DIE HEXAËDER- UND DIE OCTAËDER-CONFIGURATIONEN $(12_6, 16_3)$

VON

TH. REYE

IN STRASSBURG i/E.

1. Die Configuration $(12_6, 16_3)$, welche zuerst bei den Aehnlichkeitspunkten von vier Kugeln bemerkt wurde, (1) steht in engen Beziehungen zum Fünfflach und zum räumlichen Fünfeck. Einerseits nämlich bilden die sechs Punkte, in welchen die Kanten eines Tetraëders Δ von einer Ebene ε geschnitten werden, mit denjenigen sechs Punkten, welche von ihnen durch je zwei Eckpunkte harmonisch getrennt sind, die 12 Punkte einer Cf. $(12_6, 16_3)$; die 12 Ebenen derselben bestehen aus den vier Tetraëderflächen, der Ebene ε und den sieben Ebenen ε', welche von ε durch je zwei Gegenelemente des Tetraëders harmonisch getrennt sind. Anderseits bilden die sechs Ebenen, durch welche die Kanten eines Tetraëders Δ_1 aus einem Punkte P projicirt werden, mit denjenigen sechs Ebenen, welche von ihnen durch je zwei Tetraëderflächen harmonisch getrennt sind, die 12 Ebenen einer Cf. $(12_6, 16_3)$, und zwar bestehen deren 12 Punkte aus den vier Eckpunkten von Δ_1, dem Punkte P und den sieben Punkten P', welche von P durch je zwei Gegenelemente des Tetraëders harmonisch getrennt sind. Wenn P sich bewegt, so beschreiben die acht Punkte P' und P acht collineare, involutorisch liegende Räume. Zwei so construirte Configurationen $(12_6, 16_3)$ können collinear oder reciprok auf einander bezogen werden, indem man die sie bestimmenden

(1) Vgl. Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures, 1822, p. 409.

Tetraëder und Punkte oder Ebenen als homologe Elemente einander zuweist; denn harmonische Gebilde gehen durch collineare oder reciproke Transformationen allemal wieder in harmonische Gebilde über. Wir wollen zunächst zeigen, dass jede Cf. $(12_6, 16_3)$ auf beide Arten construirt werden kann und dass folglich aus einer solchen Cf. alle übrigen durch collineare sowohl als auch durch reciproke Transformationen ableitbar sind.

2. Die drei Ebenen einer Cf. $(12_6, 16_3)$, welche durch eine ihrer 16 Geraden g gehen, enthalten zusammen alle 12 Cf.-Punkte, nämlich ausser den drei auf g liegenden noch je drei ausserhalb g befindliche. Zu der Cf. gehört folglich jede Ebene, welche eine Gerade und einen Punkt oder auch zwei Gerade der Cf. verbindet, ebenso aber jeder Punkt, in welchem eine Gerade und eine Ebene oder zwei Gerade der Cf. sich schneiden. Eine Ebene enthält deshalb höchstens vier Cf.-Gerade; dieselben müssen sich in ihren 6 Cf.-Punkten schneiden, und keine drei von ihnen gehen durch einen Punkt, weil sonst die Ebene mehr als sechs Cf.-Punkte enthalten würde. Jede Cf.-Ebene wird von mindestens zwölf Cf.-Geraden geschnitten, und zwar in jedem ihrer sechs Punkte von höchstens zwei, weil sonst durch den Punkt mehr als sechs Cf.-Ebenen gehen würden. Also liegen ausserhalb jeder Cf.-Ebene genau zwölf Cf.-Gerade und in ihr vier Gerade und sechs Punkte der Cf.; letztere bilden zusammen ein vollständiges Vierseit, in dessen Eckpunkten die Ebene von je zwei der übrigen 12 Geraden geschnitten wird. Ebenso gehen durch jeden Punkt der Cf. vier Gerade und sechs Ebenen derselben, und zwar bilden dieselben ein vollständiges Vierkant, dessen Ebenen je zwei der übrigen 12 Cf.-Geraden projiciren.

3. Zwei beliebige Ebenen der Cf. $(12_6, 16_3)$ schneiden sich entweder in einer Cf.-Geraden oder in einer »Diagonale« der Cf., welche zwei und nur zwei Punkte derselben verbindet; denn jede Cf.-Gerade der einen Ebene hat mit der andern einen Cf.-Punkt gemein (2.). Jede Cf.-Ebene schneidet folglich acht der 11 übrigen paarweise in ihren vier Cf.-Geraden und die drei letzten Cf.-Ebenen in den drei Diagonalen ihres Cf.-Vierseits; sie bildet mit diesen letzteren drei Cf.-Ebenen ein Tetraëder Δ, dessen Kanten aus sechs Diagonalen der Cf. bestehen. Da die drei Diagonalen eines Vierseits sich gegenseitig harmonisch theilen, so sind die 12 Punkte der Cf. paarweise harmonisch getrennt durch die Eckpunkte des Tetraëders Δ; sie können folglich auf die oben (1.) zuerst angegebene Art construirt

werden mittelst des Tetraëders Δ und irgend einer der übrigen acht Cf.-Ebenen ε. Die 12 Ebenen der Cf. (12_6, 16_3) bilden drei verschiedene Tetraëder Δ, deren 18 Kanten durch je zwei der 12 Cf.-Punkte harmonisch getheilt werden. Jede Fläche eines beliebigen dieser Tetraëder schneidet die Flächen und Kanten der beiden anderen paarweise in vier Geraden und sechs Punkten der Cf., und jede Kante desselben schneidet zwei paar Gegenkanten der andern in zwei Cf.-Punkten. Die drei Tetraëder Δ bilden demnach ein »desmisches System», (1) und je zwei von ihnen liegen auf vierfache Art perspectiv bezüglich der vier Ebenen des dritten. Durch die 16 Cf.-Geraden geht ein Büschel von Flächen vierter Ordnung, welche die 12 Cf.-Punkte zu Doppelpunkten haben; drei dieser Flächen zerfallen in die Ebenen der drei Tetraëder Δ.

4. Auf analoge Weise bilden die 12 Punkte der Cf. (12_6, 16_3) drei Tetraëder Δ_1, durch deren Flächen die Ebenen der Cf. paarweise harmonisch getrennt sind. Aus jedem derselben und einem der übrigen acht Cf.-Punkte P kann die Cf. auf die zweite der angegebenen Arten (1.) construirt werden; jedes dieser drei Δ_1 ist folglich Poltetraëder von doppelt unendlich vielen Flächen zweiter Ordnung, welche den beiden andern umschrieben werden können. Aus jedem Eckpunkte eines beliebigen dieser drei Δ_1 werden die Eckpunkte und Kanten der beiden übrigen paarweise durch vier Gerade und sechs Ebenen der Cf. projicirt; je zwei der drei Tetraëder Δ_1 liegen demnach perspectiv bezüglich der Eckpunkte des dritten. Die drei Δ_1 haben wie die drei Δ die 18 Diagonalen der Cf. zu Kanten und bilden gleichfalls ein desmisches System; jedes Δ_1 hat mit jedem Δ zwei Gegenkanten gemein. Die 24 Eckpunkte, 24 Ebenen und 18 Kanten der sechs Tetraëder Δ und Δ_1 bilden die von Herrn Vietor (2) untersuchte »harmonische» Cf.. (24_9, 18_4), deren 18 Geraden mit je vier harmonischen Punkten und je vier harmonischen Ebenen derselben incident sind.

5. Als Repräsentant der Configurationen (12_6, 16_3) kann die Würfelconfiguration betrachtet werden, welche ausser den 8 Eckpunkten, 12

(1) Nach der Ausdrucksweise des Herrn Cyparissos Stephanos im Bulletin des sciences math. et astr., 2e série t. III, 1879. Veronese (Sopra alcune notevoli configurazioni ... in den Memorie della R. Accad. dei Lincei, 1880—81) nennt sie »tetraedri fasciali».

(2) Vietor in den Berichten über d. Verhdlgn. d. naturf. Gesellsch. zu Freiburg i. Br. VIII. 2, 1882.

Kanten und 6 Flächen eines Würfels noch dessen Mittelpunkt M, die durch M gehenden 4 Diagonalen und 6 Diagonalebenen und die drei unendlich fernen Kantenpunkte enthält (Fig. 1). Die drei Tetraëder $\varDelta$ dieser Cf. werden gebildet von je zwei parallelen Flächen und den beiden zu ihnen normalen Diagonalebenen des Würfels. Die drei unendlich fernen Kantenpunkte bilden mit M das eine der drei Tetraëder $\varDelta_1$; die beiden anderen werden von je vier Eckpunkten gebildet, die auf den quadratischen Würfelflächen einander gegenüber liegen, und ihre Kanten sind die 12 Diagonalen dieser 6 Quadrate (Fig. 2). — Die Configurationen $(12_6, 16_3)$ werden auch repräsentirt durch diejenige des regulären Octaëders, welche aus dessen 8 Flächen, 12 Kanten und 6 Eckpunkten, den 3 Diagonalebenen, der unendlich fernen Ebene und den unendlich fernen 6 Punkten und 4 Geraden der Kanten und Flächen besteht (Fig. 3). Wir bezeichnen die $(12_6, 16_3)$ als Hexaëder- oder Octaëder-Configurationen, weil sie sowohl collinear als auch reciprok in diejenigen des Würfels und des regulären Octaëders transformirt werden können (1.).

6. Die 12 Flächen der drei Tetraëder $\varDelta_1$ einer Würfelconfiguration gehören zu der Cf. $(12_6, 16_3)$ eines regulären Octaëders, welches die Mittelpunkte der sechs Würfelflächen zu Eckpunkten hat (Fig. 2); sie bilden die drei mit jenen $\varDelta_1$ identischen Tetraëder $\varDelta$ dieser Octaëderconfiguration, aus welcher ganz ebenso wieder die Würfelconfiguration abgeleitet werden kann. Ueberhaupt gehört zu jeder Cf. $(12_6, 16_3)$ eine andere ihr dreifach um- und eingeschriebene, so dass die Tetraëder $\varDelta$ oder $\varDelta_1$ der ersteren mit den Tetraëdern $\varDelta_1$ resp. $\varDelta$ der letzteren identisch sind, also durch jeden Punkt der einen drei Ebenen der andern Cf. gehen und in jeder Ebene der einen drei Punkte der andern liegen. Die 24 Punkte und 24 Ebenen von zwei so zusammengehörigen Configurationen bilden mit ihren 18 Diagonalen, d. h. mit den 18 Kanten ihrer Tetraëder $\varDelta$ und $\varDelta_1$ wiederum die harmonische Configuration $(24_9, 18_4)$. Letztere sowie jede der beiden Cff. $(12_6, 16_3)$ ist sich selbst zugeordnet in den 24 centrisch-involutorischen Systemen, welche je einen Eckpunkt der Tetraëder $\varDelta$ und $\varDelta_1$ zum Involutionscentrum und die gegenüberliegende Ebene zur Involutionsebene haben.

7. Um zwei Configurationen $(12_6, 16_3)$ reciprok auf einander zu beziehen, kann man fünf Punkten P der einen, von welchen die vier ersten eines ihrer Tetraëder $\varDelta_1$ bilden, beziehungsweise fünf Ebenen ε der

andern, von welchen die vier ersten ein Tetraëder $\varDelta$ derselben bilden, als entsprechende zuweisen (1.). Da nun die letztere Cf. drei Tetraëder $\varDelta$ enthält und jedes derselben durch 24 Permutationen seiner 4 Ebenen ε darstellbar ist, ausserdem aber die fünfte Ebene ε der Cf. acht verschiedene Lagen annehmen kann, so ergiebt sich: Zwei beliebige Configurationen $(12_6, 16_3)$ können auf $3.24.8 = 576$ verschiedene Arten reciprok und ebenso oft collinear auf einander bezogen werden.[1] — Eine Cf. $(12_6, 16_3)$ ist in zwölf verschiedenen Nullsystemen sich selbst zugeordnet; man erhält zwei derselben, wenn man irgend zwei sich schneidenden Cf.-Geraden diejenigen beiden zu ihnen windschiefen zuordnet, deren Schnittpunkt in der Ebene der ersteren liegt. Um diese 12 Nullsysteme übersichtlich darstellen zu können, bezeichnen wir die Punkte und Ebenen der Cf. auf folgende Art.

8. Sei *iklm* irgend eine Permutation von 1 2 3 4. Wir bezeichnen dann die Punkte der Cf. $(12_6, 16_3)$ durch die zwölf Ziffernpaare *ik*, und von ihren Ebenen vier durch die Ziffern $i = 1, 2, 3, 4$, die übrigen acht durch die Ternen *ikl* oder deren cyclische Permutationen, und zwar so, dass die drei Tetraëder $\varDelta_1$ von den Punktenquadrupeln:

12 21 34 43, 13 24 31 42 und 14 23 32 41

gebildet werden, die drei Tetraëder $\varDelta$ aber von den Ebenenquadrupeln:

1 2 3 4, 234 143 124 132 und 432 134 142 123.

Die Punkte *ik*, *il*, *im* liegen in einer Cf.-Geraden (vgl. Fig. 1 und 2); ebenso die Punkte *ik*, *li*, *mi*. Die sechs Punkte:

ik, *il*, *im*, *ki*, *li*, *mi* liegen in der Ebene *i*, und

ik, *il*, *im*, *lm*, *mk*, *kl* liegen in der Ebene $klm = lmk = mkl$;

die sechs Ebenen *i*, *ikl*, *ikm*, *k*, *klm*, *kml* gehen demnach durch den Punkt *ik*. Von den 18 Diagonalen $\overline{ik\ ki}$ und $\overline{ik\ lm}$ der Cf. schneiden sich $\overline{ik\ ki}$, $\overline{kl\ lk}$ und $\overline{li\ il}$ in einem Eckpunkte der drei Tetraëder $\varDelta$, ebenso $\overline{ik\ lm}$, $\overline{kl\ im}$ und $\overline{li\ km}$; der letztere Eckpunkt liegt der Ebene *lki* und der erstere der Ebene *m* gegenüber, beide sind in Fig. 3 ebenso bezeichnet wie diese ihre Gegenebenen. Die Schemata:

---

[1] Dieser und der folgende Satz wurden bereits von Herrn Vietor, welchem ich sie vor $1\frac{1}{2}$ Jahren mittheilte, a. a. O. veröffentlicht.

ki	kl	km	und	ki	kl	km
lk	li	lm		lk	il	ml
mk	ml	mi		mk	lm	im

repräsentiren die 9 Cf.-Punkte, welche ausserhalb der Geraden $\overline{ik\ il\ im}$ resp. $\overline{ik\ li\ mi}$ liegen, zugleich aber durch ihre 3 Zeilen und 3 Spalten diejenigen sechs Cf.-Geraden, welche diese resp. Geraden nicht schneiden. Die 9 Punkte, 6 Geraden und 9 Ebenen der Cf. $(12_6, 16_3)$, welche mit einer beliebigen Cf.-Geraden nicht incident sind, liegen hiernach in einer Fläche zweiten Grades und bilden eine Cf. $(9_5, 6_3)$.

9. Die zwölf Nullsysteme A_i, B_i, C_i, in welchen die Configuration $(12_6, 16_3)$ sich selbst zugeordnet ist, lassen sich nun durch folgende Tabelle darstellen:

	1	2	3	4	234	143	124	132	432	134	142	123
A_1	12	21	34	43	13	24	31	42	14	23	32	41
A_2	21	12	43	34	42	31	24	13	32	41	14	23
A_3	12	21	43	34	14	23	41	32	13	24	42	31
A_4	21	12	34	43	23	14	32	41	24	13	31	42
B_1	13	24	31	42	14	23	32	41	12	21	34	43
B_2	31	42	13	24	23	14	41	32	43	34	21	12
B_3	13	42	31	24	12	43	34	21	14	41	32	23
B_4	31	24	13	42	34	21	12	43	32	23	14	41
C_1	14	23	32	41	12	21	34	43	13	24	31	42
C_2	41	32	23	14	34	43	12	21	24	13	42	31
C_3	14	32	23	41	13	31	24	42	12	34	21	43
C_4	41	23	32	14	42	24	31	13	43	21	34	12

Aus derselben ist ersichtlich, dass z. B. in dem Nullsysteme C_3 den Ebenen 1, 2, 3, 4, 234, ..., 123 die resp. in ihnen liegenden Punkte 14, 32, 23, 41, 13, ..., 43 zugeordnet sind, und folglich den vier Geraden 21 24 23, 12 31 41, 34 42 14, 43 13 32 die resp. Geraden 34 31 32, 43 24 14, 21 13 41, 12 42 23, während die übrigen acht

Cf.-Geraden in C_3 sich selbst zugeordnet sind. In jedem der zwölf Nullsysteme sind acht Cf.-Gerade sich selbst und die übrigen acht paarweise einander zugeordnet. Die beiden Nullsysteme eines jeden der sechs Paare:

$$A_1A_2,\quad B_1B_2,\quad C_1C_2,\quad A_3A_4,\quad B_3B_4,\quad C_3C_4$$

stehen zu einander in solcher Wechselbeziehung, dass die acht Cf.-Geraden, welche in einem von ihnen paarweise einander zugeordnet sind, acht sich selbst zugeordnete »Leitstrahlen» des andern bilden (vgl. 13.).

10. Die vier Nullsysteme A_i sind paarweise involutorisch und bestimmen zu zweien sechs geschaart-involutorische Systeme A_iA_k und zu dreien vier räumliche Polarsysteme $A_kA_lA_m$, [1] in welchen die Cf. (12_6,16_3) sich selbst zugeordnet ist. Nämlich die Nullpunkte oder Pole einer beliebigen Ebene und die Nullebenen eines jeden Punktes bezüglich der Systeme A_i, A_k oder A_k, A_l, A_m sind einander zugeordnet in dem involutorischen Systeme A_iA_k resp. conjugirt in dem Polarsysteme $A_kA_lA_m$. Das involutorische System A_2A_3 z. B. enthält die Punktenpaare 12 21. 42 14. 31 23. 24 41. 13 32 und seine Involutionsaxen gehen durch 34 und 43; das Polarsystem $A_2A_3A_4$ hat die beiden Poltetraëder 14 23 42 31 und 41 32 24 13 und seine Ordnungsfläche enthält die Schaar gemeinschaftlicher Leitstrahlen der Nullsysteme A_2, A_3, A_4 und die drei paar Involutionsaxen von A_3A_4, A_4A_2 und A_2A_3, insbesondere auch die Leitstrahlen $\overline{12\ 21}$ und $\overline{34\ 43}$; durch letztere und durch die Involutionsaxen von A_2A_3 geht auch die Ordnungsfläche des Polarsystems $A_1A_2A_3$, von welchem 14 32 42 13 und 41 23 24 31 zwei Poltetraëder sind. Die involutorischen Systeme A_iA_k und A_lA_m bestimmen zusammen das System $A_1A_2A_3A_4$, von welchem $\overline{12\ 21}$ und $\overline{34\ 43}$ die Involutionsaxen und 13 31, 14 41, 23 32, 24 42 vier Punktenpaare sind, und ebenso bestimmen von den drei Systemen A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 (resp. A_3A_4, B_3B_4, C_3C_4) je zwei das dritte; nämlich je zwei Punkte, welche in zwei dieser Systeme einem beliebigen Punkte zugeordnet sind, sind in dem dritten Systeme einander zugeordnet. Durch die letzteren beiden Gruppen von je drei Systemen werden die Punkte der Cf. (12_6, 16_3) zu vieren so gruppirt:

12 21 34 43, 13 42 31 24, 14 32 41 23;

---

[1] Vgl. F. Klein, Math. Annalen II S. 199—226 und meine »Geometrie der Lage» II, 2 Aufl., S. 256.

diese drei Quadrupel Δ_1 sowie die 3 Tetraëder Δ sind Poltetraëder eines räumlichen Polarsystems, in welchem die Cf. $(12_6, 16_3)$ der zu ihr gehörigen Cf. $(12_6, 16_3)$ zugeordnet ist, und dessen imaginäre Ordnungsfläche die Involutionsaxen der zweimal drei Systeme und die gemeinschaftlichen Leitstrahlen der einen und der anderen Gruppe enthält (vgl. 16.).

11. Die zwölf Nullsysteme A_i, B_i, C_i bilden die folgenden neun Gruppen von je vier involutorischen Nullsystemen:

$$A_1A_2A_3A_4,\quad A_1A_2B_3B_4,\quad A_1A_2C_3C_4,\quad B_1B_2A_3A_4,\quad B_1B_2B_3B_4,$$
$$B_1B_2C_3C_4,\quad C_1C_2A_3A_4,\quad C_1C_2B_3B_4,\quad C_1C_2C_3C_4.$$

Von jeder dieser Gruppen gilt dasselbe, was soeben von $A_1A_2A_3A_4$ bemerkt wurde; ein beliebiges der zwölf Nullsysteme liegt also mit sieben anderen involutorisch. Die 12 Nullsysteme bestimmen demnach zu zweien $\frac{12.7}{2} = 42$ und zu vieren 9, im Ganzen also 51 geschaart-involutorische Systeme, zu dreien aber $9.4 = 36$ Polarsysteme, in denen die Cf. $(12_6, 16_3)$ sich selbst zugeordnet ist. Neun der 51 involutorischen Systeme haben je zwei Gegenkanten der Tetraëder Δ_1 zu Involutionsaxen, sechs andere mit imaginären Axen werden durch das Schema der Punktenpaare:

ik ki. lm ml. il mk. li km. im lk. mi kl

dargestellt und die übrigen 36 durch das Schema:

ik ik. ki ki. lm ml. mk kl. lk km. mi il. li im.

Die Ordnungsflächen der 36 Polarsysteme sind alle reell und geradlinig; durch je zwei Gegenkanten der 3 Tetraëder Δ_1 gehen vier von ihnen (10.). Wählt man von zwei dieser Tetraëder je zwei Eckpunkte, wie 12 21 und 13 24, deren Verbindungslinien sich nicht schneiden, so bilden diese und die übrigen vier Eckpunkte zwei Poltetraëder 12 21 13 24 und 34 43 31 42 von einem der 36 Polarsysteme (vgl. 10.). Andere Polarsysteme, in welchen die Cf. $(12_6, 16_3)$ sich selbst zugeordnet wäre, existiren nicht.

12. Die gemeinschaftlichen Leitstrahlen der drei Nullsysteme A_1, B_1, C_1 bilden keine Regelschaar, sondern eine lineare Congruenz $A_1B_1C_1$, welche die vier windschiefen Cf.-Geraden

12 13 14, 21 24 23, 34 31 32, 43 42 41

enthält und durch dieselben bestimmt ist. Die drei Nullsysteme liegen folglich in einem Büschel, d. h. die drei Nullpunkte einer beliebigen Ebene liegen in einer Geraden und die drei Nullebenen eines jeden Punktes gehen durch eine Gerade der Congruenz. Uebrigens sind durch diese 3 Nullsysteme die Punkte und Ebenen des Raumes in Tripeln einander zugeordnet, wie 12, 13, 14 und 1, 234, 432 oder 21, 24, 23 und 2, 143, 134, sodass die Nullpunkte der drei Ebenen eines Tripels in drei cyclischen Permutationen das zugeordnete Punktentripel bilden. Ganz das Gleiche gilt von den Nullsystemen der acht Tripel:

$$A_1B_1C_1,\ A_1B_2C_2,\ A_2B_1C_2,\ A_2B_2C_1;\quad A_3B_3C_3,\ A_3B_4C_4,\ A_4B_3C_4,\ A_4B_4C_3,$$

wie aus der obigen Tabelle ersichtlich ist. Die Nullpunkte einer Ebene in den drei paar Nullsystemen A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 bilden folglich die drei paar Gegenpunkte eines vollständigen Vierseits, dessen Seiten den vier Congruenzen $A_1B_1C_1$, $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$, $A_2B_2C_1$ angehören; ebenso bilden ihre Nullpunkte bezüglich der übrigen sechs Nullsysteme ein vollständiges Vierseit und die Nullebenen eines beliebigen Punktes ein vollständiges Vierkant. Durch die sechs Nullsysteme $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ werden die Punkte und Ebenen des Raumes zu Hexaëder-Configurationen (12_6, 16_3) gruppirt, deren 16 Geraden zu vieren den erwähnten vier Congruenzen angehören. Jeder Ebene einer solchen Cf. sind in den 6 Nullsystemen die 6 in ihr liegenden Cf.-Punkte zugeordnet, ferner in den 4 Tripeln $A_1B_1C_1$, $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$, $A_2B_2C_1$ die vier paar anderen durch ihre Cf.-Geraden gehenden Cf.-Ebenen, und in den 3 involutorischen Systemen A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 die noch übrigen drei Cf.-Ebenen. Analoges gilt von jedem Punkte einer solchen Cf. Durch die sechs Nullsysteme $A_3B_3C_3A_4B_4C_4$ werden die Punkte und Ebenen des Raumes ebenfalls zu Hexaëder-Configurationen gruppirt, die aber von den vorigen verschieden sind.

13. Die acht linearen Congruenzen der eben besprochenen Tripel werden durch folgende Tabelle übersichtlich dargestellt:

	$A_3\ B_3\ C_3$	$A_3\ B_4\ C_4$	$A_4\ B_3\ C_4$	$A_4\ B_4\ C_3$
$A_1B_1C_1$	12 13 14	21 24 23	34 31 32	43 42 41
$A_1B_2C_2$	21 42 32	12 31 41	43 24 14	34 13 23
$A_2B_1C_2$	43 31 23	34 42 14	21 13 41	12 24 32
$A_2B_2C_1$	34 24 41	43 13 32	12 42 23	21 31 14

Die vier Geraden, welche mit einem der Tripel ABC in derselben Zeile oder Spalte verzeichnet sind, bestimmen die zugehörige lineare Congruenz. Zugleich ist aus der Tabelle ersichtlich, welche acht Cf.-Geraden in jedem der zwölf Nullsysteme sich selbst und welche acht paarweise einander zugeordnet sind (9.); z. B. in C_1 sind die Geraden der ersten und der vierten Reihe ($A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_1$) sich selbst und die übereinander stehenden der zweiten und dritten Reihe einander zugeordnet, in A_4 dagegen sind die Geraden der dritten und vierten Spalte ($A_4 B_3 C_4$ und $A_4 B_4 C_3$) sich selbst und die nebeneinander stehenden der ersten und zweiten Spalte einander zugeordnet. Jede der 16 Cf.-Geraden schneidet nur diejenigen sechs anderen nicht, welche mit ihr in derselben Zeile oder Spalte der Tabelle verzeichnet sind. Welche Ebene einem beliebigen Cf.-Punkte in jedem der 12 Nullsysteme zugeordnet ist, lehrt auch diese Tabelle; z. B. dem Punkte 12 ist in B_4 und zugleich in C_2 die Ebene 124 der Geraden 12 31 41 und 12 24 32 zugeordnet, weil letztere von B_4 und C_2 zwei Leitstrahlen sind.

14. Welche von den 18 Kanten der Tetraëder Δ und Δ_1 in jedem der 12 Nullsysteme sich selbst, und welche einander zugeordnet sind, ersieht man aus folgender Tabelle:

	A_3	B_3	C_3	
A_1	12 21, 34 43	14 32, 41 23	13 42, 31 24	A_2
B_1	14 23, 41 32	13 31, 24 42	12 43, 21 34	B_2
C_1	13 24, 31 42	12 34, 21 43	14 41, 23 32	C_2
	A_4	B_4	C_4	

Jedes der Nullsysteme A_i, B_i, C_i hat diejenigen drei paar Tetraëderkanten zu Leitstrahlen, welche mit ihm in derselben Zeile oder Spalte verzeichnet sind; die übrigen 12 Kanten sind paarweise einander zugeordnet, und zwar in A_1, B_1 oder C_1 die übereinander, in A_2, B_2 oder C_2 die überkreuz stehenden, z. B. in C_1 die Kanten 12 21 und 14 23, 34 43 und 41 32, cet. und in C_2 die Kanten 12 21 und 41 32, 34 43 und 14 23, 14 32 und 24 42, cet. Ebenso sind in A_3 die Kanten 14 32 und 13 42, 41 23 und 31 24, 13 31 und 12 43 cet. einander zugeordnet, in A_4 dagegen 14 32 und 31 24, 41 23 und 13 42 u. s. w. — Von den neun Paaren Gegenkanten der Tetraëder Δ_1 schneidet ein jedes nur diejenigen vier Kantenpaare nicht, welche mit ihm in einer Reihe oder Spalte der Tabelle verzeichnet sind; diese vier paar Gegenkanten aber liegen allemal auf einer Fläche zweiter Ordnung, weil vier der 8 Kanten die übrigen vier schneiden. Bezüglich der neun Flächen zweiter Ordnung, welche hiernach durch je acht der 18 Tetraëderkanten gehen, ist die Cf. (12_6, 16_3) der zu ihr gehörigen Cf. (12_6, 16_3) und die aus beiden gebildete harmonische Cf. (24_9, 18_4) sich selbst zugeordnet.

15. Es giebt sechs und nur sechs Nullsysteme, in welchen eine Cf. (12_6, 16_3) der zu ihr gehörigen Cf. und folglich jedes ihrer Tetraëder $\varDelta_1$ und $\varDelta$ sich selbst zugeordnet ist; man erhält eines derselben, wenn man zwei windschiefen Tetraëderkanten ihre Gegenkanten zuordnet. Die letzte Tabelle (14.) repräsentirt auch diese sechs Nullsysteme, indem jede ihrer 3 Zeilen und 3 Spalten von einem der Nullsysteme drei Paare einander zugeordneter Geraden aufweist; die übrigen 12 Kanten sind Leitstrahlen desselben. — Wir wollen mit (ik) die Ebene bezeichnen, welche in einem der Tetraëder $\varDelta_1$ dem Eckpunkte ik gegenüberliegt, sodass also (ik) die drei Punkte ki, lm und ml verbindet und in ik die drei Ebenen (ki), (lm) und (ml) sich schneiden. Die sechs neuen Nullsysteme können dann auch folgendermassen übersichtlich dargestellt werden:

	(12)	(21)	(34)	(43)	(13)	(24)	(31)	(42)	(14)	(23)	(32)	(41)
A_1A_2	21	12	43	34	42	31	24	13	32	41	14	23
B_1B_2	43	34	21	12	31	42	13	24	23	14	41	32
C_1C_2	34	43	12	21	24	13	42	31	41	32	23	14
A_3A_4	21	12	43	34	24	13	42	31	23	14	41	32
B_3B_4	34	43	12	21	31	42	13	24	32	41	14	23
C_3C_4	43	34	21	12	42	31	24	13	41	32	23	14

Denn z. B. in dem Nullsysteme C_1C_2 sind den Ebenen (12), (21), (34), (43), (13), ... , (41) die resp. in ihnen liegenden Punkte 34, 43, 12, 21, 24, ... , 14 zugeordnet. Aus dieser Tabelle ist ersichtlich, dass die sechs Nullsysteme involutorisch sind; sie bestimmen zu zweien fünfzehn geschaart-involutorische Systeme und zu dreien zehn Polarsysteme, und zwar ganz dieselben, wie die in gleicher Weise bezeichneten involutorischen Systeme (10.). Beispielsweise bestimmen A_1A_2 und B_3B_4 das involutorische System $A_1A_2B_3B_4$, dagegen A_1A_2 und B_1B_2 das System C_1C_2. Neun von den 15 involutorischen Systemen haben je zwei Gegenkanten der Tetraëder $\varDelta_1$ zu Involutionsaxen (10., 11.), die Axen der sechs übrigen sind imaginär (10.).

16. Drei beliebige von diesen sechs Nullsystemen bestimmen zu-

sammen dasselbe Polarsystem wie die drei übrigen; z. B. die Nullsysteme B_1B_2, C_1C_2 und A_3A_4 liefern ebenso wie B_3B_4, C_3C_4 und A_1A_2 das Polarsystem, von welchem 12 21 34 43 ein Poltetraëder ist und dessen Ordnungsfläche durch die acht Kanten:

31 24, 13 42, 14 32, 41 23; 31 42, 13 24, 14 23, 41 32

der übrigen beiden Tetraëder Δ_1 geht. Von den zehn Polarsystemen hat das durch A_1A_2, B_1B_2 und C_1C_2 bestimmte die drei Δ_1 und die drei Δ zu Poltetraëdern und seine Ordnungsfläche ist imaginär; die Ordnungsflächen der neun übrigen sind reell und gehen durch je vier paar Gegenkanten der Δ_1 (vgl. 14.). Jede dieser 10 Ordnungsflächen ist ihre eigene Polare bezüglich der neun übrigen, weil in einem beliebigen der 10 Polarsysteme die 18 Tetraëderkanten theils sich selbst theils ihren Gegenkanten zugeordnet sind. — Durch die 6 Nullsysteme, 10 Polar- und 15 involutorischen Systeme sind, wie Herr F. Klein a. a. O. zuerst bemerkt hat, die Punkte und Ebenen des Raumes nach Kummer'schen Configurationen $(16_6, 120_2)$ gruppirt, deren 120 Geraden aus je acht Leitstrahlen der 15 involutorischen Systeme bestehen.

17. Ausser den soeben nachgewiesenen 10 Polarsystemen giebt es nur noch zweimal zwölf andere, in welchen die zusammengehörigen beiden Cff. $(12_6, 16_3)$ einander zugeordnet sind. Durch je sechs Punkte der einen oder der andern Cf., welche ausserhalb einer Ebene ε der Cf. liegen, geht die Ordnungsfläche von einem dieser 24 Polarsysteme; dieselbe berührt in den sechs Punkten paarweise die 12 Kanten von zwei Tetraëdern Δ der Cf. und hat das dritte Δ, welchem ε angehört, zum Poltetraëder. Bei der Cf. des regulären Octaëders z. B. ist die dem Octaëder umschriebene Kugel eine der 24 Ordnungsflächen (Fig. 2 und 3). Diese 24 Flächen sind alle reell, enthalten aber keine reellen Geraden. — Wir haben also eine Gruppe von 24 und eine von 10 Flächen zweiter Ordnung, in Bezug auf welche die beiden Cff. $(12_6, 16_3)$ zu einander, und ausserdem eine Gruppe von 36 Flächen, in Bezug auf welche sie zu sich selbst polar sind. Die Flächen einer jeden dieser drei Gruppen sind bezüglich einer beliebigen der 70 Flächen theils zu sich selbst theils paarweise zu einander polar. Die harmonische Cf. $(24_9, 18_4)$ ist, wie sich beweisen lässt, nur bezüglich dieser 70 Flächen zweiter Ordnung zu sich selbst polar, und in keinem anderen Nullsysteme als den 18 oben angegebenen sich selbst zugeordnet.

Strassburg i/E, den 22 Oct. 1882.