SUR LES FONCTIONS UNIFORMES D'UN POINT ANALYTIQUE (x, y).[1]

PAR

P. APPELL

à PARIS.

I. *Sur les fonctions uniformes d'une variable x.*

1. Soit $f(x)$ une fonction uniforme de la variable x ayant un nombre fini de points singuliers $a_1, a_2, \ldots a_n$. Dans le domaine du point singulier a_k, cette fonction est représentée par une série convergente de la forme

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu^{(k)}(x - a_k)^\nu \; ; \quad (k = 1,\ 2, \ldots . n);$$

pour les valeurs de x dont le module surpasse le plus grand des modules des nombres $a_1, a_2 \ldots . a_n$, cette même fonction est représentée par la série

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu \left(\frac{1}{x}\right)^\nu.$$

Théorème I. *Les nombres $A_{-1}^{(k)}$ et A_1 satisfont à la relation*

$$A_1 = \sum_{k=1}^{k=n} A_{-1}^{(k)}. \tag{1}$$

---

[1] La plupart des résultats contenus dans ce mémoire ont été exposés dans un mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 13 mars 1882.

En effet l'intégrale $\int f(x)\,dx$ prise dans le sens positif le long d'une circonférence ayant pour centre le point $x = 0$ et entourant les n points $a_1, a_2 \ldots . a_n$ est égale à $2\pi i \sum_{k=1}^{k=n} A_{-1}^{(k)}$; et, si l'on pose $x = \frac{1}{x'}$, cette même intégrale se réduit à l'intégrale

$$-\int f\left(\frac{1}{x'}\right) \frac{dx'}{x'^2}$$

prise dans le sens négatif sur une circonférence entourant le seul point singulier $x' = 0$, intégrale qui est égale à $2\pi i\, A_1$.

Remarque. La décomposition d'une fonction rationnelle $R(x)$ en fractions simples résulte immédiatement de l'application du théorème I à la fonction de ξ

$$R(\xi)\left[\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi - x_0}\right]$$

2. Soient $C_1, C_2, \ldots . C_n$ n cercles se coupant ou non, ayant pour centres respectifs les points $a_1, a_2 \ldots . a_n$. Appelons espace E la portion du plan des x extérieure à la fois à tous ces cercles; la ligne L qui limite cet espace E consiste en une ou plusieurs courbes fermées composées d'arcs de cercle. Désignons par $\varphi(x)$ une fonction de x uniforme dans l'espace E et n'ayant dans cet espace aucun point singulier. (Nous supposons par conséquent que le point $x = \infty$ n'est pas un point singulier de $\varphi(x)$).

Théorême II. *La fonction $\varphi(x)$ est développable en une série de la forme*

$$\varphi(x) = A + \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} \frac{1}{(x - a_k)^\nu} \tag{2}$$

convergente en tous les points de l'espace E.

Pour démontrer ce théorême, considérons l'intégrale

$$\int \varphi(\xi)\left[\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi - x_0}\right] d\xi$$

prise sur le contour L dans un sens tel que l'espace E soit à gauche du point décrivant ξ, les points x et x_0 étant deux points quelconques de l'espace E. On voit immédiatement que cette intégrale est égale à

$$2\pi i\,[\varphi(x) - \varphi(x_0)]$$

Comme le contour d'intégration L se compose d'arcs appartenant aux circonférences C_1, C_2, ... C_n, l'on aura

$$(3) \qquad 2\pi i\,[\varphi(x) - \varphi(x_0)] = \sum_{k=1}^{k=n} \int_{C_k} \varphi(\xi)\left[\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi - x_0}\right] d\xi$$

l'indice C_k indiquant que l'intégrale affectée de cet indice est prise le long des arcs de la circonférence C_k qui appartiennent à la ligne L. Pour toutes les valeurs de ξ telles que

$$(4) \qquad \text{mod.}\ (\xi - a_k) < \varepsilon_k\ \text{mod.}\ (x - a_k), \quad \varepsilon_k < 1$$

la fonction $\frac{1}{\xi - x}$ de la variable ξ est développable en une série uniformément convergente

$$(5) \qquad \frac{1}{\xi - x} = -\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(\xi - a_k)^{\nu-1}}{(x - a_k)^{\nu}}$$

Or les valeurs que prend ξ dans l'intégrale affectée de l'indice C_k satisfont à l'inégalité (4); en remplaçant, dans cette intégrale, $\frac{1}{\xi - x}$ par le développement (5), la relation (3) devient la formule (2) où l'on fait

$$A = \varphi(x_0) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{k=n} \int_{C_k} \varphi(\xi) \frac{1}{\xi - x_0}\, d\xi$$

$$A_\nu^{(k)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \varphi(\xi)(\xi - a_k)^{\nu-1}\, d\xi$$

3. Le théorème précédent II est un cas particulier du suivant.

Théorème III. *Une fonction $\varphi(x)$ holomorphe dans l'espace à contour simple ou multiple situé à l'extérieur de n cercles de centres a_1, a_2, ... a_n*

et à l'intérieur de m cercles de centres b_1, b_2, ... b_m est développable, dans cette portion du plan, en une série convergente de la forme:

$$\varphi(x) = C + \sum_{h=1}^{h=m}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} B_\nu^{(h)}(x - b_h)^\nu + \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)}(x - a_k)^\nu$$

Ce théorème conduit à la démonstration donnée par M. Bourguet de l'expression

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{k=n} G_k\left(\frac{1}{x - a_k}\right) + G(x)$$

indiquée par M. Weierstrass pour une fonction uniforme ayant n points singuliers a_1, a_2, ... a_n à distance finie et un point singulier à l'infini. Il suffit pour cela de supposer que les cercles de centres a_1, a_2, ... a_n aient des rayons infiniment petits, que le nombre m soit égal à 1 et que le cercle correspondant ait un rayon infini.

Remarque. Les développements en série de fractions rationnelles qui font l'objet des § 2—3 conduisent à des conséquences intéressantes que j'ai indiquées dans les *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences* (Séance du premier mai 1882).

II. *Sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y).*

4. Soit

$$F(x, y) = 0 \tag{6}$$

une équation algébrique irréductible représentant une courbe d'ordre m et de genre p. Je suppose que, par une substitution linéaire l'on ait fait en sorte que le point $x = \infty$ ne soit pas un point critique pour la fonction algébrique y de la variable x; alors, quand x croît indéfiniment, le rapport $\frac{y}{x}$ tend vers m valeurs finies distinctes c_1 c_2, ... c_m.

J'appelle, comme il est d'usage de le faire, point analytique (x, y) le système formé par une valeur quelconque attribuée à x et par une des m valeurs correspondantes de y. Une fonction de la variable x sera dite *fonction uniforme du point analytique* (x, y) si cette fonction reprend la même valeur lorsque le point (x, y) décrit un cycle quelconque.

Soit (a, b) un point analytique non critique; j'appelle *domaine* δ du point (a, b) l'ensemble des points analytiques que peut atteindre le point (x, y) en partant du point (a, b), x restant assujetti à la condition

$$\text{mod. } (x - a) \leqq \delta.$$

Si le point a est à l'infini on remplacera dans cette définition $x - a$ par $\frac{1}{x}$.

Soit (a, b) un point critique; les valeurs de y qui deviennent égales à b pour $x = a$ se partagent en un certain nombre de systèmes circulaires. J'appelle *domaine* δ du point (a, b) *relatif à un de ces systèmes circulaires* l'ensemble des points analytiques que peut atteindre le point (x, y) en partant de (a, b) avec une des valeurs de y appartenant à ce système circulaire, x restant assujetti à la condition

$$\text{mod. } (x - a) \leqq \delta.$$

5. *Pôles et points singuliers essentiels.* — Soit (a, b) un point analytique non critique; il existe un domaine δ du point (a, b) dans lequel il n'y a pas de point critique. Une fonction uniforme $f(x, y)$ du point analytique (x, y) sera, dans ce domaine, une *fonction uniforme de* x. Si cette fonction uniforme de x est régulière au point a, nous dirons que la fonction $f(x, y)$ du point analytique est régulière au point (a, b). Si, au contraire, cette même fonction uniforme de x admet le point a pour pôle ou pour point singulier essentiel, nous dirons que le point analytique (a, b) est un pôle ou un point singulier essentiel de $f(x, y)$.

Lorsque la fonction $f(x, y)$ est régulière au point (a, b), l'on a dans un certain domaine $\delta' < \delta$ de ce point

$$f(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu (x - a)^\nu ;$$

lorsque le point (a, b) est un pôle de $f(x, y)$, l'on a dans un certain domaine $\delta' < \delta$ de ce point

$$f(x, y) = \sum_{\nu=-\alpha}^{\nu=\infty} A_\nu (x - a)^\nu ;$$

le nombre positif entier α est appelé *degré* du pôle (a, b) et le coefficient

A_{-1} *résidu* relatif à ce pôle. Enfin, lorsque le point (a, b) est un point singulier essentiel de la fonction $f(x, y)$ et qu'en outre il existe un domaine $\delta' < \delta$ du point (a, b) dans lequel il n'y a plus ni pôles ni points singuliers essentiels, on a, dans ce domaine δ'

$$f(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu (x-a)^\nu ;$$

dans ce cas, le point singulier essentiel sera dit *point singulier essentiel isolé,* et le coefficient A_{-1} sera appelé *résidu* de la fonction $f(x, y)$ relatif au point (a, b).

Dans les définitions précédentes il faut remplacer $(x-a)$ par $\frac{1}{x}$ quand $a = \infty$.

Supposons maintenant que (a, b) soit un point critique de la fonction algébrique y de x et considérons un système circulaire de q racines $y_1, y_2 \ldots . y_q$ se permutant autour de ce point. Si l'on fait

$$x = a + x'^q, \tag{7}$$

ces q racines sont, dans un certain domaine du point (a, b) relatif au système circulaire considéré, représentées par le même développement en série

$$y = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \lambda_\nu x'^\nu. \tag{8}$$

Remplaçons, dans la fonction $f(x, y)$, x et y par les expressions (7) et (8); $f(x, y)$ deviendra une fonction de la variable x' uniforme dans un certain domaine du point $x' = 0$. Nous dirons que la branche de la fonction $f(x, y)$ relative au système circulaire considéré est régulière au point (a, b), admet ce point pour pôle ou pour point singulier essentiel suivant que la fonction uniforme de x' que nous venons de définir est régulière au point $x' = 0$, admet ce point pour pôle ou pour point singulier essentiel.

Lorsque la branche considérée de la fonction $f(x, y)$ est régulière au point (a, b), on a, dans un certain domaine du point $x' = 0$

$$f(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu x'^\nu;$$

lorsque le point (a, b) est un pôle pour cette branche, on a, dans un certain domaine du point $x' = 0$

$$f(x, y) = \sum_{\nu=-\alpha}^{\nu=+\infty} A_\nu x'^\nu;$$

le nombre entier positif α sera appelé degré du pôle, et le produit qA_{-q} sera appelé résidu de la branche considérée de la fonction relatif au pôle (a, b).

Lorsque le point (a, b) est un point singulier essentiel pour cette branche de la fonction $f(x, y)$ et qu'en outre il existe un domaine δ du point (a, b) relatif au système circulaire considéré tel que, dans ce domaine, il n'y ait plus ni pôle ni point singulier essentiel de $f(x, y)$, on a, pour cette branche, le développement

$$f(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu x'^\nu$$

valable dans un certain domaine du point $x' = 0$. Dans ce cas le point (a, b) est appelé *point singulier essentiel isolé* pour la branche considérée, et le produit qA_{-q} est appelé *résidu* relatif à ce point.

Il faut remarquer que, si dans les développements précédents suivant les puissances de x', on remplace x' par sa valeur $(x-a)^{\frac{1}{q}}$ tirée de (7), le coefficient de $\frac{1}{x-a}$ est précisément A_{-q}. Nous introduisons le facteur q dans la définition du résidu pour donner aux théorèmes un énoncé général s'appliquant à la fois aux points critiques et aux points non critiques.

Fonctions ayant un nombre fini de points singuliers.

6. On a d'abord le théorème suivant:

Une fonction uniforme du point analytique (x, y) qui n'a d'autres points singuliers que des pôles est une fonction rationnelle de x et y.

(Voir Briot, Théorie des fonctions abéliennes, Note B.)

7. Voici maintenant la généralisation du théorème I § 1.

Théorème IV. *Soit $f(x, y)$ une fonction uniforme du point analytique (x, y) ayant un nombre fini de points singuliers (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... (a_n, b_n) et soient R_1, R_2, ... R_n les résidus relatifs à ces points; soit de plus dans un certain domaine du point analytique* $(x = \infty, \lim \frac{y}{x} = c_k)$

$$f(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu^{(k)} \frac{1}{x^\nu}, \quad (k = 1, 2, \ldots . m);$$

on a la relation

$$(9) \qquad A_1^{(1)} + A_1^{(2)} + \ldots + A_1^{(m)} = R_1 + R_2 + \ldots . + R_n.$$

Pour démontrer cette relation, il suffit d'appliquer le théorème I à la fonction uniforme de x

$$f_1(x) = f(x, y_1) + f(x, y_2) + \ldots . + f(x, y_m),$$

y_1, y_2, ... y_m désignant les m valeurs de y qui répondent à la valeur x.

Il est évident que $f_1(x)$ est une fonction uniforme de x ayant les n points singuliers a_1, a_2, ... a_n. Supposons, pour prendre le cas le plus général, que le point singulier (a_k, b_k) soit un point critique autour duquel se permutent q racines y_1, y_2, ... y_q. On a, dans un certain domaine de ce point,

$$f(x, y_1) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \lambda_\nu (x - a_k)^{\frac{\nu}{q}};$$

désignons par ω une racine primitive de l'équation binôme

$$\omega^q - 1 = 0.$$

Si la variable x fait le tour du point a_k, y_1 devient y_2 et $(x - a_k)^{\frac{1}{q}}$ est multiplié par ω; donc

$$f(x, y_2) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \lambda_\nu \omega^\nu (x - a_k)^{\frac{\nu}{q}}.$$

On a de même

$$f(x, y_3) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \lambda_\nu \omega^{2\nu} (x - a_k)^{\frac{\nu}{q}};$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$f(x, y_q) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \lambda_\nu \omega^{(q-1)\nu} (x - a_k)^{\frac{\nu}{q}}.$$

Si nous faisons la somme de ces q développements

$$f(x, y_1) + f(x, y_2) + \ldots + f(x, y_q),$$

nous voyons que les termes qui contiennent $(x - a_k)$ élevé à une puissance fractionnaire disparaissent et que le coefficient de $\frac{1}{x - a_k}$ est $q\lambda_{-q}$, c'est à dire le résidu R_k. Ainsi la fonction uniforme $f_1(x)$ admet le point singulier a_k avec le résidu R_k.

D'autre part dans le domaine du point ∞ on a

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu^{(k)} \frac{1}{x^\nu};$$

le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans ce développement est

$$A_1^{(1)} + A_1^{(2)} + \ldots + A_1^{(m)}.$$

Donc en appliquant à la fonction $f_1(x)$ la relation (1) on obtient précisément la relation à démontrer (9).

Remarque I. Si une fonction uniforme du point (x, y) qui a un nombre fini de points singuliers n'a pas de points singuliers à l'infini et devient en chacun des m points analytiques éloignés indéfiniment infiniment petite de l'ordre de $\frac{1}{x^2}$ ou d'un ordre supérieur, la somme des résidus de cette fonction est nulle. En effet, dans cette hypothèse, les m nombres $A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, \ldots A_1^{(m)}$ sont nuls; donc

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_n = 0.$$

Remarque II. Dans le cas particulier où la fonction $f(x, y)$ est rationnelle en x et y, la relation (9) est l'expression analytique de ce théorème de Riemann que la somme des résidus logarithmiques de l'intégrale d'une fonction algébrique est nulle.

8. Avant de poursuivre cette étude, rappelons quelques propriétés des intégrales Abéliennes dont il sera fait usage plus loin.

Désignons par

$$(10) \qquad u^{(i)}(x,\, y) = \int_{x_0,\, y_0}^{x,\, y} \varphi_i(x,\, y)dx \qquad (i = 1,\, 2, \ldots . p)$$

les p intégrales Abéliennes normales de première espèce, et par $\theta\ (u_1,\, u_2, \ldots . u_p)$ ou plus simplement $\theta(u_i)$ une des fonctions θ correspondantes.

L'intégrale Abélienne normale de troisième espèce qui admet les deux points critiques logarithmiques $(\xi,\, \eta)$, $(\xi',\, \eta')$ est

$$\Pi_{(\xi',\, \eta')}^{(\xi,\, \eta)} = \text{Log.} \frac{\theta[u^{(i)}(x,\, y) - u^{(i)}(\xi,\, \eta) + h_i] \,.\, \theta[-u^{(i)}(\xi',\, \eta') + h_i]}{\theta[u^{(i)}(x,\, y) - u^{(i)}(\xi',\, \eta') + h_i] \,.\, \theta[-u^{(i)}(\xi,\, \eta) + h_i]}$$

où

$$h_i = C_i - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k,\, y_k), \qquad (i = 1,\, 2, \ldots . p),$$

les $(p - 1)$ points $(x_1,\, y_1)$, $(x_2,\, y_2)$, $\ldots$ $(x_{p-1},\, y_{p-1})$ étant arbitraires. La fonction $\Pi_{\xi',\, \eta'}^{\xi,\, \eta}$ ne dépend en aucune façon du choix de ces $(p - 1)$ points. (Voir: Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris par M. Emmanuel le 5 juillet 1879, p. 21 et suivantes.)

La dérivée de l'intégrale de troisième espèce $\Pi_{\xi',\, \eta'}^{\xi,\, \eta}$ par rapport à ξ est indépendante de $(\xi',\, \eta')$ et des $(p - 1)$ points $(x_1,\, y_1)$, $(x_2,\, y_2)$, $\ldots$ $(x_{p-1},\, y_{p-1})$. Désignons cette dérivée changée de signe par $Z(\xi,\, \eta)$:

$$(11) \qquad Z(\xi,\, \eta) = -\frac{d\Pi_{(\xi',\, \eta')}^{(\xi,\, \eta)}}{d\xi} = -\frac{d}{d\xi} \,.\, \text{Log} \frac{\theta[u^{(i)}(x,\, y) - u^{(i)}(\xi,\, \eta) + h_i]}{\theta[-u^{(i)}(\xi,\, \eta) + h_i]}.$$

Cette fonction $Z(\xi,\, \eta)$ est l'intégrale Abélienne normale de seconde espèce qui est finie pour toutes les valeurs de $(x,\, y)$ excepté pour $x = \xi$, $y = \eta$; en ce point elle devient infinie du premier ordre et son résidu est égal à l'unité. Cette même fonction $Z(\xi,\, \eta)$ est une fonction *rationnelle* du paramètre $(\xi,\, \eta)$ ayant pour pôles les points critiques et les points $(x,\, y)$ et $(x_0,\, y_0)$, ces derniers avec des résidus $- 1$ et $+ 1$. Cela résulte de la forme du second membre de l'équation (11) ou du théorème sur l'échange du paramètre et de l'argument dans les intégrales de troisième espèce. (Voir Clebsch et Gordan, Theorie der Abelschen Functionen p. 120 et suiv.). Je rappelle enfin que la fonction $Z(\xi, \eta)$ du point (x, y) admet p périodes qui sont

$$\varphi_1(\xi, \eta), \quad \varphi_2(\xi, \eta), \ldots . \varphi_p(\xi, \eta)$$

la fonction φ_i étant la fonction rationnelle qui figure dans l'expression (10) de l'intégrale de première espèce $u^{(i)}(x, y)$.

Cette fonction $Z(\xi, \eta)$ joue dans les recherches suivantes sur les fonctions du point analytique (x, y) le même rôle que la fonction

$$\frac{1}{x-\xi} - \frac{1}{x_0 - \xi}$$

dans les recherches sur les fonctions uniformes de x. (§ 1, 2 et 3.) Si l'on désigne par $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ les m valeurs de η qui répondent à une valeur attribuée à ξ dans l'équation $F(\xi, \eta) = 0$, on a

$$Z(\xi, \eta_1) + Z(\xi, \eta_2) + \ldots . + Z(\xi, \eta_m) = \frac{1}{x-\xi} - \frac{1}{x_0 - \xi}.$$

Si le point (ξ, η) coïncide avec un point critique, les théorèmes précédents subissent des modifications que je n'indiquerai pas ici.

9. Soit $R(x, y)$ une fonction rationnelle de x et y; la formule de Roch analogue à la formule de décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples (Journal de Crelle, t. 84, p. 294) s'obtient immédiatement en appliquant le théorème IV (relation (9)) à la fonction rationnelle de (ξ, η)

$$R(\xi, \eta) . Z(\xi, \eta). \tag{12}$$

Je vais le montrer ici en supposant pour plus de simplicité que la fonction $R(x, y)$ soit régulière aux m points analytiques éloignés indéfiniment et en tous les points critiques. Soient alors

$$(a_1, b_1), \ (a_2, b_2), \ldots . (a_n, b_n)$$

les n pôles de $R(x, y)$, le pôle (a_k, b_k) étant d'ordre s_k. Dans un certain domaine du point (a_k, b_k) on a

$$R(x,\ y) = \frac{A_1^{(k)}}{x - a_k} + \frac{A_2^{(k)}}{(x - a_k)^2} + \ldots + \frac{A_{s_k}^{(k)}}{(x - a_k)^{s_k}} + B_0^{(k)} + B_1^{(k)}(x - a_k) + \ldots$$

Cela posé, la fonction rationnelle (12) de ξ et η admet les n pôles $(a_k,\ b_k)$ de $R(\xi,\ \eta)$, et les pôles de $Z(\xi,\ \eta)$ qui sont les points critiques et les points $(x,\ y)$, $(x_0,\ y_0)$. Le résidu de la fonction (12) relatif au pôle $(a_k,\ b_k)$ est

$$A_1^{(k)} Z(a_k,\ b_k) + A_2^{(k)} . Z'(a_k,\ b_k) + \frac{A_3^{(k)}}{1.2} . Z''(a_k,\ b_k) + \ldots + \frac{A_{s_k}^{(k)}}{1.2..(s_k - 1)} . Z^{(s_k - 1)}(a_k,\ b_k),$$

en désignant par $Z^{(s)}(a,\ b)$ la dérivée d'ordre s de $Z(\xi,\ \eta)$ par rapport à ξ dans laquelle on a remplacé $(\xi,\ \eta)$ par $(a,\ b)$. Le résidu de la fonction (12) relatif au pôle $(x,\ y)$ est $- R(x,\ y)$, et le résidu relatif au pôle $(x_0,\ y_0)$ est $R(x_0,\ y_0)$. La fonction $Z(\xi,\ \eta)$ a encore des pôles aux points critiques, mais les résidus correspondants sont nuls, car l'intégrale

$$(13) \qquad \int Z(\xi,\ \eta) d\xi$$

reste finie aux points critiques. De plus la fonction rationnelle (12) est régulière aux m points analytiques à l'infini et elle est en chacun de ces points infiniment petite de l'ordre de $\frac{1}{\xi^2}$, car l'intégrale (13) reste finie à l'infini. Donc, d'après la remarque I du § (7) la somme des résidus de la fonction (12) est nulle; ce qui donne la formule de Roch

$$(14) \quad R(x,\ y) = R(x_0,\ y_0) + \sum_{k=1}^{k=n} \left[A_1^{(k)} Z(a_k,\ b_k) + \ldots + \frac{A_{s_k}^{(k)}}{1.2..(s_k - 1)} Z^{(s_k - 1)}(a_k,\ b_k) \right]$$

Puisque le second membre de cette formule est une fonction rationnelle de x et y, ses périodes sont nulles; ce qui donne les p relations connues

$$(15) \quad \sum_{k=1}^{k=n} \left[A_1^{(k)} \varphi_i(a_k,\ b_k) + A_2^{(k)} \varphi'_i(a_k,\ b_k) + \ldots + \frac{A_{s_k}^{(k)}}{1.2..(s_k - 1)} . \varphi_i^{(s_k - 1)}(a_k,\ b_k) \right] = 0$$

où

$$i = 1,\ 2 \ldots p.$$

Ces relations (15) peuvent d'ailleurs être démontrées directement en appliquant le théorème IV du § 7 aux p fonctions rationnelles

$$R(\xi, \eta)\varphi_i(\xi, \eta), \quad i = 1, 2 \ldots . p.$$

10. Proposons-nous maintenant de trouver l'expression la plus générale d'une fonction uniforme $f(x, y)$ du point analytique (x, y) partout régulière excepté au point singulier essentiel (a, b).

Dans un certain domaine du point singulier (a, b) on a

$$f(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{A_\nu}{(x-a)^\nu}. \tag{17'}$$

Considérons la fonction du point (ξ, η)

$$f(\xi, \eta)Z(\xi, \eta); \tag{16}$$

cette fonction admet un point singulier essentiel à savoir le point (a, b) et le résidu relatif à ce point est égal à

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1.2\ldots(\nu-1)} Z^{(\nu-1)}(a, b);$$

tel est en effet le coefficient de $\frac{1}{x-a}$ dans le développement de la fonction (16) suivant les puissances de $(\xi - a)$. Cette même fonction admet les pôles (x, y) et (x_0, y_0) avec les résidus $-f(x, y)$ et $f(x_0, y_0)$; elle admet aussi pour pôles les points critiques avec des résidus nuls; enfin elle devient aux m points analytiques à l'infini infiniment petite comme $\frac{1}{\xi}$. En appliquant à cette fonction (16) le théorème IV, Remarque I, on a

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1.2\ldots(\nu-1)} Z^{(\nu-1)}(a, b). \tag{17}$$

Telle est l'expression cherchée de la fonction $f(x, y)$. La série qui sert à définir la fonction (17) est convergente tant que le point analytique (x, y) est distinct du point (a, b). En effet quand le point (x, y) est distinct du point (a, b) on peut toujours développer la fonction (16) en une série ordonnée suivant les puissances de $(\xi - a)$ convergente dans un certain domaine du point (a, b). Dans ce qui suit nous désignerons par $G(x, y \mid a, b)$ la fonction uniforme la plus générale du point (x, y)

qui admet un seul point singulier, à savoir le point singulier essentiel (a, b); une pareille fonction est représentée par la série (17).

Dans les raisonnements précédents on a supposé le point (a, b) différent d'un point critique. Dans le cas où le point (a, b) coinciderait avec un point critique autour duquel se permutent q racines formant un système circulaire, on ferait d'abord la substitution

$$\xi = a + \xi'^q, \quad \eta = b + \eta';$$

et on égalerait à $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ le coefficient de $\frac{1}{\xi'^q}$ dans le développement de la fonction (16) suivant les puissances de ξ'.

Les coefficients $A_1, A_2 \ldots . A_\infty$ qui figurent dans les développements (17) et (17') satisfont aux p relations suivantes:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu \frac{\varphi_i^{(\nu-1)}(a, b)}{1.2..(\nu-1)} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots p) \tag{18}$$

$\varphi_i^{(\nu-1)}(x, y)$ désignant la dérivée d'ordre $(\nu - 1)$ de $\varphi_i(x, y)$ par rapport à x. Les relations (18) résultent de ce que les périodes de la fonction (17) sont nulles; on les démontre directement en appliquant le théorème IV, (Remarque I) aux p fonctions

$$f(x, y) \, . \, \varphi_i(x, y), \quad (i = 1, 2, \ldots . p).$$

11. Les considérations employées dans le paragraphe précédent permettent d'obtenir de la même façon l'expression la plus générale d'une fonction uniforme du point analytique (x, y) admettant les n points singuliers $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots (a_n, b_n)$. Nous supposerons, pour plus de simplicité, que ces n points sont à distance finie et qu'aucun d'eux ne coincide avec un point critique. Soit $f(x, y)$ la fonction cherchée; dans un certain domaine du point singulier (a_k, b_k), cette fonction est développable en une double série de la forme

$$f(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{A_\nu^{(k)}}{(x - a_k)^\nu}. \tag{19}$$

Considérons la fonction uniforme du point (ξ, η)

$$f(\xi, \eta) \, . \, Z(\xi, \eta). \tag{20}$$

Cette fonction admet comme points singuliers: 1°) les n points (a_k, b_k) comme points singuliers essentiels, 2°) les deux points (x, y) et (x_0, y_0) comme pôles, 3°) les points critiques comme pôles. Le résidu de la fonction (20) relatif au point (a_k, b_k) est

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu^{(k)}}{1.2..(\nu-1)} \cdot Z^{(\nu-1)}(a_k, b_k);$$

les résidus de cette même fonction relatifs aux pôles (x, y) et (x_0, y_0) sont $-f(x, y)$ et $f(x_0, y_0)$; enfin les résidus relatifs aux points critiques sont nuls. Comme on peut appliquer à cette fonction la remarque I du théorème IV, on a la relation

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu^{(k)}}{1.2..(\nu-1)} Z^{(\nu-1)}(a_k, b_k); \tag{21}$$

ce qui donne l'expression cherchée de la fonction $f(x, y)$. On voit que cette expression est de la forme

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{k=n} G_k(x, y \mid a_k, b_k),$$

les fonctions G_k étant des fonctions telles que (17).

Les coefficients $A_\nu^{(k)} \binom{k=1, 2, \dots n}{\nu=1, 2, \dots \infty}$ satisfont aux p relations

$$\sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} \frac{\varphi_i^{(\nu-1)}(a_k, b_k)}{1.2..(\nu-1)} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots p) \tag{22}$$

que l'on obtient en appliquant encore le théorème IV aux p fonctions

$$f(x, y) \cdot \varphi_i(x, y), \quad (i = 1, 2, \dots p).$$

12. L'on peut généraliser les théorèmes exposés dans les § 2 et 3 de la façon suivante.

Voici d'abord la généralisation du théorème de Cauchy sur le développement d'une fonction de x holomorphe dans l'intérieur d'un cercle de centre a en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de $(x-a)$.

Théorème V. *Soit (a, b) un point non critique et δ un nombre positif tel que dans le domaine δ du point (a, b) il n'y ait pas de point critique;*

soit de plus $f(x, y)$ une fonction du point analytique (x, y) uniforme et régulière en tous les points analytiques situés **en dehors** *du domaine δ du point (a, b). Cette fonction est développable en une série de la forme*

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu Z^{(\nu-1)}(a, b) \tag{23}$$

convergente en tous les points analytiques extérieurs au domaine δ.

En effet, soient (x, y) et (x_0, y_0) deux points analytiques situés à l'extérieur du domaine δ du point (a, b); considérons un domaine ρ du point (x, y) et un domaine ρ_0 du point (x_0, y_0) n'empiétant pas l'un sur l'autre ni sur δ et ne contenant pas de points critiques. L'on a l'équation

$$\int_\rho f(\xi, \eta) \,.\, Z(\xi, \eta) d\xi + \int_{\rho_0} f(\xi, \eta) \,.\, Z(\xi, \eta) d\xi + \int_\delta f(\xi, \eta) \,.\, Z(\xi, \eta) d\xi = 0, \tag{24}$$

les indices ρ, ρ_0, δ indiquant que les intégrales qui en sont affectées sont prises dans le sens positif sur les circonférences limitant les domaines ρ, ρ_0 et δ. Pour démontrer l'équation (24) traçons dans le plan des x les lacets de première espèce et les m circuits. (Voir Briot et Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques, p. 180, fig. 58.) Nous pouvons toujours tracer ces lacets et ces circuits de façon qu'ils ne pénètrent pas dans les domaines ρ, ρ_0, δ, et que ces trois domaines soient dans l'intérieur de la circonférence des circuits. Cela posé, prenons l'intégrale

$$\int f(\xi, \eta) Z(\xi, \eta) d\xi \tag{25}$$

sur le contour fermé constitué par la droite ol, la circonférence du circuit dans le sens positif (le sens de la flèche sur la fig. 58), la droite lo, et enfin la suite des lacets $\ldots a_4, a_3, a_2, a_1$ jusqu'au point 0. Comme on peut parcourir ce contour fermé en prenant successivement au départ chacune des m racines $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ correspondant à la valeur initiale de ξ, l'on obtient m valeurs de l'intégrale (25) sur le contour indiqué; je dis que la somme de ces m valeurs est nulle. D'abord, dans chaque intégrale, la partie relative à la circonférence du circuit est nulle, car à l'extérieur de cette circonférence chacune des branches de la fonction intégrée est holomorphe et développable en une série convergente de la forme

$$\sum_{\nu=2}^{\nu=\infty} \lambda_\nu \cdot \frac{1}{\xi^\nu};$$

puis, les portions d'intégrale relatives aux droites *ol* et *lo* se détruisent. Il reste donc à montrer que la somme des intégrales prises sur les lacets est nulle; or cela résulte de ce que la somme des q intégrales relatives aux q lacets d'un systéme circulaire de q racines se permutant autour d'un point critique est égale à zéro. (La démonstration est la même que celle que donnent M.M. Briot et Bouquet pour l'intégrale d'une fonction rationnelle, voir Théorie des fonctions elliptiques p. 174.) Il est d'ailleurs évident que la somme des m valeurs considérées de l'intégrale (25) est égale au premier membre de l'équation (24); donc ce premier membre est nul, et la relation (24) est démontrée. La première des intégrales (24) est égale à

$$-2\pi i f(x, y),$$

la deuxième à

$$+2\pi i f(x_0, y_0).$$

On a donc l'équation

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_\delta f(\xi, \eta) Z(\xi, \eta) d\xi, \tag{26}$$

qui est une équation fondamentale pour la théorie des fonctions d'un point analytique. Dans le cas présent la fonction $Z(\xi, \eta)$ du point (ξ, η) est une fonction holomorphe de ξ dans un domaine $\delta' > \delta$ du point (a, b); elle est donc développable dans ce domaine en une série uniformément convergente par la formule de Mac-Laurin

$$Z(\xi, \eta) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(\xi - a)^\nu}{1.2..\nu} \cdot Z^{(\nu)}(a, b). \tag{27}$$

Portant ce développement (27) dans la formule (26) on a la formule a démontrer (23) dans laquelle

$$A_\nu = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{1.2..(\nu-1)} \cdot \int_\delta (\xi - a)^{\nu-1} f(\xi, \eta) d\xi. \tag{28}$$

13. Le théoréme V démontré dans le § précédent peut être généralisé de la façon suivante,

Théorème VI. *Soient* (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... (a_n, b_n) *des points non critiques et* δ_1, δ_2, ... δ_n *des nombres positifs tels que, dans le domaine* δ_k *du point* (a_k, b_k), *il n'y ait pas de point critique; soit de plus* $f(x, y)$ *une fonction du point analytique* (x, y) *uniforme et régulière en tous les points analytiques* ***situés à la fois en dehors*** *de tous les domaines* δ_k *des points* (a_k, b_k). *Cette fonction est développable en une série de la forme*

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} Z^{(\nu-1)}(a_k, b_k) \tag{29}$$

convergente en tous les points analytiques extérieurs à. la fois à tous les domaines δ_k.

La démonstration de ce théorème est en tout semblable à la précédente et repose sur l'équation

$$\int_P f(\xi, \eta) Z(\xi, \eta) d\xi + \int_{P_0} f(\xi, \eta) Z(\xi, \eta) d\xi + \sum_{k=1}^{k=n} \int_{\delta_k} f(\xi, \eta) Z(\xi, \eta) d\xi = 0 \tag{30}$$

qui est analogue à l'équation (24) et que l'on établit de la même façon.

Ces développements en série conduisent, pour les fonctions d'un point analytique (x, y) à des conséquences analogues à celles que j'ai indiquées pour les fonctions d'une variable x. (Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris, Séance du 1^er^ Mai 1882.) Je me réserve d'étudier cette question dans une autre circonstance.

14. *Fonctions ayant une infinité de points singuliers.* — Voici, pour ces fonctions, la généralisation du théorème de M. Mittag-Leffler.

Théorème VII. *Soient une suite de points analytiques tous différents*

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots . (a_\nu, b_\nu), \ldots .$$

tels que

$$\lim (a_\nu, b_\nu) = (a, b), \; (\nu = \infty);$$

soient, d'autre part

$$f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots . f_\nu(x, y), \ldots .$$

une suite de fonctions rationnelles de x *et* y *ne devenant infinies respectivement qu'aux deux points* (a_ν, b_ν) *et* (a, b); *il existe une fonction uniforme* $\Phi(x, y)$ *du point analytique* (x, y) *n'ayant d'autre point singulier essentiel que le point* (a, b) *et admettant pour pôles les points* (a_ν, b_ν) *de telle façon que la différence*

$$\Phi(x, y) - f_\nu(x, y)$$

soit régulière au point (a_ν, b_ν). [1]

Supposons que le point (a, b) *ne coïncide pas* avec un point critique. Soit ε un nombre réel positif moindre que l'unité, et δ un nombre positif tel que dans le domaine δ du point (a, b) il n'y ait ni un point critique, ni le point initial arbitraire (x_0, y_0) limite inférieure des intégrales Z.

Les points (a_ν, b_ν) situés en dehors du domaine $\varepsilon\delta$ du point (a, b) sont en nombre fini; parmi ces points se trouvent d'ailleurs les points (a_ν, b_ν) qui coïncident avec des points critiques. Formons la somme des fonctions $f_\nu(x, y)$ en nombre fini correspondant à ces points (a_ν, b_ν) situés en dehors du domaine $\varepsilon\delta$ et désignons cette somme par $\Psi_1(x, y)$.

Considérons maintenant les points (a_ν, b_ν) en nombre infini situés dans le domaine $\varepsilon\delta$ du point (a, b); dans ce qui suit nous désignerons plus spécialement ces points par (a_ν, b_ν) et par $f_\nu(x, y)$ les fonctions rationnelles correspondantes. Nous allons montrer qu'il existe une fonction $\Psi(x, y)$ possédant à l'égard de ces points la propriété indiquée par le théorême. Pour avoir alors la fonction cherchée $\Phi(x, y)$, il suffira de prendre

$$\Phi(x, y) = \Psi_1(x, y) + \Psi(x, y).$$

Avant de commencer la démonstration, il importe d'abord de former l'expression analytique de la fonction rationnelle donnée $f_\nu(x, y)$ qui a un pôle au point (a_ν, b_ν) et un autre pôle au point (a, b). Supposons que le déterminant

$$\Delta(a, b) = \begin{vmatrix} \varphi_1(a, b) & \varphi_1'(a, b) & \varphi_1''(a, b) \dots & \varphi_1^{(p-1)}(a, b) \\ \varphi_2(a, b) & \varphi_2'(a, b) & \varphi_2''(a, b) \dots & \varphi_2^{(p-1)}(a, b) \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \dots & \cdot \\ \varphi_p(a, b) & \varphi_p'(a, b) & \varphi_p''(a, b) \dots & \varphi_p^{(p-1)}(a, b) \end{vmatrix}$$

---

[1] Lors d'une visite que j'ai faite à Berlin au mois de Juillet de l'année 1882, M. WEIERSTRASS m'a appris qu'il était depuis longtemps en possession de ce théorème et d'autres dans le même genre. Un mémoire du grand géomètre sur les fonctions que M. APPELL nomme *fonctions uniformes d'un point analytique*, paraîtra prochainement dans les »Acta».
Le rédacteur en chef.

soit différent de zéro. Dans le domaine du point (a_ν, b_ν) la fonction rationnelle $f_\nu(x, y)$ est développable en une série de la forme

$$f_\nu(x, y) = \frac{A_{n_\nu}^{(\nu)}}{(x-a_\nu)^{n_\nu}} + \frac{A_{n_\nu-1}^{(\nu)}}{(x-a_\nu)^{n_\nu-1}} + \ldots + \frac{A_1^{(\nu)}}{x-a_\nu} + A_0^{(\nu)} + \ldots$$

$A_1^{(\nu)}, A_2^{(\nu)}, \ldots A_{n_\nu}^{(\nu)}$ étant des constantes connues. Posons alors

$$(31) \quad \psi_\nu(x, y \mid \xi, \eta) = A_1^{(\nu)} Z(\xi, \eta) + A_2^{(\nu)} Z'(\xi, \eta) + \ldots + \frac{A_{n_\nu}^{(\nu)}}{1.2..(n_\nu-1)} Z^{(n_\nu-1)}(\xi, \eta)$$
$$+ B_1^{(\nu)} Z(a, b) + B_2^{(\nu)} Z'(a, b) + \ldots + B_p^{(\nu)} Z^{(p-1)}(a, b),$$

les nombres $B_1^{(\nu)}, B_2^{(\nu)}, \ldots B_p^{(\nu)}$ étant déterminés par les p équations du premier degré

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_1^{(\nu)} \varphi_i(a, b) + B_2^{(\nu)} \varphi'_i(a, b) + \ldots + B_p^{(\nu)} \varphi_i^{(p-1)}(a, b) \\ + A_1^{(\nu)} \varphi_i(\xi, \eta) + A_2^{(\nu)} \varphi'_i(\xi\ \eta) + \ldots + \dfrac{A_{n_\nu}^{(\nu)}}{1.2..(n_\nu-1)} \varphi_i^{(n_\nu-1)}(\xi, \eta) = 0 \\ i = 1, 2, \ldots p \end{array} \right.$$

équations qui expriment que la fonction $\psi_\nu(x, y \mid \xi, \eta)$ est rationnelle en x et y. Ces équations (32) donnent pour $B_1^{(\nu)}, B_2^{(\nu)}, \ldots B_p^{(\nu)}$ des expressions linéaires par rapport aux fonctions

$$\varphi_i(\xi, \eta), \quad \varphi'_i(\xi, \eta), \ldots \varphi_i^{(p-1)}(\xi, \eta);$$

ces coefficients $B_1^{(\nu)}, B_2^{(\nu)}, \ldots B_p^{(\nu)}$ sont donc des fonctions rationnelles de (ξ, η) *n'ayant d'autres pôles que les points critiques.* En remplaçant ces coefficients par leurs valeurs dans l'expression (31) on obtient pour $\psi_\nu(x, y \mid \xi, \eta)$ une fonction rationnelle de x et y n'ayant d'autres pôles que les points (ξ, η) et (a, b); cette même fonction $\psi_\nu(x, y \mid \xi, \eta)$ est une fonction rationnelle de (ξ, η) n'ayant d'autres pôles que les points critiques, le point (x, y) et le point (x_0, y_0). La différence

$$f_\nu(x, y) - \psi_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu)$$

est une fonction rationnelle de (x, y) régulière au point (a_ν, b_ν) et n'ayant plus que le pôle (a, b); en désignant cette différence par $g_\nu(x, y)$ nous aurons

$$\psi_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu) = f_\nu(x, y) - g_\nu(x, y).$$

Cela posé, soient

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots . \varepsilon_\nu, \ldots .$$

des nombres positifs dont la somme est finie, et soit (ξ, η) un point situé dans le domaine $\varepsilon\delta$ du point (a, b). Pour toutes les positions du point analytique (x, y) situées en dehors du domaine $\frac{1}{\varepsilon}$ mod $(\xi - a)$ du point (a, b) la fonction $\psi_\nu(x, y \mid \xi, \eta)$ est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $(\xi - a)$. En effet, cette fonction $\psi_\nu(x, y \mid \xi, \eta)$ est une fonction holomorphe de ξ dans le domaine $\varepsilon\delta$ du point (a, b) si le point (x, y) est situé en dehors du domaine δ de ce point, ou dans le domaine ε. mod $(x - a)$ du point (a, b) si le point (x, y) est situé dans le domaine δ de ce point. Donc, si l'on fait, en particulier, $(\xi, \eta) = (a_\nu, b_\nu)$, on voit que, pour toutes les positions du point analytique situées en dehors du domaine $\frac{1}{\varepsilon}$. mod $(a_\nu - a)$ du point (a, b), la fonction $\psi_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu)$ est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $a_\nu - a$. Soit cette série

$$(33) \qquad \psi_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu) = \sum_{m=0}^{m=\infty} (a_\nu - a)^m \cdot \lambda_m^{(\nu)}(x, y);$$

les coefficients $\lambda_m(x, y)$ sont des fonctions rationnelles de x et y admettant le seul pôle (a, b). En effet d'après la série de Taylor

$$\lambda_m^{(\nu)}(x, y) = \frac{1}{1.2\ldots m} \left| \frac{d^m \psi_\nu(x, y \mid \xi, \eta)}{d\xi^m} \right|_{(\xi, \eta) = (a, b)};$$

la dérivée $\frac{d^m \psi_\nu(x, y \mid \xi, \eta)}{d\xi^m}$ est d'après la composition de ψ_ν une fonction rationnelle de (x, y) ayant pour pôles les deux points (ξ, η) et (a, b); donc le coefficient $\lambda_m^{(\nu)}(x, y)$ obtenu en remplaçant dans cette dérivée (ξ, η) par (a, b) n'a plus qu'un pôle, à savoir le point (a, b). Si nous posons

$$(34) \qquad h_\nu(x, y) = \sum_{m=0}^{m=m_\nu} (a_\nu - a)^m \lambda_m^{(\nu)}(x, y)$$

cette fonction $h_\nu(x, y)$ possède la même propriété d'avoir pour seul pôle le point (a, b). En écrivant la série (33)

$$\psi_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu) = h_\nu(x, y) + \sum_{m=m_\nu+1}^{m=\infty} (a_\nu - a)^m \lambda_m^{(\nu)}(x, y)$$

on peut déterminer le nombre m_ν de telle façon que pour toutes les positions du point (x, y) situées en dehors du domaine $\frac{1}{\varepsilon}$ mod $(a_\nu - a)$, le module de

$$\sum_{m=m_\nu+1}^{m=\infty} (a_\nu - a)^m \lambda_m^{(\nu)}(x, y)$$

soit au plus égal à ε_ν. Faisant alors

$$\Phi_\nu(x, y) = \psi_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu) - h_\nu(x, y)$$

$$= f_\nu(x, y) - g_\nu(x, y) - h_\nu(x, y)$$

la série

$$\Psi(x, y) = \sum \Phi_\nu(x, y)$$

est absolument convergente et fournit la fonction cherchée $\Psi(x, y)$.

En effet, soit (x, y) une position quelconque du point (x, y) différente des points (a_ν, b_ν) et du point (a, b). Il existe un entier ν' tel que pour $\nu \geqq \nu'$ le point (x, y) soit constamment situé en dehors du domaine $\frac{1}{\varepsilon}$ mod $(a_\nu - a)$ du point (a, b). Les points (a_ν, b_ν) dont l'indice est moindre que ν' sont en nombre fini, et par suite la somme des fonctions $\Phi_\nu(x, y)$ relatives à ces points est finie; quant aux points (a_ν, b_ν) tels que $\nu \geqq \nu'$ leur nombre est infini, mais, d'après ce qui précède, on a pour tous ces points

$$\text{mod } \Phi_\nu(x, y) \leqq \varepsilon_\nu,$$

et la somme des modules des fonctions $\Phi_\nu(x, y)$ correspondantes est encore finie.

La différence $\Psi(x, y) - f_\nu(x, y)$ est régulière au point (a_ν, b_ν) d'après la forme même des fonctions $\Phi_\nu(x, y)$.

Nous avons supposé plus haut que le déterminant $\Delta(a, b)$ est différent de zéro. Si ce déterminant est nul, on remarque que l'un des déterminants

$$\Delta_k(a, b) = \begin{vmatrix} \varphi_1^{(k)}(a, b) & \varphi_1^{(k+1)}(a, b) \dots & \varphi_1^{(k+p-1)}(a, b) \\ \varphi_2^{(k)}(a, b) & \varphi_2^{(k+1)}(a, b) \dots & \varphi_2^{(k+p-1)}(a, b) \\ \cdot & \cdot \quad \dots & \cdot \\ \varphi_p^{(k)}(a, b) & \varphi_p^{(k+1)}(a, b) \dots & \varphi_p^{(k+p-1)}(a, b) \end{vmatrix}$$

où k prend successivement les valeurs $1, 2, 3 \dots$ etc., est différent de zéro. Car si tous ces déterminants étaient nuls, la fonction rationnelle

$$C_1\varphi_1(x, y) + C_2\varphi_2(x, y) + \dots + C_p\varphi_p(x, y)$$

où $C_1, C_2, \dots C_p$ sont des constantes convenables, s'annulerait au point (a, b) ainsi que *toutes ses dérivées;* ce qui est impossible. Alors si $\Delta_k(a, b) \gtrless 0$, il suffira, dans ce qui précède de remplacer $\psi_\nu(x\, y \mid \xi, \eta)$ par la fonction

$$A_1^{(\nu)}Z(\xi, \eta) + A_2^{(\nu)}Z'(\xi, \eta) + \dots + \frac{A_{n_\nu}^{(\nu)}}{1.2..(n_\nu - 1)} Z^{(n_\nu - 1)}(\xi, \eta)$$

$$+ E_1^{(\nu)}Z^{(k)}(a, b) + E_2^{(\nu)}Z^{(k+1)}(a, b) + \dots + E_p^{(\nu)}Z^{(k+p-1)}(a, b);$$

la suite du raisonnement est identique.

15. Dans un prochain mémoire j'indiquerai la décomposition en facteurs primaires d'une fonction uniforme du point (x, y) ayant un seul point singulier essentiel et n'ayant pas de pôles. J'indiquerai en même temps quelques théorêmes sur les fonctions uniformes doublement périodiques à points singuliers essentiels, théorêmes qui se déduisent des précédents dans le cas de $p = 1$. (Voir au sujet des fonctions doublement périodiques à points singuliers essentiels une Note de M. Picard, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, tome LXXXIX p. 852, et une Note que j'ai publiée récemment dans les Comptes Rendus de la Séance du 3 Avril 1882.)

Klingenthal 2 Septembre 1882.