SUR LES FONCTIONS UNIFORMES D'UN POINT ANALYTIQUE (x, y). (SECOND MÉMOIRE).

PAR

P. APPELL,

Maître de conférences à l'Ecole Normale.

Le présent mémoire constitue la suite d'un travail publié précédemment sous le même titre dans ce Journal. Il contient la décomposition en facteurs primaires d'une fonction uniforme d'un point analytique (x, y) ayant un seul point singulier essentiel, et une théorie des fonctions doublement périodiques avec des points singuliers essentiels. Je conserverai dans ce mémoire les notations employées dans le premier.

I. *Décomposition en facteurs primaires.*

Soient une suite de points analytiques tous différents

$$(a_1,\ b_1),\ (a_2,\ b_2),\ \ldots\ (a_\nu,\ b_\nu),\ \ldots$$

tels que

$$\text{limite } (a_\nu,\ b_\nu) = (a,\ b) \text{ pour } \nu = \infty,$$

et une suite de nombres positifs entiers

$$m_1,\ m_2,\ \ldots\ m_\nu,\ \ldots;$$

l'on peut former une fonction uniforme du point analytique (x, y) admettant pour point singulier essentiel le point (a, b) et pour zéros les points (a_ν, b^ν) aux degrés de multiplicité m_ν. $(\nu = 1, 2, \ldots \infty)$.

Pour le démontrer, supposons que le point (a, b) ne soit pas un point critique de la fonction algébrique y de x et que le déterminant

$$\Delta(a, b) = \begin{vmatrix} \varphi_1(a, b) & \varphi'_1(a, b) & \dots & \varphi_1^{(p-1)}(a, b) \\ \varphi_2(a, b) & \varphi'_2(a, b) & \dots & \varphi_2^{(p-1)}(a, b) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \varphi_p(a, b) & \varphi'_p(a, b) & \dots & \varphi_p^{(p-1)}(a, b) \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. Considérons la fonction

$$\text{(1)} \qquad \omega_\nu(x, y \mid \xi, \eta) = \begin{bmatrix} \xi, & \eta \\ a, & b \end{bmatrix}^{m_\nu} e^{\lambda_1 Z(a, b) + \lambda_2 Z'(a, b) + \dots + \lambda_p Z^{(p-1)}(a, b)}$$

où l'on désigne par le symbole $\begin{bmatrix} \xi, & \eta \\ a, & b \end{bmatrix}$ l'expression

$$\text{(2)} \qquad \begin{bmatrix} \xi, & \eta \\ a, & b \end{bmatrix} = \frac{\Theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]}{\Theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(a, b) + h_i]} \cdot \frac{\Theta[-u^{(i)}(a, b) + h_i]}{\Theta[-u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]} = e^{\Pi^{(\xi, \eta)}_{(a, b)}}.$$

Dans cette fonction (1) déterminons les coefficients $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_p$ de telle façon que $\omega_\nu(x, y)$ soit une fonction uniforme du point (x, y). Pour cela il suffit d'écrire que cette fonction ne change pas quand le point (x, y) décrit les p cycles correspondant aux p périodes de l'intégrale de deuxième espèce $Z(a, b)$. On a ainsi les p équations

$$\text{(3)} \qquad m_\nu[u^{(i)}(\xi, \eta) - u^{(i)}(a, b)] + \lambda_1 \varphi_i(a, b) + \lambda_2 \varphi'_i(a, b) + \dots + \lambda_p \varphi_i^{(p-1)}(a, b) = 0$$
$$(i = 1, 2, \dots p).$$

Déterminons $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ en fonction de (ξ, η) par ces équations (3); si l'on substitue les valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ ainsi obtenues dans la fonction (1), cette fonction devient une fonction uniforme du point (x, y) qui admet un seul zéro à savoir le point (ξ, η) et un seul point singulier à savoir le point singulier essentiel (a, b).

Cela posé, soit δ un nombre positif tel que dans le domaine δ du point (a, b) il n'y ait ni le point initial (x_0, y_0) limite inférieure des intégrales $u^{(i)}(x, y)$, ni un point critique de la fonction algébrique y de x. Désignons par ε un nombre positif plus petit que l'unité; les points

(a_ν, b_ν) qui sont situés en dehors du domaine $\varepsilon\delta$ du point (a, b) sont en nombre fini; formons le produit des facteurs $\omega_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu)$ correspondant à ces points (a_ν, b_ν) situés hors du domaine $\varepsilon\delta$, et désignons ce produit par $\Pi_1(x, y)$. Portons maintenant notre attention sur les points (a_ν, b_ν) qui sont situés dans le domaine $\varepsilon\delta$ du point (a, b) et qui sont en nombre infini; dans ce qui suit nous désignerons plus specialement ces points par (a_ν, b_ν). Pour toutes les positions du point (x, y) situées en dehors du domaine

$$\frac{1}{\varepsilon} \bmod (a_\nu - a),$$

la fonction

$$\operatorname{Log} \omega_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu)$$

est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances positives croissantes de $(a_\nu - a)$:

$$\operatorname{Log} \omega_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu) = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} (a_\nu - a)^\mu \rho_\mu^{(\nu)}(x, y). \tag{4}$$

En effet si le point (x, y) est en dehors du domaine δ de (a, b), la fonction $\operatorname{Log} \omega_\nu(x, y \mid \xi, \eta)$ est une fonction holomorphe de ξ dans le domaine δ; et si le point (x, y) est dans le domaine δ, cette même fonction est une fonction holomorphe de ξ dans le domaine $\varepsilon. \bmod (x - a)$ du point (a, b). Désignons par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots . \varepsilon_\nu \ldots .$ des nombres positifs dont la somme est finie; on pourra, d'après ce qui précède, déterminer un entier l_ν tel que le module de la somme

$$\sum_{\mu=l_\nu+1}^{\mu=\infty} (a_\nu - a)^\mu \rho_\mu^{(\nu)}(x, y) \tag{5}$$

soit au plus égal à ε_ν pour toutes les positions du point (x, y) situées en dehors du domaine $\dfrac{1}{\varepsilon} \bmod (a_\nu - a)$ du point (a, b). Faisant alors

$$\chi_\nu(x, y) = \sum_{\mu=0}^{\mu=l_\nu} (a_\nu - a)^\mu \rho_\mu^{(\nu)}(x, y) \tag{6}$$

on voit que le produit

$$(7) \qquad \Pi_2(x, y) = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \omega_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu) \,.\, e^{-\chi_\nu(x, y)}$$

est convergent pour toutes les positions du point (x, y) distinctes du point (a, b). En effet, écrivons ce produit de la façon suivante

$$(8) \qquad \Pi_2(x, y) = e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=\infty} \mathrm{Log}\ \omega_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu) - \chi_\nu(x, y)};$$

soit (x, y) un point analytique distinct de (a, b). Il existe un entier ν' tel que pour $\nu \geqq \nu'$ le point (x, y) soit en dehors du domaine $\frac{1}{\varepsilon}$ mod $(a_\nu - a)$ du point $(a\ b)$. Alors partageons la somme qui figure en exposant dans le second membre de (8) en deux parties: la première composée des termes dans lesquels $\nu < \nu'$, la seconde de ceux dans lesquels $\nu \geqq \nu'$. La première somme est finie comme composée d'un nombre fini de termes et la seconde est finie également, car pour $\nu \geqq \nu'$ on a

$$\mathrm{mod}\ [\ \mathrm{Log}\ \omega_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu) - \chi_\nu(x, y)] \leqq \varepsilon_\nu.$$

La convergence du produit (7) est donc démontrée. Remarquons de plus que la fonction $\chi_\nu(x, y)$ est une fonction *rationnelle* de x et y n'ayant d'autre pôle que le point (a, b). En effet on a, dans le développement (4),

$$\rho_\mu^{(\nu)}(x, y) = \frac{1}{1.2..\mu}\left[\frac{d^\mu\ \mathrm{Log}\ \omega_\nu(x, y \mid \xi, \eta)}{d\xi^\mu}\right]_{(\xi,\ \eta) = (a,\ b)},$$

et les dérivées successives de la fonction

$$\mathrm{Log}\ \omega_\nu(x, y \mid \xi, \eta)$$

par rapport au paramètre ξ sont des fonctions rationnelles de (x, y) ayant les deux seuls pôles (ξ, η) et (a, b). Comme pour obtenir $\rho_\mu(x, y)$ il faut remplacer, dans ces dérivées, (ξ, η) par (a, b), les coefficients $\rho_\mu(x, y)$ sont des fonctions rationelles ayant le seul pôle (a, b); il en est donc de même de la fonction $\chi_\nu(x, y)$. Le produit (7) définit donc une fonction uniforme $\Pi_2(x, y)$ du point analytique (x, y) possédant à l'égard des points (a_ν, b_ν) situés dans le domaine $\varepsilon\delta$ du point (a, b) les propriétés indiquées dans l'énoncé. La fonction

$$\Pi(x, y) = \Pi_1(x, y)\Pi_2(x, y)$$

est la fonction cherchée.

La fonction la plus générale possédant les propriétés indiquées dans l'énoncé est

$$\Pi(x, y) \, . \, e^{G(x, y \mid a, b)}$$

où $G(x, y \mid a, b)$ est une fonction uniforme du point (x, y) n'ayant d'autre point singulier que (a, b).

Remarque. Si le déterminant $\Delta(a, b)$ est nul, l'on pourra lever la difficulté comme on l'a déjà fait dans la généralisation du théorême de M. Mittag-Leffler exposée dans le premier mémoire. Il suffira de remplacer la fonction qui est en exposant dans l'équation (1) par

$$\lambda_1 Z^{(k)}(a, b) + \lambda_2 Z^{(k+1)}(a, b) + \ldots . + \lambda_p Z^{(k+p-1)}(a, b)$$

où k désigne un entier convenablement déterminé. La suite de la démonstration est la même que plus haut.

II. *Sur les fonctions uniformes doublement périodiques à points singuliers essentiels.*

Les théorêmes généraux sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y) conduisent, dans le cas particulier où le genre p est égal à l'unité, à des théorêmes sur les fonctions uniformes doublement périodiques. Je vais indiquer, pour ces fonctions, les principaux théorêmes analogues à ceux que j'ai exposés dans les recherches précédentes sur les fonctions uniformes d'un point analytique. Je supposerai que les fonctions uniformes dont je vais m'occuper admettent les deux périodes ω et ω'; en désignant par $\theta_1(u)$ la fonction θ_1 formée avec ces périodes, je poserai, avec M. Hermite,

$$Z(u) = \frac{d \log \theta_1(u)}{du}$$

et

$$Z^{(\nu)}(u) = \frac{d^\nu Z(u)}{du^\nu}.$$

Fonctions ayant dans un parallélogramme des périodes un nombre fini de points singuliers.

Soit $f(u)$ une fonction uniforme doublement périodique, ayant dans un parallélogramme des périodes un nombre fini de points singuliers.

Théorème I. *La somme des résidus de $f(u)$ relatifs aux points singuliers situés dans un même parallélogramme des périodes est égale à zéro.*

En effet l'intégrale

$$\int f(u)du$$

prise sur le contour du parallélogramme est égale à zéro en vertu des relations

$$f(u + \omega) = f(u), \qquad f(u + \omega') = f(u).$$

Remarque. Soit en particulier $f(u)$ une fonction uniforme doublement périodique n'ayant dans un parallélogramme des périodes d'autres points singuliers que des pôles. La décomposition de cette fonction en éléments simples par la formule de M. Hermite résulte de l'application du théorème I à la fonction doublement périodique de u

$$f(u)[Z(u - x) - Z(u - x_0)],$$

x et x_0 étant deux points quelconques pris dans l'intérieur d'un parallélogramme des périodes.

II. *Expression générale d'une fonction uniforme doublement périodique $f(u)$ n'ayant, dans un parallélogramme des périodes, qu'un point singulier a.*

Dans un certain domaine du point a, la fonction $f(u)$ est représentée par une série de la forme

$$f(u) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{A_{\nu-1}}{(x - a)^\nu}, \tag{9}$$

où $A_0 = 0$ en vertu du théorème I.

Soient x et x_0 deux points situés dans le parallélogramme des périodes; considérons la fonction de u

$$f(u)\,[Z(u - x) - Z(u - x_0)]; \tag{10}$$

cette fonction est une fonction uniforme doublement périodique de u ayant, dans le parallélogramme des périodes, les trois points singuliers a, x et x_0. Le premier point $u = a$ est un point singulier essentiel, et le résidu relatif à ce point est

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1.2..\nu} [Z^{(\nu)}(a-x) - Z^{(\nu)}(a-x_0)];$$

les deux autres points $u = x$ et $u = x_0$ sont des pôles de résidus respectifs $f(x)$ et $-f(x_0)$. On a donc, d'après le théorème I

$$(11) \qquad f(x) = f(x_0) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1.2..\nu} [Z^{(\nu)}(a-x) - Z^{(\nu)}(a-x_0)].$$

En posant pour simplifier

$$C = f(x_0) - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1.2..\nu} Z^{(\nu)}(a-x_0)$$

on a

$$(12) \qquad f(x) = C + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1.2..\nu} Z^{(\nu)}(a-x).$$

Telle est l'expression cherchée.

On obtiendra de même l'expression la plus générale d'une fonction uniforme doublement périodique $f(u)$ ayant, dans un parallélogramme des périodes n points singuliers $a_1, a_2, \ldots . a_n$. Il suffit, pour cela, d'appliquer le théorème I à la fonction (10). On obtient ainsi, pour la fonction cherchée, l'expression

$$(13) \qquad f(x) = f(x_0) + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{A_\nu^{(k)}}{1.2..\nu} [Z^{(\nu)}(a_k - x) - Z^{(\nu)}(a_k - x_0)]$$

avec

$$A_0^{(1)} + A_0^{(2)} + \ldots . + A_0^{(n)} = 0.$$

Fonctions doublement périodiques ayant dans un parallélogramme des périodes une infinité de points singuliers ou présentant des lacunes.

III. Soit un parallélogramme formé avec les périodes ω, ω', et, dans l'intérieur de ce parallélogramme, un contour fermé C formé d'une ou plusieurs courbes fermées. Appelons espace E la portion du plan située à l'intérieur du parallélogramme et à l'extérieur du contour C. Désignons par $f(u)$ une fonction holomorphe dans l'espace E et admettant les deux périodes ω, ω', c'est à dire reprenant les mêmes valeurs aux points homologues des côtés opposés du parallélogramme; enfin soient x et x_0 deux points de l'espace E. L'intégrale

$$\int f(u)[Z(u-x) - Z(u-x_0)]\,du \tag{14}$$

prise sur le contour du parallélogramme des périodes est égale à zéro, car la fonction de u soumise à l'intégration est doublement périodique. D'autre part cette intégrale (14) se réduit à la somme de trois intégrales, l'une prise le long d'une petite circonférence entourant le point x, l'autre le long d'une petite circonférence entourant x_0 et la troisième prise le long du contour C. La première de ces intégrales est $2\pi i f(x)$, la seconde $-2\pi i f(x_0)$; on a donc

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(u)[Z(u-x) - Z(u-x_0)]\,du, \tag{15}$$

l'indice C indiquant que l'intégrale est prise sur le contour C.

Cette équation (15) définit ainsi la fonction $f(x)$ dans l'espace E et dans les espaces homologues au moyen des valeurs que prend cette fonction sur le contour C.

IV. Pour faire une application de la relation (15) supposons que le contour C soit obtenu de la façon suivante. Considérons n cercles $C_1, C_2, \ldots . C_n$ situés à *l'intérieur* du parallélogramme des périodes et ayant pour centres les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_n$. Prenons pour espace E la portion du plan située à l'intérieur du parallélogramme et à l'extérieur de ces cercles; le contour C sera alors formé d'arcs de cercles appartenant aux circonférences $C_1, C_2, \ldots . C_n$. En désignant par $f(u)$ une fonction doublement périodique holomorphe dans l'espace E, on a, pour cette fonction, l'équation (15). Or l'intégrale qui figure dans cette équation se partage en une somme de n intégrales prises respectivement sur les arcs des cercles $C_1, C_2, \ldots . C_n$ qui constituent le contour C:

(16)
$$\int\limits_C f(u)[Z(u-x)-Z(u-x_0)]\,du$$
$$=\sum_{k=1}^{k=n}\int\limits_{C_k} f(u)[Z(u-x)-Z(u-x_0)]\,du,$$

l'indice C_k indiquant que l'intégrale affectée de cet indice est prise sur les arcs du cercle C_k qui font partie du contour C. Prenons en particulier l'intégrale

(17)
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k} f(u)[Z(u-x)-Z(u-x_0)]\,du;$$

la fonction de u, $Z(u-x)-Z(u-x_0)$, est holomorphe dans un cercle de centre a_k et de rayon supérieur au rayon du cercle C_k. Cette fonction est donc, pour les valeurs de u qui figurent dans l'intégrale (17), développable en une série uniformément convergente

(18)
$$Z(u-x)-Z(u-x_0)=\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{(u-a_k)^\nu}{1.2..\nu}[Z^{(\nu)}(a_k-x)-Z^{(\nu)}(a_k-x_0)].$$

Portant ce développement dans l'intégrale (17) on voit que cette intégrale devient égale à

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)}[Z^{(\nu)}(a_k-x)-Z^{(\nu)}(a_k-x_0)]$$

où

(19)
$$A_\nu^{(k)}=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{1.2..\nu}\int\limits_{C_k}(u-a_k)^\nu f(u)\,du$$

Donc enfin on a, d'après les relations (15) et (16),

(20)
$$f(x)-f(x_0)=\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}A_\nu^{(k)}[Z^{(\nu)}(a_k-x)-Z^{(\nu)}(a_k-x_0)],$$

ou en posant:

$$A = f(x_0) - \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} Z^{(\nu)}(a_k - x_0)$$

(21) $$f(x) = A + \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} Z^{(\nu)}(a_k - x).$$

Remarque I. La somme

$$A_0^{(1)} + A_0^{(2)} + \ldots . + A_0^{(n)}$$

est nulle, car cette somme est égale à

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(u)\, du.$$

Remarque II. Si l'on suppose que le nombre $n = 1$, on voit que toute fonction doublement périodique $f(u)$ holomorphe dans l'espace situé à l'intérieur du parallélogramme des périodes et à l'extérieur d'un cercle de centre α compris dans ce parallélogramme, est représentée dans cet espace par la série

(22) $$f(u) = A + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu Z^{(\nu)}(a - x).$$

V. *Généralisation du théorême de M. Mittag-Leffler.*

Soient a_1, a_2, ... a_ν, ... des points tous différents situés dans un parallélogramme des périodes et tels que, pour $\nu = \infty$, $\lim a_\nu = a$; soient en outre $f_1(x, a_1)$, $f_2(x, a_2)$ .... $f_\nu(x, a_\nu)$, ... des fonctions méromorphes doublement périodiques ayant respectivement pour pôles dans le parallélogramme les seuls points a_ν et a; il existe une fonction uniforme doublement périodique $F(x)$ admettant le point a pour point singulier essentiel et les points a_ν pour pôles, de telle façon que la différence $F(x) - f_\nu(x, a_\nu)$ soit régulière au point a_ν.

La fonction $f_\nu(x, a_\nu)$ est de la forme

$$f_\nu(x, a_\nu) = \sum_{k=0}^{k=n_\nu} A_k^{(\nu)} Z^{(k)}(x - a_\nu) + \sum_{k=0}^{k=n'_\nu} B_k^{(\nu)} Z^{(k)}(x - a)$$

avec

$$A_0^{(\nu)} + B_0^{(\nu)} = 0.$$

La démonstration du théorème repose sur ce fait que, pour toutes les valeurs de x telles que

$$\operatorname{mod} \frac{a_\nu - a}{x - a} < \varepsilon, \qquad \varepsilon < 1,$$

la fonction $f_\nu(x, a_\nu)$ est développable en série suivant les puissances croissantes de $(a_\nu - a)$:

$$f_\nu(x, a_\nu) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(a_\nu - a)^m}{1.2..m} \left[\frac{d^m f_\nu(x, a_\nu)}{da_\nu^m}\right]_{a_\nu = a}$$

On en conclut que l'on peut prendre dans le développement précédent un nombre m_ν de termes assez grand pour que, en posant

$$F_\nu(x) = f_\nu(x, a_\nu) - \sum_{m=0}^{m=m_\nu} \frac{(a_\nu - a)^m}{1.2..m} \left[\frac{d^m f_\nu(x, a_\nu)}{da_\nu^m}\right]_{a_\nu = a}$$

la série $F(x) = \sum F_\nu(x)$ soit absolument convergente dans le voisinage de tout point x_0 distinct des points a_ν. Cette fonction $F(x)$ est la fonction demandée. La fonction la plus générale possédant les propriétés indiquées dans l'énoncé est

$$F(x) + G(x \mid a)$$

où $G(x \mid a)$ désigne une fonction uniforme doublement périodique n'ayant dans un parallélogramme des périodes que le point singulier a.

VI. *Décomposition en facteurs primaires.*

On déduit du théorème précédent la formation d'une fonction uniforme doublement périodique $\Phi(x)$ admettant les points a_ν pour zéros de degrés n_ν, $(\nu = 1, 2 \ldots . \infty)$, n'ayant pas de pôles et admettant le point a pour point singulier essentiel. Si l'on pose

$$p_\nu(x, a_\nu) = \left[\frac{\theta_1(x - a_\nu)}{\theta_1(x - a)}\right]^{n_\nu} e^{n_\nu (a_\nu - a) Z(x-a)},$$

la fonction $\Phi(x)$ sera de la forme

$$\Phi(x) = A \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} p_\nu(x, a_\nu) \, . \, e^{-n_\nu \sum\limits_{m=1}^{m=m_\nu} \frac{(a - a_\nu)^{m+1}}{1.2..(m+1)} Z^{(m)}(x-a)}$$

les entiers m_ν étant convenablement choisis. Pour le démontrer, il suffit d'appliquer le théorème V à la fonction $\frac{d \log \Phi(x)}{dx}$ en prenant

$$f_\nu(x, a_\nu) = \frac{d \log p_\nu(x, a_\nu)}{dx}.$$

VII. L'on voit que, dans cette théorie des fonctions doublement périodiques, la fonction élémentaire analogue à

$$\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi - x_0}$$

dans la théorie des fonctions uniformes d'une variable et à $Z(\xi, \eta)$ dans la théorie des fonctions uniformes d'un point analytique est

$$Z(u - x) - Z(u - x_0).$$

De même que $Z(\xi, \eta)$ est une fonction *rationnelle* de ξ et η admettant les deux pôles (x, y), $(x_0\ y_0)$ avec les résidus respectifs -1 et $+1$, cette fonction $Z(u - x) - Z(u - x_0)$ est une fonction *doublement périodique* de u admettant les deux pôles x et x_0 avec les résidus $+1$ et -1. Le théorème exprimé par l'équation (15) est analogue à un théorème de Cauchy ainsi énoncé: si une fonction $f(x)$ est holomorphe à *l'extérieur* d'une courbe fermée C, on a

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\xi) \left[\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi - x_0} \right] d\xi.$$

Le théorème énoncé dans la Remarque II du N° IV est analogue à un théorème de Cauchy ainsi modifié: si une fonction $f(x)$ est holomorphe en tous les points situés à *l'extérieur* d'un cercle de centre a, cette fonction est, pour tous ces points, représentée par le développement

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu \frac{d^\nu \left[\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a-x_0}\right]}{da^\nu}.$$

J'ai indiqué ces analogies dans une Note présentée à l'Académie des Sciences de Paris le 9 octobre 1882. Il me reste à ajouter que mon illustre maître M. Hermite dans ses *Leçons à la Faculté des Sciences de Paris* 1882 rédigées par M. Andoyer a donné une méthode très-simple pour l'étude des fonctions doublement périodiques à points singuliers essentiels.