbf{U}$.

McGerty a construit dans [15, proposition 3.4] un scindage du morphisme de Frobenius qui, dans notre situation, s'interprète comme une application

$$c\colon\dot{U}\otimes_{\mathcal{A}}\overline{\mathcal{A}}\longrightarrow\dot{U}\otimes_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}/(\Phi_l)). \tag{5.6.3}$$

Il résulte alors immédiatement des définitions qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\dot{U}\otimes_{\mathcal{A}}\overline{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\quad c \quad} & \dot{U}\otimes_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}/(\Phi_l)) & \hookrightarrow & \dot{U}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{B} \\
\uparrow{\scriptstyle \psi\otimes_{\mathcal{A}}\overline{\mathcal{A}}} & & & & \uparrow{\scriptstyle \psi\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{B}} \\
U\otimes_{\mathcal{A}}\overline{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\eta} \mathbf{U} & \hookrightarrow & \mathbf{U}_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\phi} U_{\mathcal{B}}.
\end{array}$$

5.7. Pour terminer, faisons encore deux remarques sur la situation modulaire, l'une sur la question des contractions par Frobenius des modules, l'autre sur le caractère scindé par Frobenius des variétés de drapeaux.

Soient donc $\Bbbk=\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments, G un $\Bbbk$-schéma en groupes semi-simple simplement connexe et T un tore maximal de G scindé sur $\Bbbk$. Par abus de notations, notons Λ le groupe des caractères de T, Λ^+ le sous-ensemble des poids dominants, $\Lambda_1=\{\lambda\in\Lambda\,|\,\langle\lambda,\alpha_i^\vee\rangle\in[0,p[\text{ pour tout } i\}$, et μ_0 l'idempotent de $\mathrm{Dist}(T)$ définissant le scindage ϕ de $\mathrm{Dist}(\mathrm{Fr})$ (cf. [5, théorème 1.3]). Tout G-module M admet une décomposition $\Bbbk$-linéaire en somme directe $M=\mu_0 M\oplus(1-\mu_0)M$. A l'aide du scindage $\phi\colon \mathrm{Dist}(G)\to\mathrm{Dist}(G)$, on peut donc munir $\mu_0 M$ d'une structure de G-module que nous noterons M^ϕ et que nous appellerons la contraction par Frobenius de M. Comme $\mu_0 M=\coprod_{\nu\in\Lambda} M_{p\nu}$, les poids de M^ϕ sont les $\nu\in\Lambda$ tels que $M_{p\nu}\neq 0$. La structure de G-module de M^ϕ est quelque peu mystérieuse : même un G-module simple $L(\lambda)$ avec un plus haut poids $\lambda\in\Lambda_1$ peut être tel que $L(\lambda)^\phi\neq 0$, auquel cas $(L(\lambda)^\phi)^{\mathrm{Fr}}$ne peut être un G-sous-module de $L(\lambda)$. Il pourrait cependant jouer un rôle dans les questions de p-filtrations des G-modules.

Soient $\nabla(\lambda)$ le G-module induit standard construit à partir de $\lambda\in\Lambda^+$ et $L(\nu)$ le G-module simple de plus haut poids $\nu\in\Lambda^+$. On dit qu'un G-module M de dimension finie admet une *bonne filtration* (resp. une *bonne p-filtration*) si et seulement si il admet une filtration par des G-sous-modules dont les gradués associés sont de la forme $\nabla(\lambda)$ avec $\lambda\in\Lambda^+$ (resp. $L(\nu)\otimes\nabla(\mu)^{\mathrm{Fr}}$ avec $\nu\in\Lambda_1$ et $\mu\in\Lambda^+$). Soit h le nombre de Coxeter de G.

Proposition 5.7.1. *Supposons $p\geq 2(h-1)$ et soit M un G-module M de dimension finie. Toute bonne p-filtration sur M induit une bonne filtration sur M^ϕ.*

Démonstration. Comme le foncteur $V\to V^\phi$ est exact, on peut supposer que $M=L(\nu)\otimes\nabla(\lambda)^{\mathrm{Fr}}$ pour certains $\nu\in\Lambda_1$ et $\lambda\in\Lambda^+$. On a alors $(L(\nu)\otimes\nabla(\lambda)^{\mathrm{Fr}})^\phi\simeq L(\nu)^\phi\otimes\nabla(\lambda)$. Si $L(\nu)^\phi$ admet une bonne filtration avec des sous-quotients $\nabla(\eta)$, alors $L(\nu)^\phi\otimes\nabla(\lambda)$ admettra une filtration avec des sous-quotients $\nabla(\eta)\otimes\nabla(\lambda)$, lesquels admettent une bonne filtration [7, section II.4.21].

On peut même supposer $M=L(\nu)$ pour un certain $\nu\in\Lambda_1$. Néanmoins, si $p\eta$ est un poids de $L(\nu)$, et si $\alpha_0^\vee$ est la plus haute coracine de G et ρ la demi-somme des racines positives, on a

$$\begin{aligned} p\langle\eta+\rho,\alpha_0^\vee\rangle &= \langle p\eta,\alpha_0^\vee\rangle+p(h-1)\leq\langle\nu,\alpha_0^\vee\rangle+p(h-1)\\ &\leq\langle(p-1)\rho,\alpha_0^\vee\rangle+p(h-1)=(2p-1)(h-1), \end{aligned}$$

et donc $\langle\eta+\rho,\alpha_0^\vee\rangle\leq(h-1)(2-1/p)<2(h-1)\leq p$.

Il découle alors du linkage principle fort que $L(\nu)^\phi$ est une somme directe de $\nabla(\eta)$ avec des $\eta\in\Lambda^+$. □

5.8. Supposant établie la conjecture de Lusztig concernant les caractères irréductibles de G, laquelle est un théorème pour p suffisamment grand, Parshall et Scott [16, théorème 5.1] montrent que pour $p\geq 2(h-1)$ tout $\nabla(\lambda)$ avec $\lambda\in\Lambda^+$, admet une bonne p-filtration. On déduit donc de la proposition 5.7.1 l'assertion suivante.

Corollaire 5.8.1. *Supposons établie la conjecture de Lusztig et $p\geq 2(h-1)$. Soit M un G-module M de dimension finie. Toute bonne filtration sur M en induit une sur M^ϕ.*

5.9. Concernant maintenant la question laissée ouverte à la fin de [5], notons $X=G/B$ la variété des drapeaux de G, $\mathcal{O}_X$ son faisceau structural et F l'homomorphisme de Frobenius absolu sur X. Le fait que $\mathcal{O}_X$ soit un facteur direct de $F_*\mathcal{O}_X$ est bien connu et est central dans l'étude de la géométrie de X. Nous déterminons, en toute généralité, un autre facteur direct de $F_*\mathcal{O}_X$.

Théorème 5.9.1. *Le faisceau inversible $\mathcal{L}_X(-\rho)$ associé au B-module $\Bbbk$ de dimension 1 défini par $-\rho$ est un facteur direct de $F_*\mathcal{O}_X$.*

Démonstration. Posons $\overline{X}=G/G_1B$ et $q\colon X\to\overline{X}$ l'homomorphisme canonique. On va montrer, de manière équivalente que le faisceau inversible $\mathcal{L}_{\overline{X}}(-p\rho)$ sur $\overline{X}$ associé au G_1B-module de dimension 1 défini par $-p\rho$ est un facteur direct de $q_*\mathcal{O}_X$. Plus précisément encore, soit $L((p-2)\rho)$ le G-module simple de plus haut poids $(p-2)\rho$. On va alors montrer que $L((p-2)\rho)\otimes\mathcal{L}_{\overline{X}}(-p\rho)$ est un facteur direct de $q_*\mathcal{O}_X$.

On a $q_*\mathcal{O}_X\simeq\mathcal{L}_{\overline{X}}(\widehat{\nabla}(\Bbbk))$ avec $\widehat{\nabla}(\Bbbk)$ le G_1B-module induit à partir du B-module trivial $\Bbbk$. Comme $\widehat{\nabla}(\Bbbk)$ a pour module de tête simple $L((p-2)\rho)\otimes p(-\rho)$ [7, sec-

tion II.9.6], posons $\pi\colon \widehat{\nabla}(\Bbbk)\to L((p-2)\rho)\otimes p(-\rho)$ l'homomorphisme de passage au quotient. Ainsi

$$\mathcal{L}_{\overline{X}}(\pi)\colon q_*\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{L}_{\overline{X}}(L((p-2)\rho)\otimes p(-\rho)) \simeq L((p-2)\rho)\otimes\mathcal{L}_{\overline{X}}(-p\rho) \tag{5.9.1}$$

est un épimorphisme. On va montrer, en suivant la stratégie de [8], qu'il est scindé.

Désignons par $\mathrm{ind}_{G_1B}^G$ le foncteur d'induction de G_1B à G de la catégorie des G_1B-modules vers celle des G-modules. On remarque tout d'abord qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_{\overline{X}}}(\mathcal{L}_{\overline{X}}(L((p-2)\rho)\otimes p(-\rho)), q_*\mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{ind}_{G_1B}^G(L((p-2)\rho)^*\otimes p\rho\otimes\widehat{\nabla}(\Bbbk)) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_{\overline{X}}}(\mathcal{L}_{\overline{X}}(L((p-2)\rho)\otimes p(-\rho)), \mathcal{L}_{\overline{X}}(\pi)) & & \mathrm{ind}_{G_1B}^G(L((p-2)\rho)^*\otimes p\rho\otimes\pi) \\
\Big\downarrow & & \\
\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_{\overline{X}}}(\mathcal{L}_{\overline{X}}(L((p-2)\rho)\otimes p(-\rho)), \mathcal{L}_{\overline{X}}(L((p-2)\rho)\otimes p(-\rho))) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{ind}_{G_1B}^G(L((p-2)\rho)^*\otimes p\rho\otimes L((p-2)\rho)\otimes p(-\rho)).
\end{array}$$

D'autre part, on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}_{G_1B}^G(L((p-2)\rho)^*\otimes p\rho\otimes\widehat{\nabla}(\Bbbk)) &\simeq L((p-2)\rho)^*\otimes\mathrm{ind}_{G_1B}^G(\widehat{\nabla}(p\rho)) \\
&\simeq L((p-2)\rho)^*\otimes\nabla(p\rho)
\end{aligned}$$

et

$$\mathrm{ind}_{G_1B}^G(L((p-2)\rho)^*\otimes p\rho\otimes L((p-2)\rho)\otimes p(-\rho)) \simeq L((p-2)\rho)^*\otimes L((p-2)\rho).$$

Posons maintenant $\pi'=p\rho\otimes\pi\colon \widehat{\nabla}(p\rho)\to L((p-2)\rho)$. Pour montrer que $\mathrm{ind}_{G_1B}^G(\pi')$ est surjectif, on remarque alors simplement qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\nabla(p\rho) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{ind}_{G_1B}^G(\widehat{\nabla}(p\rho)) & \xrightarrow{\mathrm{ind}_{G_1B}^G(\pi')} & \mathrm{ind}_{G_1B}^G(L((p-2)\rho)) \\
 & \searrow & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}}\ {\scriptstyle\sim} \\
 & & \widehat{\nabla}(p\rho) & \xrightarrow{\pi'} & L((p-2)\rho),
\end{array}$$

et que l'homomorphisme canonique $\nabla(p\rho)\to\widehat{\nabla}(p\rho)$ est surjectif (cf. la preuve de [1, lemme 8.2]). □

Bibliographie

1. Andersen, H. H. et Kaneda, M., Loewy series of modules for the first Frobenius kernel in a reductive algebraic group, *Proc. Lond. Math. Soc.* **59** (1989), 74–98.
2. Andersen, H. H., Polo, P. et Wen, K., Injective modules for quantum algebras, *Amer. J. Math.* **114** (1992), 571–604.

3. Bourbaki, N., *Éléments de mathématique*, Algèbre, Chapitres **1–3**, Hermann, Paris, 1970.
4. Gros, M., A Splitting of the Frobenius morphism on the whole algebra of distributions of SL_2, *Algebr. Represent. Theory* **15** (2012), 109–118.
5. Gros, M. et Kaneda, M., Contraction par Frobenius de G-modules, *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*) **61** (2011), 2507–2542.
6. Humphreys, J. E., *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Math. **9**, Springer, Berlin, 1972.
7. Jantzen, J. C., *Representations of Algebraic Groups*, 2nd ed., Mathematical Surveys and Monographs **107**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
8. Kaneda, M., On the Frobenius morphism of flag schemes, *Pacific J. Math.* **163** (1994), 315–336.
9. Kumar, S. et Littelmann, P., Algebraization of Frobenius splitting via quantum groups, *Ann. of Math.* **155** (2002), 491–551.
10. Littelmann, P., Contracting modules and standard monomial theory for symmetrizable Kac–Moody algebras, *J. Appl. Math. Stoch. Anal.* **11** (1998), 551–567.
11. Lusztig, G., Modular representations and quantum groups, dans *Classical Groups and Related Topics* (*Beijing, 1987*), Contemp. Math. **82**, pp. 59–77, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
12. Lusztig, G., Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), 257–296.
13. Lusztig, G., Quantum groups at roots of 1, *Geom. Dedicata* **35** (1990), 89–113.
14. Lusztig, G., *Introduction to Quantum Groups*, Progress in Math. **110**, Birkhäuser, Boston, MA, 1993.
15. McGerty, K., Generalized q-Schur algebras and quantum Frobenius, *Adv. Math.* **214** (2007), 116–131.
16. Parshall, B. et Scott, L., On p-filtrations of Weyl modules, Preprint, 2013. arXiv: 1208.3221v4.

Michel Gros
IRMAR
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
FR-35042 Rennes Cedex
France
michel.gros@univ-rennes1.fr

Masaharu Kaneda
Department of Mathematics
Osaka City University
3-3-138 Sugimoto
Sumiyoshi-ku
Osaka 558-8585
Japan
kaneda@sci.osaka-cu.ac.jp

Reçu le 19 août 2014
publié en ligne le 25 octobre 2014