DAS PROBLEM DER CONFIGURATIONEN

VON

TH. REYE

IN STRASSBURG i/E.

1. Seit einer Reihe von Jahren pflege ich in meinen geometrischen Vorlesungen auf eigenthümliche Gruppen von Punkten, Geraden und Ebenen aufmerksam zu machen, welche durch die Regelmässigkeit ihrer Anordnung sich auszeichnen. Diese Gruppirungen, welche ich »Configurationen» genannt habe,[1] treten bei geometrischen Untersuchungen nicht selten auf. So liegen die 12 Aehnlichkeitspunkte von vier Kugeln zu dreien in 16 Geraden und zu sechsen in 12 Ebenen, und diese 12 Ebenen gehen zu dreien durch die 16 Geraden und zu sechsen durch die 12 Punkte. Die 16 Knotenpunkte und 16 singulären Ebenen einer Kummer'schen Fläche vierter Ordnung und vierter Classe haben solche gegenseitige Lage, dass durch jeden der 16 Punkte sechs von den 16 Ebenen gehen und auf jeder der letzteren sechs von den 16 Punkten (und zwar auf einem Kegelschnitt) liegen. Wenn zwei Tetraëder einander gegenseitig eingeschrieben sind, so enthält jede ihrer 8 Flächen vier ihrer 8 Eckpunkte und durch jeden der letzteren gehen vier der 8 Flächen. Auch die 15 Potenzebenen, 20 Potenzaxen und 15 Potenzpunkte, welche sechs Kugeln zu zweien, dreien und vieren bestimmen, bilden eine räumliche Configuration,

(1) Zuerst 1876 in meiner »Geometrie der Lage» I, 2 Aufl., S. 4 (vgl. ebenda S. 162 N:o 13), dann in Crelle-Borchardt's Journal 86 S. 209 und in meiner »Synthet. Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme» (1879), S. 54.

und zwar ist jede der 20 Potenzaxen mit 3 Potenzpunkten und 3 Potenzebenen incident, jeder der 15 Potenzpunkte mit 4 Potenzaxen und 6 Potenzebenen, u. s. w.

2. Eine Configuration n_i in der Ebene besteht aus n Punkten und n Geraden in solcher Lage, dass jede der n Geraden i von den n Punkten enthält und durch jeden der n Punkte i von den n Geraden gehen. Durch jede collineare oder reciproke Transformation verwandelt n_i sich wiederum in eine Cf. n_i; von letzterer können vier Punkte oder Gerade willkürlich in der Ebene angenommen werden, wenn $n > 3$ ist. Collineare Configurationen sehen wir als nicht wesentlich verschieden an. — Jedes einfache n-eck oder n-seit bildet eine Cf. n_2, ebenso jede Gruppe von ebenen Polygonen, welche zusammen n Eckpunkte haben. Ein sich selbst eingeschriebenes n-eck bildet eine Cf. n_3, zwei sich wechselseitig eingeschriebene n-ecke bilden eine $2n_3$. Reelle Configurationen 8_3 existiren nicht; dagegen hat Herr S. Kantor([1]) drei verschiedenartige Configurationen 9_3 und zehn verschiedene 10_3 nachgewiesen. Die bekanntesten derselben sind der ebene Schnitt 10_3 eines vollständigen räumlichen Fünfecks([2]) und die Cf. 9_3, welcher die Eckpunkte eines zwei Geraden eingeschriebenen Sechsecks und die Schnittpunkte seiner drei Paar Gegenseiten angehören.

3. Eine räumliche Configuration n_i besteht aus n Punkten und n Ebenen in solcher Lage, dass auf jeder der n Ebenen i von den n Punkten enthalten sind und durch jeden der n Punkte i von den n Ebenen gehen; wir bezeichnen diese Cf. genauer mit (n_i, g_k), wenn zu ihr noch g Gerade gehören, die mit je k der n Punkte und je k der n Ebenen incident sind. Die Kummer'sche Cf. (1.) ist demnach mit 16_6 oder aber mit $(16_6, 120_2)$ zu bezeichnen, die Aehnlichkeitspunkte von vier Kugeln gehören zu einer Cf. $(12_6, 16_3)$ und die Potenzebenen, Potenzpunkte und Potenzaxen von sechs Kugeln bilden eine Cf. $(15_6, 20_3)$. Beliebige n Strahlen einer Regelschaar bestimmen mit n ihrer Leitstrahlen die n^2 Punkte und n^2 Ebenen einer Cf. $(n^2_{2n-1}, 2n_n)$, z. B. einer $(9_5, 6_3)$, wenn $n = 3$ ist; ebenso bestimmt eine Schläfli'sche Doppelsechs eine sie enthaltende Cf. $(30_9, 12_5)$. Die zwölf Eckpunkte eines regulären Ikosaëders bilden mit den zwölf Diagonalebenen, in welchen je fünf Kanten liegen, eine Cf. $(12_5, 60_2)$; dieselbe

(1) Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Jahrg. 1881, Nov. und Decbr.

(2) Vgl. darüber meine »Geometrie der Lage« II, 2 Aufl., S. 69.

lässt sich ebenso einfach aus dem regulären Dodekaëder ableiten und wird durch eines der regulären Polyëder von Poinsot dargestellt.

4. Die Configuration $(n_i,\ g_k)$ verwandelt sich durch jede collineare oder reciproke Transformation wiederum in eine Cf. (n_i, g_k); von letzterer können, wenn $n > 4$ ist, fünf Punkte oder fünf Ebenen beliebig angenommen werden. Sind zwei reciproke Configurationen $(n_i,\ g_k)$ in einem Nullsysteme einander zugeordnet, so bilden sie zusammen eine Cf. $(2n_{i+1},\ 2g_k)$, indem jede Ebene derselben auch durch ihren Nullpunkt geht und jeder ihrer Punkte in seiner Nullebene liegt. Auf diese Art erhält man aus dem Tetraëder eine Cf. 8_4, aus dieser wiederum eine 16_5, u. s. w. Aus gewissen räumlichen Configurationen kann man durch die Methode des Projicirens und Schneidens complicirtere ebene Cff. ableiten. Projicirt man z. B. die Punkte und Geraden einer Cf. $(12_6,\ 16_3)$ aus einem beliebigen Punkte auf eine Ebene ε, mit welcher man zugleich die Geraden und Ebenen der Cf. zum Durchschnitt bringt, so erhält man in ε eine ebene Cf. 28_4; ebenso ergiebt sich aus der Potenz-Cf. $(15_6,\ 20_3)$ von sechs Kugeln eine ebene Cf. 35_4, und aus dem Tetraëder die oben (3.) erwähnte Cf. 10_3.

5. Das Problem der Configurationen nun verlangt, dass alle verschiedenartigen, zu den Zahlen n und i gehörigen Configurationen n_i ermittelt und dass ihre wichtigsten Eigenschaften aufgesucht werden. Der erste Theil dieser Aufgabe ist bislang nur für die ebenen Configurationen 9_3 und 10_3, und zwar von Herrn S. Kantor a. a. O. gelöst worden. Von der Kummer'schen Cf. 16_6 hat Herr F. Klein eine Reihe sehr merkwürdiger Eigenschaften aufgedeckt;(1) ihre Beziehungen zu Thetafunctionen mit zwei Variabeln sind durch die Herren Cayley, Borchardt und H. Weber bekannt.(2) Von der Cf. $(12_6,\ 16_3)$, deren Untersuchung von den Herren Giuseppe Veronese und Cyparissos Stephanos nach verschiedenen Richtungen erfolgreich begonnen wurde,(3) enthält der folgende Aufsatz wesentliche Eigenschaften. Offenbar aber bleibt auf diesem Gebiete noch

(1) F. Klein in den Mathem. Annalen II, S. 199—226.

(2) Cayley in Crelle-Borchardt's Journal 83 S. 210 und 84 S. 238; Borchardt ebenda 83 S. 234; H. Weber ebenda 84 S. 332. — Vgl. Krazer, Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen, Lpz. 1882.

(3) Stephanos im Bulletin des sciences math. et astron., 2e série T. III, 1879; Veronese in den Memorie della R. Accad. dei Lincei, 1880—81.

viel zu thun übrig. So ist die Frage nach den algebraischen Gleichungen, mit welchen die Configurationen zusammenhängen, unseres Wissens noch von Niemand in Angriff genommen worden. Hervorzuheben ist auch die Frage, durch wie viele ihrer Elemente (Punkte, Gerade und Ebenen) eine beliebige Configuration bestimmt ist und wie sie sich bewegt, wenn eines der sie bestimmenden Elemente seine Lage stetig ändert. Dass die Kummer'sche Cf. 16_6 durch sechs ihrer Punkte bestimmt ist und ihre Theorie mit derjenigen des räumlichen Sechsecks sehr innig zusammenhängt, ist bekannt.(1)

Strassburg i/E den 16 Sept. 1882.

(1) Vgl. meine »Geometrie der Lage» II, 2 Aufl. S. 250—259 und Crelle-Borchardt's Journal 86 S. 84 und 209.