ZUR THEORIE DER LEIBRENTEN.

VON

C. J. MALMSTEN.

Bezeichnungen.

) $W(x_k; i)$: die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, welche gegenwärtig das Alter x_k hat, am Ende des i^{ten} der von jetzt an gezählten Jahre noch lebt.

) $W(x_1, x_2, .. x_n; i)$: die Wahrscheinlichkeit, dass n Personen, welche gegenwärtig respective das Alter $x_1, x_2, ... x_n$ haben, am Ende des i^{ten} der von jetzt an gezählten Jahre *alle* noch leben.

Hier und überhaupt im Folgenden wird vorausgesetzt, dass für alle Personen eine und dieselbe Lebenstabelle gilt.

) ${}^vW(x_1, x_2, .. x_n; i)$: die Wahrscheinlichkeit, dass von n Personen, welche gegenwärtig respective das Alter $x_1, x_2, .. x_n$ haben, am Ende des i^{ten} der von jetzt an gezählten Jahre wenigstens v Personen noch leben.

) $P(x_1, x_2, x_3, .. x_n)$: der gegenwärtige Werth einer Lebensrente, die mit 1 Mark an jedem solchen Jahresschlusse ausbezahlt werden soll, an welchem n bestimmte Personen, die gegenwärtig respective das Alter $x_1, x_2, ... x_n$ haben, *alle* noch leben.

(5) ${}^{v}P(x_1, x_2, \ldots x_n)$: der gegenwärtige Werth einer Lebensrente, die mit 1 Mark an jedem solchen Jahresschlusse ausbezahlt werden soll, an welchem von n bestimmten Personen, die gegenwärtig respective das Alter $x_1, x_2, \ldots x_n$ haben, wenigstens v Personen noch leben.

---

§ 1.

In der Darstellung des Gegenstandes dieses Aufsatzes werden wir einen Lehrsatz benutzen, auf den wir, um nachher nicht die Reihenfolge in der Entwickelung zu unterbrechen, gleich zu Anfang die Aufmerksamkeit lenken wollen. Dieser Satz lautet so:

Es möge $W(i)$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnen, dass ein gewisser Zustand bis zum Schluss des i^{ten} Jahres stattfindet; ferner mögen

(6) $$w_1(i), \; w_2(i), \; w_3(i), \ldots \text{etc.}$$

die Wahrscheinlichkeiten bezeichnen, dass gewisse andere beziehungsweise Zustände bis zum Schluss desselben i^{ten} Jahres stattfinden; endlich mögen

$$P, \; P_1, \; P_2, \; P_3 \ldots \text{etc.}$$

die gegenwärtigen Werthe von den Jahresrenten bezeichnen, welche jede mit 1 Mark an jedem solchen Jahresschlusse ausbezahlt werden sollen, an welchem die resp. Zustände noch stattfinden, die den zu Eingang dieses Satzes und unter (6) genannten Wahrscheinlichkeiten entsprechen. Ist nun

(7) $$W(i) = a_1 w_1(i) + a_2 w_2(i) + a_3 w_3(i) + \ldots \text{etc.}$$

so ist auch

(8) $$P = a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 + \ldots \text{etc.}$$

Der Beweis folgt daraus, dass nach der Definition einer Jahresrente allgemein die Formel

$$P_k = \mathop{\mathrm{S}}_{i=1} \frac{w_k(i)}{r^i}, \qquad \left[r = 1 + \frac{\text{Procentzahl}}{100}\right]$$

gilt, mit deren Anwendung man die Gleichung (8) aus (7) unmittelbar erhält.

§ 2.

Für alle Lebensrenten- und Lebensversicherungs-Fragen, bei welchen das Leben nur eines Einzigen in Betracht kommt, ist es der Werth der *einfachen Lebensrente,* der vor Allem als bekannt vorausgesetzt wird; und die Lösung eines dahingehörenden Problems wird als gefunden betrachtet, wenn man einen Ausdruck hergestellt hat, der neben andern bekannten Grössen nur die einfache Lebensrente enthält.

Dieselbe Rolle, welche die einfache Lebensrente einnimmt, wenn es sich um ein einzelnes Leben handelt, behauptet nun die (unter 4 der Bezeichnungen definirte) Function $P(x_1, x_2, .. x_n)$ bei den auf verbundene oder combinirte Leben sich beziehenden Fragen.

Auch hier wird eine Lösung als gefunden betrachtet, sobald man einen Ausdruck aufgestellt hat, welcher allein Lebensrenten von der Art wie $P(x_1, x_2, .. x_n)$ enthält.

Das Problem, mit dessen Lösung wir uns hier in dieser kleinen Abhandlung beschäftigen werden, ist von einer so umfassenden Allgemeinheit, dass darin die Lösung einer grossen Menge von Fragen inclusive liegt, welche die Lebensrenten für combinirte Leben betreffen.

Dies Problem ist das folgende:

Den Werth von

$${}^vP(x_1, x_2, .. x_n)$$

zu bestimmen, nemlich (wie in Nr 5 der Bezeichnungen) den gegenwärtigen Werth von einer Lebensrente, welche mit 1 Mark an einem jeden solchen Jahresschlusse ausbezahlt werden soll, an welchem von n bestimmten Personen, die gegenwärtig respective das Alter $x_1, x_2, .. x_n$ *haben, wenigstens v Personen noch leben.*

§ 3.

Wir werden nun zuerst (Nr 3)

$$^{v}W(x_1,\ x_2,\,..\,x_n\ ;\ i)$$

zu bestimmen suchen, nemlich die Wahrscheinlichkeit, dass von n bestimmten Personen, welche gegenwärtig das Alter $x_1, x_2, .. x_n$ haben, am Schlusse des i^{ten} der von jetzt an gezählten Jahre, wenigstens v Personen noch leben.

Offenbar ist diese Wahrscheinlichkeit gleich

	der Wahrscheinlichkeit	dass	n	Personen	leben	und	0	todt	ist
+	d:o	»	$n-1$	»	»	»	1	»	»
+	d:o	»	$n-2$	»	»	»	2	»	sind
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
+	d:o	»	k	»	»	»	$n-k$	»	»
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
+	d:o	»	v	»	»	»	$n-v$	»	»

Mit Hülfe der Bezeichnungen (1) wird nun die Wahrscheinlichkeit, dass gerade diejenigen k Personen, welche gegenwärtig das Alter $x_1, x_2, .. x_k$ haben, noch den i^{ten} Jahresschluss erleben; dass aber dann die übrigen $n-k$ Personen gestorben sind, durch

$$W(x_1\,;\,i)\,.\,W(x_2\,;\,i)\,...\,W(x_k\,;\,i)\,.\,(1-W(x_{k+1};\,i))\,.\,(1-W(x_{k+2};\,i))\,...\,(1-W(x_n;i))$$

ausgedrückt, und folglich die Wahrscheinlichkeit, dass irgendwelche k Personen unter den n Personen, die gegenwärtig das Alter $x_1, x_2, .. x_n$ haben, noch den i^{ten} Jahresschluss erleben, während die übrigen $n-k$ Personen gestorben sind, durch

$$\sum W(x_1\,;\,i)\,.\,W(x_2\,;\,i)\,..\,W(x_k\,;\,i)\,.\,(1-W(x_{k+1};\,i))\,.\,(1-W(x_{k+2}\,;\,i))\,..\,(1-W(x_n\,;i))$$

worin mit $\sum$ die Summe aller derjenigen Ausdrücke bezeichnet ist, welche man erhält, wenn man in dem Producte unter dem Summationszeichen alle möglichen k-gliedrigen Combinationen ohne Wiederholung und ohne Versetzung der Grössen $x_1, x_2, .. x_n$ ausführt.

Wir finden demnach ohne Schwierigkeit für die gesuchte Wahrscheinlichkeit (3) folgenden Ausdruck:

(9)
$$ {}^{v}W(x_1, x_2, .. x_n; i) = $$
$$ = \mathop{\mathrm{S}}_{k=v}^{k=n} \sum W(x_1; i) . W(x_2; i) ... W(x_k; i) . (1 - W(x_{k+1}; i))(1 - W(x_{k+2}; i)) ... (1 - W(x_n; i)). $$

Nun ist klar, dass der Ausdruck auf der zweiten Seite dieser Gleichung symmetrisch in Bezug auf $x_1, x_2 .. x_n$ sein, und aus Gliedern von der Form

$$ z_s . \sum W(x_1; i) \, W(x_2; i) ... W(x_s; i) $$

bestehen muss, worin

$$ s = v, \quad v + 1, \quad v + 2, .. n, $$

z_s = einem noch zu bestimmenden Zahlenfactor wird, und

$$ \sum W(x_1; i) . W(x_2; i) ... W(x_s; i) $$

in Übereinstimmung mit dem zuvor Gesagten die Summe aller s-gliedrigen Producte, welche man aus

$$ W(x_1; i), \; W(x_2; i), .. W(x_s; i) .. W(x_n; i) $$

bilden kann.

Wir haben also gefunden

(10)
$$ {}^{v}W(x_1, x_2, .. x_n; i) = \mathop{\mathrm{S}}_{s=v}^{s=n} z_s \sum W(x_1; i) . W(x_2; i) ... W(x_s; i) $$

oder, wenn wir

$v + p$ statt s und $z_p(v)$ statt z_{v+p}

einführen:

(10a)
$$ {}^{v}W(x_1, x_2, .. x_n; i) = \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) \sum W(x_1; i) . W(x_2; i) ... W(x_{v+p}; i) $$

und mit Benutzung der Bezeichnung (2)

$$ W(x_1; i) . W(x_2; i) ... W(x_{v+p}; i) = W(x_1, x_2, .. x_{v+p}; i) $$

folglich auch:

$$ {}^{v}W(x_1, x_2, .. x_n; i) = \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) \sum W(x_1, x_2, .. x_{v+p}; i). $$

Hieraus ergibt sich mit Hülfe des in § 1 bewiesenen Satzes unmittelbar:

$$(11) \qquad {}^vP(x_1, x_2, .. x_n) = \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) . \sum P(x_1, x_2, .. x_{v+p})$$

worin

$$\sum P(x_1, x_2, .. x_{v+p})$$

die Summe derjenigen Ausdrücke bezeichnet, welche man erhält, wenn man in $P(x_1, x_2, .. x_{v+p})$ alle möglichen $(v+p)$-gliedrigen Combinationen ohne Wiederholung und ohne Versetzung der Grössen $x_1, x_2, .. x_n$ einführt.

§ 4.

Es erübrigt jetzt nur noch den Werth von $z_p(v)$ zu bestimmen, welches auf folgende Weise geschehen kann.

Wenn wir zur Abkürzung

$$(12) \qquad \sigma_{v+p} = \sum P(x_1, x_2, .. x_{v+p})$$

setzen, so erhalten wir

$$(13) \qquad {}^vP(x_1, x_2, .. x_n) = \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) . \sigma_{v+p}.$$

Wir wollen jetzt annehmen, dass die Grössen x nach der Reihenfolge des Eintritts des Todes der n Personen geordnet seien, so dass die Person vom Alter x_n die erste ist, welche stirbt,

» » x_{n-1} » nächstfolgende » » »

» » x_{n-2} » » » » »

. . . .

» » x_{v+p} die nach x_{v+p+1} folgende ist, welche stirbt,

. . . .

und endlich

die vom Alter x_{v+1} die letzte Person, die innerhalb der Zeit stirbt, während welcher die Leibrente ausbezahlt wird. Nach dem Tode der Person, welche gegenwärtig das Alter x_v hat, endigt die Leibrente.

Wir wollen ferner

die	Zeit,	während	welcher	x_n	noch	lebt,	die	0^{te}	Periode
»	»	»	»	x_{n-1}	aber nicht x_n	»	»	1^{te}	»
»	»	»	»	x_{n-2}	aber nicht x_{n-1}	»	»	2^{te}	»
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
»	»	»	»	x_{n-s}	aber nicht x_{n-s+1}	»	»	s^{te}	»
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
»	»	»	»	x_{v+p}	aber nicht x_{v+p+1}	»	»	$(n-v-p)^{te}$	»
.	.	.		.	.	.	.	.	.
»	»	»	»	x_v	aber nicht x_{v+1}	»	»	$(n-v)^{te}$	»

nennen, und mit

$$e_0\,,\ e_1\,,\ e_2\,,\ \ldots\ldots\ e_s \tag{14}$$

die gegenwärtigen Werthe von je 1 Mark, welche an den, in die resp.

$$0^{te},\ 1^{te},\ 2^{te},\ \ldots\ldots\ s^{te}$$

Periode fallenden, Jahres-Schlüssen ausbezahlt werden soll. Da nun (Bezeichn. 5)

$${}^vP\,(x_1\,,\,x_2\,,\,\ldots\,x_n)$$

nichts anderes ist als der gegenwärtige Werth von je 1 Mark, die an einem jeden solchen Jahres-Schlusse ausbezahlt werden soll, an welchem wenigsten v von den n Personen, die gegenwärtig resp. das Alter $x_1, x_2, \ldots x_n$ haben, noch leben, so kann man dafür auch sagen: an einem jeden Jahres-Schlusse, der in die

$$0^{te},\ 1^{te},\ 2^{te} \text{ bis einschliesslich in die } (n-v)^{te}$$

Periode fällt, und findet dadurch unmittelbar

$${}^vP\,(x_1\,,\,x_2\,\ldots\,x_n) = \mathop{\mathrm{S}}_{s=0}^{s=n-v} e_s. \tag{15}$$

Wir können aber für dieselbe Grösse (5) auch einen anderen Ausdruck aufstellen, dessen Vergleichung mit (15) uns ohne Schwierigkeit die Unbekannte $z_p\,(v)$ in (11) bestimmen lässt.

Da $P\,(x_1, x_2, \ldots x_{v+p})$ den gegenwärtigen Werth von je 1 Mark bedeutet, welche an einem jeden solchen Jahres-Schlusse ausbezahlt werden soll, an welchem die $v + p$ Personen, die jetzt das Alter $x_1, x_2, \ldots x_{v+p}$ haben, *alle* noch leben, so können wir die Summe der Ausdrücke, die man aus

$$P(x_1, x_2, \ldots x_{v+p})$$

erhält, indem man die $v + p$ Grössen durch alle $(v + p)$-gliedrige Combinationen ohne Wiederholung und ohne Verstellung der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ ersetzt, auch in folgender Form darstellen:

$\sum P(x_1, x_2, \ldots x_n) =$ dem gegenwärtigen Werthe von der Anzahl von je $a_p(0)$ Mark, welche an jedem in die 0^{te} Periode fallenden Jahres-Schlusse, das heisst so lange x_n noch lebt, ausbezahlt werden soll;

$+$ » » » » $a_p(1)$ Mark, welche an jedem in die 1^{ste} Periode fallenden Jahres-Schlusse, das heisst so lange x_{n-1} aber nicht x_n lebt, ausbezahlt werden soll;

$+$ » » » » $a_p(2)$ » welche an jedem in die 2^{te} Periode fallenden Jahres-Schlusse, das heisst so lange x_{n-2} aber nicht x_{n-1} lebt, ausbezahlt werden soll;

$+$ . . . .

$+$ » » » » $a_p(s)$ » welche an jedem in die s^{te} Periode fallenden Jahres-Schlusse, das heisst so lange x_{n-s} aber nicht x_{n-s+1} lebt, ausbezahlt werden soll;

$+$ . . . .

$+$ » » » » $a_p(n-v-p)$ » welche an jedem in die $(n-v-p)^{te}$ Periode fallenden Jahres-Schlusse, das heisst so lange x_{v+p} aber nicht x_{v+p+1} lebt, ausbezahlt werden soll.

Diese Gleichung erhält, unter Benutzung der soeben ihrer Bedeutung nach festgesetzten e_s, die Gestalt

$$(16) \qquad \sum P(x_1, x_2, \ldots x_{v+p}) = \sigma_{v+p} = \mathop{\mathrm{S}}_{s=0}^{s=n-v-p} e_s \,.\, a_p(s).$$

Was nun $a_p(s)$ betrifft, oder die Anzahl von Mark, welche an jedem in die s^{te} Periode fallenden Jahres-Schlusse (das heisst so lange x_{n-s} aber nicht x_{n-s+1} lebt) ausbezahlt werden soll, so ist ohne Schwierigkeit zu ersehen, dass diese Anzahl $=$ ist der Anzahl der $(v+p)$-gliedrigen Combinationen ohne Wiederholung und ohne Vertauschung der in dieser Periode noch lebenden $n-s$ Personen vom Alter $x_1, x_2 \ldots x_{n-s}$; also wird

$$(17) \qquad a_p(s) = (n-s)_{v+p} = \frac{(n-s)(n-s-1)\ldots\ldots(n+1-s-v-p)}{1.2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(v+p)},$$

welches in (16) eingeführt

$$\sigma_{v+p} = \mathop{\mathrm{S}}_{s=0}^{s=n-v-p} e_s \,.\, (n-s)_{v+p}$$

ergibt, oder auch, was dasselbe ist,

$$(18) \qquad \sigma_{v+p} = \mathop{\mathrm{S}}_{s=0}^{s=n-v} e_s \,.\, (n-s)_{v+p},$$

weil $(n-s)_{v+p} = 0$ wird für $s > n-v-p$.

Setzt man diesen Werth von σ_{v+p} in (13) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} {}^vP(x_1, x_2, \ldots x_n) &= \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) \,.\, \mathop{\mathrm{S}}_{s=0}^{s=n-v} e_s \,.\, (n-s)_{v+p} \\ &= \mathop{\mathrm{S}}_{s=0}^{s=n-v} e_s \,.\, \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) \,.\, (n-s)_{v+p}; \end{aligned}$$

diese, mit (15) verglichen, ergibt

$$\mathop{\mathrm{S}}_{s=0}^{s=n-v} e_s = \mathop{\mathrm{S}}_{s=0}^{s=n-v} e_s \,.\, \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) \,.\, (n-s)_{v+p},$$

und folglich

$$1 = \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) \,.\, (n-s)_{v+p},$$

oder, weil

$$(n-s)_{v+p} = 0 \text{ für } p > n-v-s \text{ wird,}$$

$$1 = \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v-s} z_p(v) \,.\, (n-s)_{v+p},$$

welche Formel auch so

$$(19) \qquad 1 = \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v-s} z_p(v) \,.\, (n-s)_{n-v-s-p}$$

geschrieben werden kann, und für alle die Werthe

$$s = 0,\ 1,\ 2, \ldots . n-v$$

gilt. Setzt man hierin

$$n-v-s \text{ statt } s,$$

so erhält man

$$(20) \qquad 1 = \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=s} z_p(v) \,.\, (s+v)_{s-p},$$

das heisst

$$(21) \quad 1 = (s+v)_s \,.\, z_0(v) + (s+v)_{s-1} \,.\, z_1(v) + \ldots . + (s+v)_1 \,.\, z_{s-1}(v) + (s+v)_0 \,.\, z_s(v)$$

für alle Werthe $s = 0,\ 1,\ 2, \ldots . n-v$.

Mit Rücksicht darauf, dass für $s = 0$

$$(22) \qquad 1 = z_0(v)$$

wird, hat man also zur Bestimmung des $z_p(v)$ folgendes System von Gleichungen:

$$1 = (v+1)_1 + (v+1)_0 . z_1(v)$$
$$1 = (v+2)_2 + (v+2)_1 . z_1(v) + (v+2)_0 . z_2(v)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$1 = (v+k)_k + (v+k)_{k-1} . z_1(v) + (v+k)_{k-2} . z_2(v) + \ldots + (v+k)_0 . z_k(v)$$
$$\cdot \quad \cdot$$

$$(23) \quad 1 = (n-1)_{n-v-1} + (n-1)_{n-v-2} . z_1(v) + (n-1)_{n-v-3} . z_2(v) + \ldots$$
$$\ldots + (n-1)_{n-v-k-1} . z_k(v) + \ldots + (n-1)_0 . z_{n-v-1}(v)$$

$$(24) \quad 1 = (n)_{n-v} + (n)_{n-v-1} . z_1(v) + (n)_{n-v-2} . z_2(v) + \ldots + (n)_{n-v-k} . z_k(v) + \ldots$$
$$\ldots + (n)_1 . z_{n-v-1}(v) + (n)_0 . z_{n-v}(v).$$

Unter Benutzung der allgemein bekannten, für die Binomial-Coëfficienten geltenden Gleichung

$$(m+1)_r - m_r = m_{r-1}, \tag{25}$$

erhält man, durch Subtraction der Formel (23) von (24),

$$0 = (n-1)_{n-v} + (n-1)_{n-v-1} \cdot z_1(v) + \ldots + (n-1)_1 \cdot z_{n-v-1}(v) + (n-1)_0 \cdot z_{n-v}(v). \tag{26}$$

Lassen wir in dieser Gleichung v in $v+1$ übergehen, ziehen dann die Gleichung (23) ab, und wenden die gebräuchliche Bezeichnung

$$z_k(v+1) - z_k(v) = \Delta z_k(v)$$

an, so finden wir

$$\begin{aligned} -1 = (n-1)_{n-v-2} \cdot \Delta z_1(v) + \ldots + (n-1)_{n-v-k} \cdot \Delta z_{k-1}(v) + \ldots \\ \ldots + (n-1)_1 \cdot \Delta z_{n-v-1}(v) + (n-1)_0 \cdot \Delta z_{n-v}(v). \end{aligned} \tag{27}$$

Dadurch, dass man in (23) statt v nun $v+1$ setzt und das Resultat zu (27) addirt, erhält man (weil $z_0(v) = 1$)

$$\begin{aligned} 0 = (n-1)_{n-v-2}[z_0(v+1) + \Delta z_1(v)] + (n-1)_{n-v-3}[z_1(v+1) + \Delta z_2(v)] + \ldots \\ \ldots + (n-1)_{n-v-k-1}[z_{k-1}(v+1) + \Delta z_k(v)] + \text{ etc.} \end{aligned}$$

Man hat folglich allgemein

$$z_{k-1}(v+1) + \Delta z_k(v) = 0$$

oder, was dasselbe ist:

$$z_k(v) = -\sum z_{k-1}(v+1). \tag{28}$$

Wenn man $v = 0$ in (21) setzt und (22) berücksichtigt, so erhält man

$$0 = s_{s-1} \cdot z_1(0) + s_{s-2} \cdot z_2(0) + \ldots + s_1 \cdot z_{s-1}(0) + z_s(0);$$

und weil diese Formel für

$$s = 1, 2, 3, \text{ etc.}$$

gelten soll, so findet man allgemein

$$z_k(0) = 0,$$

und in Folge hiervon muss man in (28) das Integral $\sum z_{k-1}(v+1)$ so nehmen, dass es für $v = 0$ verschwindet.

Mit Hülfe der bekannten Formel für die Binomial-Coëfficienten

$$\sum (v + k)_{s-1} = (v + k)_s$$

erhält man nach und nach aus (28)

$$z_1(v) = -\sum(1) = (-1)^1 \cdot (v)_1$$

$$z_2(v) = (-1)^2 \cdot \sum(v+1)_1 = (-1)^2 \cdot (v+1)_2$$

$$z_3(v) = (-1)^3 \cdot \sum(v+2)_2 = (-1)^3 \cdot (v+2)_3$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$z_p(v) = (-1)^p \cdot \sum(v+p-1)_{p-1} = (-1)^p \cdot (v+p-1)_p. \tag{29}$$

Diese Bestimmung für $z_p(v)$ in (11) eingesetzt ergibt für den gesuchten Lebensrenten-Werth folgenden Ausdruck:

$$^vP(x_1, x_2, \ldots x_n) = \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} (-1)^p \cdot (v+p-1)^p \cdot \sum P(x_1, x_2, \ldots x_{v+p}), \tag{30}$$

worin mit

$$\sum P(x_1, x_2, \ldots x_{v+p})$$

die Summe von denjenigen Functionen bezeichnet ist, die man aus $P(x_1, x_2, \ldots x_{v+p})$ erhält, wenn man darin alle möglichen $(v+p)$-gliedrigen Combinationen ohne Wiederholung und ohne Verstellung der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ einsetzt.

Ex. 1. Für $n = 2$, $v = 1$ finden wir unmittelbar

$$^1P(x_1, x_2) = P(x_1) + P(x_2) - P(x_1, x_2).$$

Ex. 2. Für $n = 3$, $v = 1$ ist

$$^1P(x_1,x_2,x_3) = P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) - [P(x_1,x_2) + P(x_1,x_3) + P(x_2,x_3)] + P(x_1,x_2,x_3)$$

Ex. 3. Für $n = 3$, $v = 2$ finden wir

$$^2P(x_1, x_2, x_3) = P(x_1, x_2) + P(x_1, x_3) + P(x_2, x_3) - 2 \cdot P(x_1\, x_2\, x_3).$$

Nachschrift.

Herr Prof. *Ernst Schering* in Göttingen hat mir gelegentlich eine andere Form der Bestimmung der Grössen $z_p(v)$ in der Gleichung (11) mitgetheilt. Es handelt sich um die Lösung der Aufgabe:

In der Gleichung (10 a), mit (9) verglichen, nemlich

$$(31)\qquad {}^{v}W(x_1, x_2, \ldots x_n; i) = \mathop{\mathrm{S}}_{k=v}^{k=n} \sum W(x_1; i).W(x_2; i)\ldots$$
$$\ldots W(x_k; i).(1 - W(x_{k+1}; i)).(1 - W(x_{k+2}; i))\ldots(1 - W(x_n; i))$$
$$= \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} z_p(v).\sum W(x_1; i).W(x_2; i)\ldots\ldots W(x_{v+p}; i)$$

die Coëfficienten $z_p(v)$ zu bestimmen.

Zu dem Zwecke benutzen wir die folgende, nach Potenzen von θ geordnete Reihenentwickelung

$$(32)\qquad \mathop{\mathrm{S}}_{k=v}^{k=n} \sum_{\xi'} t\,W(\xi_1'; i).t\,W(\xi_2'; i)\ldots t\,W(\xi_k'; i).(1 + \theta W(\xi_{k+1}'; i)).(1 + \theta W(\xi_{k+2}'; i))\ldots$$
$$\ldots(1 + \theta W(\xi_n'; i))$$
$$= \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} . \mathop{\mathrm{S}}_{\varphi=0}^{\varphi=p} C(v+p, \varphi).t^{v+p-\varphi}.\theta^{\varphi}.\sum_{\xi} W(\xi_1; i).W(\xi_2; i)\ldots W(\xi_{v+p}; i)$$
$$= \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} . Z(v, p, t, \theta).\sum_{\xi} W(\xi_1; i).W(\xi_2; i)\ldots W(\xi_{v+p}; i).$$

Hier ist zu bemerken:

1:o $\qquad \xi_1' \ldots\ldots \xi_k',\ \xi_{k+1}' \ldots\ldots \xi_n'$

sollen mit den Werthen $\quad x_1 \ldots\ldots x_k,\ x_{k+1} \ldots\ldots x_n,$

abgesehen von der Reihenfolge, aber ohne Wiederholung zuzulassen, übereinstimmen.

2:o $\sum_{\xi'}$ soll die Summation über alle solche Werthensysteme bedeuten, bei denen aber Platzveränderung weder der $\xi_1', \xi_2' \ldots\ldots \xi_k'$ unter sich, noch der $\xi_{k+1}', \xi_{k+2}' \ldots\ldots \xi_n'$ unter sich zulässig ist.

3:o $\xi_1, \xi_2 \ldots\ldots \xi_{v+p}$ sollen irgend welche $v + p$ der Grössen $x_1, x_2 \ldots x_n$ bedeuten, aber ohne eine Wiederholung unter diesen zuzulassen.

4:o $\sum$ soll die Summation über alle solche Werthensysteme bedeuten, aber ohne eine Platzveränderung der Grössen ξ zuzulassen, also die Summation über alle $(v + p)$-gliedrigen Combinationen der $x_1, x_2 \ldots x_n$ ohne Wiederholung und ohne Versetzung.

5:o $C(v + p, \varphi)$ sind zu bestimmende ganze Zahlen-Coëfficienten, abhängig von $v + p$ und φ.

Es ist

$$Z(v, p, t, \theta) = \mathop{\mathrm{S}}_{\varphi=0}^{\varphi=p} C(v + p, \varphi) \,.\, t^{v+p-\varphi}\, \theta^{\varphi}$$

gesetzt, und es ist offenbar

$$z_p(v) = Z(v, p, t, \theta) \text{ für } t = +1,\ \theta = -1. \tag{33}$$

Nun bedeutet $C(v + p, \varphi)$ augenscheinlich die Anzahl der mit dem Factor $t^{v+p-\varphi}\, \theta^{\varphi}$ versehenen Glieder, welche entstehen, wenn man in dem ersten Theil der Doppelgleichung (32) durch Multiplication die Klammer-Ausdrücke $(1 + \theta\, W(\xi'_\lambda\,; i))$ auflöst; also ist

$C(v + p, \varphi) =$ der Anzahl der φ-gliedrigen Combinationen, ohne Wiederholung und ohne Versetzung, von $v + p$ Elementen, das heisst

$$C(v + p, \varphi) = \frac{(v + p)(v + p - 1) \ldots . (v + p + 1 - \varphi)}{1.2 \ldots\ldots\ldots\ldots . \varphi} = (v + p)_{\varphi},$$

daher

$$Z(v, p, t, \theta) = \mathop{\mathrm{S}}_{\varphi=0}^{\varphi=p} (v + p)_{\varphi} \,.\, t^{v+p-\varphi} \,.\, \theta^{\varphi},$$

und demnach

$$Z(v, p, t = 1, \theta = -1) = \mathop{\mathrm{S}}_{\varphi=0}^{\varphi=p} (-1)^{\varphi} \,.\, (v + p)_{\varphi}$$

das heisst, zufolge (33),

$$z_p(v) = \mathop{\mathrm{S}}_{\varphi=0}^{\varphi=p} (-1)^{\varphi} \,.\, (v + p)_{\varphi} = (-1)^p \,.\, (v + p - 1)_p,$$

ebenso wie in Formel (29).