SUR UNE CLASSE DE GROUPES DISCONTINUS DE SUBSTITUTIONS LINÉAIRES ET SUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES RESTANT INVARIABLES PAR CES SUBSTITUTIONS

PAR

EMILE PICARD

à PARIS.

La théorie des fonctions elliptiques a donné le premier exemple d'une fonction uniforme d'une variable ne changeant pas pour un groupe d'une infinité de substitutions linéaires non permutables faites sur cette variable: je veux parler de la fonction modulaire, c'est à dire du module considéré comme fonction du rapport des périodes, fonction étudiée, comme on sait, pour la première fois par M. Hermite; des fonctions d'une variable se reproduisant pour un groupe d'une infinité de substitutions linéaires, ont été depuis l'objet de divers travaux, et, dans des recherches récentes, M. Poincaré a traité cette question dans toute sa généralité, en développant son admirable théorie des fonctions fuchsiennes.

Je me suis depuis longtemps proposé le problème de la recherche de fonctions de deux variables indépendantes qui puissent être considérées comme les analogues des fonctions elliptiques modulaires. On reconnait facilement que la théorie des fonctions abéliennes n'est pas susceptible, d'une manière générale, de conduire à des fonctions de plusieurs variables entièrement analogues aux fonctions modulaires. Prend-on, par exemple, les fonctions abéliennes du premier genre: elles conduisent à un système de trois modules, fonctions de trois variables indépendantes, dont les propriétés ont été étudiées par M. HERMITE dans ses belles recherches sur la transformation des fonctions abéliennes (Comptes Rendus, 1855). Ces fonctions se reproduisent bien pour un groupe d'une infinité de substitutions faites sur les variables; mais ici ces substitutions ne sont plus linéaires. Ainsi donc, laissant nécessairement de deux côtés le cas de deux variables, on passe immédiatement à des fonctions de trois variables, et la forme linéaire des substitutions a disparu. C'est en étudiant un cas particulier des fonctions abéliennes du second genre (correspondant à $p = 3$) que j'ai trouvé l'extension cherchée. L'étude du groupe discontinu particulier correspondant à ces nouvelles fonctions m'a conduit à une classe étendue de groupes linéaires discontinus pour le cas de deux variables; c'est à l'étude de ces groupes qu'est consacrée cette première étude où je montre aussi qu'il existe des fonctions de deux variables que les substitutions de ces groupes laissent invariables. Dans un autre travail je reviendrai particulièrement sur les fonctions de deux variables analogues aux fonctions modulaires; j'espère pouvoir montrer ensuite que tous ces résultats sont encore susceptibles de généralisations fort étendues, et indiquer l'intérêt que peut présenter la considération des fonctions de cette nature tant pour la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes que pour l'étude des équations linéaires simultanées aux dérivées partielles.

1. Dans un de ses mémoires sur les formes quadratiques, M. HERMITE a étendu la théorie des formes quadratiques binaires, en étudiant les expressions

$$axx_0 + bxy_0 + b_0x_0y + cyy_0$$

les variables x et y sont des quantités complexes dont x_0 et y_0 représentent les conjuguées; les coëfficients extrêmes a et c sont réels et les coëfficients b et b_0 sont des quantités imaginaires conjuguées.

Nous allons considérer ici une forme quadratique ternaire analogue:

$$f(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = axx_0 + a'yy_0 + a''zz_0 + byz_0 + b_0y_0z + b'zx_0 + b'_0z_0x + b''xy_0 + b''_0x_0y$$

les coëfficients a, a', a'' étant réels et les autres coëfficients étant deux à deux conjugués.

Effectuons sur les variables x, y, z la substitution linéaire

$$x = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$$
$$y = \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z$$
$$z = \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z$$

en effectuant en même temps sur x_0, y_0, z_0 la substitution aux coëfficients conjugués

$$x_0 = \alpha_0 X_0 + \beta_0 Y_0 + \gamma_0 Z_0$$
$$y_0 = \alpha'_0 X_0 + \beta'_0 Y_0 + \gamma'_0 Z_0$$
$$z_0 = \alpha''_0 X_0 + \beta''_0 Y_0 + \gamma''_0 Z_0$$

on voit de suite que cette substitution conduit à une transformée de forme toute semblable:

$$AXX_0 + A'YY_0 + A''ZZ_0 + BYZ_0 + B_0 Y_0 Z + B'ZX_0 + B'_0 Z_0 X + B''XY_0 + B''_0 X_0 Y$$

De plus si on pose:

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b'_0 \\ b''_0 & a' & b \\ b' & b_0 & a'' \end{vmatrix}$$

et soit Δ la transformée de δ quand on y remplace les petites lettres par les grandes on aura:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ \alpha'_0 & \beta'_0 & \gamma'_0 \\ \alpha''_0 & \beta''_0 & \gamma''_0 \end{vmatrix} \times \delta$$

Par conséquent l'expression δ jouera ici le rôle d'invariant.

La forme f peut être mise sous une forme particulière. Posons en effet

$$ax + b''_0 y + b'z = u$$
$$(aa' - b''b''_0)y + (ab_0 - b'b'')z = v$$
$$z = w$$

On aura, comme on le reconnait immédiatement

$$(1) \quad f(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{a(aa' - b''b''_0)} [vv_0 + (aa' - b''b''_0)uu_0 + a\delta . ww_0]$$

Nous supposons, bien entendu, que a et $aa' - b''b''_0$ ne sont pas nuls. Les divers coëfficients a, $aa' - b''b''_0$ et δ sont réels. Cette formule, dans le cas où les coëfficients et les variables sont réels, donne évidemment la décomposition de la forme quadratique en une somme de carrés. Cette décomposition de la forme f en une somme de termes de la forme $\varepsilon u u_0$ peut toujours se faire d'ailleurs quand l'invariant δ n'est pas nul et cela de telle manière que u, v et w sont linéairement indépendants; c'est un point entièrement élémentaire sur lequel nous n'insisterons pas et nous garderons la forme précédente en supposant que a et $aa' - b''b''_0$ ne sont pas nuls.

Si $aa' - b''b''_0$ et $a.\delta$ sont positifs, la quantité entre parenthèses sera une somme de quantités positives et la forme f aura par suite un signe invariable: elle sera définie. Dans tous les autres cas la forme sera indéfinie c'est à dire qu'elle sera susceptible de changer de signe.

2. Nous allons supposer maintenant que les coëfficients de la forme f sont des nombres entiers; les coëfficients a, a', a'' seront nécessairement des entiers réels, quant aux coëfficients b, b', b'' ce sont des entiers complexes formés soit avec les racines de l'équation $\alpha^2 + 1 = 0$, soit avec celles de l'équation $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$, c'est à dire les racines cubiques imaginaires de l'unité, soit d'une manière plus générale avec les racines de l'équation du second degré:

$$\lambda a^2 + \mu a + \nu = 0$$

où λ, μ et ν sont des entiers réels pour lesquels on a:

$$\mu^2 - 4\lambda\nu < 0$$

Supposons qu'une substitution:

$$\begin{aligned} x &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z \\ y &= \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z \\ z &= \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z \end{aligned} \tag{2}$$

à coëfficients entiers de la même nature que b, b' et b'' transforme en elle-même la forme f; on en déduit immédiatement une substitution pour u, v, w qui transforme en elle-même la forme:

$$vv_0 + luu_0 + a\delta ww_0 \quad (\text{en posant } l = aa' - b''b''_0)$$

Il suffit pour l'obtenir d'ajoindre aux équations (2) le système:

$$(3)\qquad \begin{aligned} u &= ax + b''_0y + b'z & U &= aX + b''_0Y + b'Z \\ v &= (aa' - b''b''_0)y + (ab_0 - b'b'')z & V &= (aa' - b''b''_0)Y + (ab_0 - b'b'')Z \\ w &= z & W &= Z \end{aligned}$$

Les équations (2) et (3) permettent d'exprimer u, v et w linéairement en U, V et W. Il importe d'examiner quelle sera la nature des coëfficients de cette substitution; ce ne seront plus des entiers, mais en remarquant que le déterminant de la substitution (2) doit nécessairement avoir l'unité pour module, nous voyons que u, v et w s'exprimeront en fonction linéaire de X, Y et Z les coëfficients étant entiers. D'ailleurs si on exprime X, Y et Z en fonction de U, V et W les coëfficients seront des nombres fractionnaires dont le dénominateur sera un diviseur de al.

Nous avons donc une substitution:

$$(4)\qquad \begin{aligned} u &= M_1U + P_1V + R_1W, \\ v &= M_2U + P_2V + R_2W, \\ w &= M_3U + P_3V + R_3W, \end{aligned}$$

les coëfficients étant des fractions dont le dénominateur divise al.

3. Ecrivons d'une manière générale la forme en u, v et w de la manière suivante:

$$\alpha uu_0 + \beta vv_0 + \gamma ww_0$$

où α, β et γ sont des entiers réels dont aucun n'est nul. Les substitutions (4) transformant cette expression en elle-même, on aura les relations:

$$(5)\qquad \begin{aligned} \alpha M_1\mu_1 + \beta M_2\mu_2 + \gamma M_3\mu_3 &= \alpha \\ \alpha P_1\pi_1 + \beta P_2\pi_2 + \gamma P_3\pi_3 &= \beta \\ \alpha R_1\rho_1 + \beta R_2\rho_2 + \gamma R_3\rho_3 &= \gamma \\ \alpha P_1\mu_1 + \beta P_2\mu_2 + \gamma P_3\mu_3 &= 0 \\ \alpha M_1\rho_1 + \beta M_2\rho_2 + \gamma M_3\rho_3 &= 0 \\ \alpha P_1\rho_1 + \beta P_2\rho_2 + \gamma P_3\rho_3 &= 0 \end{aligned}$$

où les lettres grecques désignent les conjuguées des grandes lettres correspondantes. En tenant compte des relations (5) les équations (4) se résolvent immédiatement par rapport à U, V et W; on trouve ainsi

$$U\alpha = \alpha\mu_1 u + \beta\mu_2 v + \gamma\mu_3 w$$
$$V\beta = \alpha\pi_1 u + \beta\pi_2 v + \gamma\pi_3 w$$
$$W\gamma = \alpha\rho_1 u + \beta\rho_2 v + \gamma\rho_3 w$$

et l'on tire de là que le système (5) est entièrement équivalent au suivant:

$$(6)\qquad \begin{aligned}
&\frac{M_1\mu_1}{\alpha} + \frac{P_1\pi_1}{\beta} + \frac{R_1\rho_1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha}\\
&\frac{M_2\mu_2}{\alpha} + \frac{P_2\pi_2}{\beta} + \frac{R_2\rho_2}{\gamma} = \frac{1}{\beta}\\
&\frac{M_3\mu_3}{\alpha} + \frac{P_3\pi_3}{\beta} + \frac{R_3\rho_3}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}\\
&\frac{\mu_2 M_1}{\alpha} + \frac{P_1\pi_2}{\beta} + \frac{R_1\rho_2}{\gamma} = 0\\
&\frac{\mu_2 M_3}{\alpha} + \frac{P_3\pi_2}{\beta} + \frac{R_3\rho_2}{\gamma} = 0\\
&\frac{\mu_3 M_1}{\alpha} + \frac{P_1\pi_3}{\beta} + \frac{R_1\rho_3}{\gamma} = 0.
\end{aligned}$$

Ceci posé, supposons d'abord que α, β et γ soient de même signe, par exemple positifs. On déduit de la forme des trois premières équations (6) que les substitutions sont en nombre limité, puisque les M, P, R sont de la forme $\frac{E}{al}$, E étant entier. Par conséquent il n'y a pour une forme quadratique définie $f(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$ qu'un nombre limité de substitutions à coëfficients entiers, la transformant en elle-même.

4. Passons au cas où la forme est indéfinie, c'est à dire où α, β et γ ne sont pas de même signe, soit

$$\alpha > 0 \qquad \beta > 0 \qquad \gamma = -g < 0.$$

Il y a dans ce cas une infinité de substitutions à coëfficients entiers transformant en elle-même la forme f. Je me propose d'établir la proposition suivante.

Considérons le groupe des substitutions

$$X = \frac{M_1 x + P_1 y + R_1}{M_3 x + P_3 y + R_3}, \qquad Y = \frac{M_2 x + P_2 y + R_2}{M_3 x + P_3 y + R_3}$$

effectuées sur les deux variables x et y; je dis que ce groupe sera discontinu pour tout système de valeurs x et y telles que

$$\alpha(x'^2 + x''^2) + \beta(y'^2 + y''^2) - g < 0$$

en posant $x = x' + ix''$ et $y = y' + iy''$.

Remarquons d'abord qu'en faisant sur u, v, w la substitution

$$U = M_1 u + P_1 v + R_1 w$$
$$V = M_2 u + P_2 v + R_2 w$$
$$W = M_3 u + P_3 v + R_3 w$$

on aura:

$$\alpha U U_0 + \beta V V_0 - \gamma W W_0 = \alpha u u_0 + \beta v v_0 - \gamma w w_0$$

et par suite

$$\alpha(X'^2 + X''^2) + \beta(Y'^2 + Y''^2) - g = \frac{1}{\operatorname{mod}^2(M_3 x + P_3 y + R_3)}[\alpha(x'^2 + x''^2) + \beta(y'^2 + y''^2) - g]$$

en posant, bien entendu, $X = X' + iX''$ et $Y = Y' + iY''$.

Il en résulte que si le système x, y est à l'intérieur du domaine défini par l'inégalité

$$\alpha(x'^2 + x''^2) + \beta(y'^2 + y''^2) < g$$

il en sera de même du système des variables transformées X et Y.

Observons maintenant qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini de substitutions du groupe pour lesquelles le module de R_3 soit moindre qu'une quantité donnée K; c'est ce qui résulte des équations (5) et (6). L'équation:

$$\frac{M_3 \mu_3}{\alpha} + \frac{P_3 \pi_3}{\beta} = \frac{R_3 \rho_3}{g} - \frac{1}{g}$$

par exemple, montre que les modules de M_3 et P_3 seront limitées en fonction de K et les trois premières équations (5) apprennent successivement qu'il en est de même pour M_1, P_1, R_1 et M_2, P_2, R_2. Donc d'après leur forme, les quantités M, P, R ne peuvent avoir qu'un nombre limité de valeurs.

Montrons enfin, et c'est le point essentiel dans notre démonstration, que quand le module de R_3 grandit indéfiniment

$$\mathrm{mod}\,(M_3 x + P_3 y + R_3)$$

grandit lui-même indéfiniment. On a en effet:

$$\mathrm{mod}\,(M_3 x + P_3 y + R_3) > \mathrm{mod}\,R_3 - \mathrm{mod}\,(M_3 x) - \mathrm{mod}\,(P_3 y)$$

le second membre de cette inégalité étant, comme nous allons voir, positif. Nous l'écrirons sous la forme:

$$\frac{\mathrm{mod}^2\,R_3 - [\mathrm{mod}\,(M_3 x) + \mathrm{mod}\,(P_3 y)]^2}{\mathrm{mod}\,R_3 + \mathrm{mod}\,(M_3 x) + \mathrm{mod}\,(P_3 y)}$$

ou en remplaçant $\mathrm{mod}^2\,R_3$ par sa valeur $1 + g\left(\frac{\mathrm{mod}^2\,M_3}{\alpha} + \frac{\mathrm{mod}^2\,P_3}{\beta}\right)$

$$\frac{1 + \left(\frac{g}{\alpha} - \mathrm{mod}^2\,x\right)\mathrm{mod}^2\,M_3 + \left(\frac{g}{\beta} - \mathrm{mod}^2\,y\right)\mathrm{mod}^2\,P_3 - 2\,\mathrm{mod}\,x\cdot\mathrm{mod}\,y\cdot\mathrm{mod}\,M_3\,\mathrm{mod}\,P_3}{\mathrm{mod}\,R_3 + \mathrm{mod}\,x\cdot\mathrm{mod}\,M_3 + \mathrm{mod}\,y\cdot\mathrm{mod}\,P_3}$$

Or le numérateur, abstraction faite de l'unité, est un polynome homogène en $\mathrm{mod}\,M_3$ et $\mathrm{mod}\,P_3$; on vérifie aisément qu'il est essentiellement positif, le discrimmant est en effet:

$$\mathrm{mod}^2\,x\cdot\mathrm{mod}^2\,y - \left(\frac{g}{\alpha} - \mathrm{mod}^2\,x\right)\left(\frac{g}{\beta} - \mathrm{mod}^2\,y\right)$$

ou

$$\frac{g}{\beta}(x'^2 + x''^2) + \frac{g}{\alpha}(y'^2 + y''^2) - \frac{g^2}{\alpha\beta}$$

et on voit qu'il est négatif puisque, par hypothèse:

$$\alpha(x'^2 + x''^2) + \beta(y'^2 + y''^2) < g$$

d'autre part le coëfficient de $\mathrm{mod}^2\,M_3$

$$\frac{g}{\alpha} - (x'^2 + x''^2)$$

sera certainement positif d'après l'inégalité précédente. Ecrivons maintenant la limite inférieure de $\mathrm{mod}\,(M_3x + P_3y + R_3)$ sous la forme

$$\mathrm{mod}\,R_3 \cdot \frac{\left(\frac{g}{\alpha} - \mathrm{mod}^2 x\right)\frac{\mathrm{mod}^2 M_3}{\mathrm{mod}^2 R_3} + \left(\frac{g}{\beta} - \mathrm{mod}^2 y\right)\frac{\mathrm{mod}^2 P_3}{\mathrm{mod}^2 R_3} - 2\,\mathrm{mod}\,x\,\mathrm{mod}\,y\,\frac{\mathrm{mod}\,M_3}{\mathrm{mod}\,R_3}\cdot\frac{\mathrm{mod}\,P_3}{\mathrm{mod}\,R_3} + \frac{1}{\mathrm{mod}^2 R_3}}{1 + \mathrm{mod}\,x \cdot \frac{\mathrm{mod}\,M_3}{\mathrm{mod}\,R_3} + \mathrm{mod}\,y \cdot \frac{\mathrm{mod}\,P_3}{\mathrm{mod}\,R_3}}$$

D'après ce qui vient d'être dit et en remarquant que $\frac{\mathrm{mod}\,M_3}{\mathrm{mod}\,R_3}$ et $\frac{\mathrm{mod}\,P_3}{\mathrm{mod}\,R_3}$ restent, quand R_3 augmente indéfiniment, toujours moindres qu'une expression facile à déterminer puisque

$$\frac{1}{\alpha}\,\frac{\mathrm{mod}^2 M_3}{\mathrm{mod}^2 R_3} + \frac{1}{\beta}\cdot\frac{\mathrm{mod}^2 P_3}{\mathrm{mod}^2 R_3} = \frac{1}{g} - \frac{1}{g\,\mathrm{mod}^2 R_3}$$

on voit qu'on pourra fixer un nombre positif A dépendant uniquement de x, y, g, α et β, auquel le coëfficient de $\mathrm{mod}\,R_3$ sera constamment supérieur, et on aura alors

$$\mathrm{mod}\,(M_3x + P_3y + R_3) > A \cdot \mathrm{mod}\,R_3$$

et il est donc bien établi que, quand $\mathrm{mod}\,R_3$ augmente indéfiniment, il en sera de même de $\mathrm{mod}\,(M_3x + P_3y + R_3)$.

5. Ces remarques faites, la démonstration va s'achever bien aisément. Reprenons en effet l'égalité précédemment établie:

$$-\alpha(X'^2 + X''^2) - \beta(Y'^2 + Y''^2) + g =$$
$$= \frac{1}{\mathrm{mod}^2\,[M_3x + P_3y + R_3]}\left[-\alpha(x'^2 + x''^2) - \beta(y'^2 + y''^2) + g\right]$$

où les deux membres sont positifs; on aura, d'après l'inégalité ci-dessus écrite:

$$-\alpha(X'^2 + X''^2) - \beta(Y'^2 + Y''^2) + g < \frac{1}{\mathrm{mod}^2 R_3}\cdot\frac{1}{A^2}\left[-\alpha(x'^2 + x''^2) - \beta(y'^2 + y''^2) + g\right]$$

On en conclut que le groupe est discontinu; car on aurait dans le cas contraire une substitution

$$X = \frac{M_1x + P_1y + R_1}{M_3x + P_3y + R_3} \qquad Y = \frac{M_2x + P_2y + R_2}{M_3x + P_3y + R_3}$$

pour laquelle X et Y différeraient respectivement d'aussi peu que l'on voudrait de x et y et pour laquelle on aurait par conséquent:

$$-\alpha(X'^2 + X''^2) - \beta(Y'^2 + Y''^2) + g = (1 + \varepsilon)[-\alpha(x'^2 + x''^2) - \beta(y'^2 + y''^2) + g]$$

ε étant une quantité réelle dont la valeur absolue est moindre qu'un nombre positif η donné à l'avance aussi petit que l'on voudra: par suite

$$(1 + \varepsilon) < \frac{1}{\text{mod}^2 R_3} \cdot \frac{1}{A^2}$$

donc

$$\text{mod}^2 R_3 < \frac{1}{(1 + \varepsilon)A^2} < \frac{1}{1 - \eta} \cdot \frac{1}{A^2}$$

mais le nombre des substitutions pour lesquelles le carré du module de R_3 est moindre que $\frac{1}{1-\eta} \cdot \frac{1}{A^2}$ est fini, d'après une remarque faite précédemment, et on ne peut évidemment pas alors trouver parmi elles des substitutions pour lesquelles X et Y diffèrent de x et y d'aussi peu que l'on voudra.

On voit d'ailleurs que, pour la suite des systèmes de valeurs X et Y, quand on effectue sur x et sur y toutes les substitutions du groupe, l'expression positive

$$g - \alpha(X'^2 + X''^2) - \beta(Y'^2 + Y''^2)$$

tend vers zéro, puisque mod R_3 grandit sans limite.

Il est clair que l'analyse précédente ne subsiste pas, si le système x, y est en dehors du domaine défini par l'inégalité:

$$\alpha(x'^2 + x''^2) + \beta(y'^2 + y''^2) - g < 0.$$

Dans ce cas chaque substitution du groupe ne donne plus nécessairement pour X et Y une valeur déterminée. Prenons en effet la substitution

$$X = \frac{M_1 x + P_1 y + R_1}{M_3 x + P_3 y + R_3}, \qquad Y = \frac{M_2 x + P_2 y + R_2}{M_3 x + P_3 y + R_3}$$

Supposons que le système x, y satisfasse aux deux équations

$$M_1 x + P_1 y + R_1 = 0$$
$$M_3 x + P_3 y + R_3 = 0$$

on voit que Y aura une valeur infinie et que X sera indéterminée.

Cette circonstance ne peut pas se présenter quand (x, y) est à l'intérieur du domaine précédemment défini, parce que dans ce cas

$$\operatorname{mod}(M_3x + P_3y + R_3) > A \cdot \operatorname{mod} R_3$$

et par suite $\operatorname{mod}(M_3x + P_3y + R_3)$ n'est jamais nul.

6. Dans le groupe des substitutions à coëfficients entiers, transformant en elle-même une forme $f(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$, on peut considérer un sous-groupe particulièrement intéressant. L'invariant de la forme se reproduisant multiplié par le carré du module du déterminant de la substitution, ce module doit être égal à l'unité; le sous-groupe que j'ai en vue est celui pour lequel le déterminant lui-même est égal à l'unité. C'est toujours de celui-là qu'il sera question dans la suite, quand nous parlerons du groupe des substitutions transformant la forme en elle-même.

7. Arrêtons-nous un instant sur un cas particulier. Nous prenons la forme

$$xx_0 + yy_0 - zz_0$$

et nous considérons le groupe des substitutions à coëfficients entiers de la forme $a + bi$ (où a et b sont des entiers réels), transformant cette forme en elle-même. Soit

$$\begin{aligned} x &= M_1X + P_1Y + R_1Z \\ y &= M_2X + P_2Y + R_2Z \\ z &= M_3X + P_3Y + R_3Z \end{aligned}$$

les relations du paragraphe (3) deviennent

$$\begin{aligned} M_1\mu_1 + M_2\mu_2 - M_3\mu_3 &= 1 \\ P_1\pi_1 + P_2\pi_2 - P_3\pi_3 &= 1 \\ R_1\rho_1 + R_2\rho_2 - R_3\rho_3 &= -1 \\ P_1\mu_1 + P_2\mu_2 - P_3\mu_3 &= 0 \\ M_1\rho_1 + M_2\rho_2 - M_3\rho_3 &= 0 \\ P_1\rho_1 + P_2\rho_2 - P_3\rho_3 &= 0 \end{aligned}$$

système qui est équivalent au suivant:

$$(\varepsilon)\qquad \begin{aligned} M_1\mu_1 + P_1\pi_1 - R_1\rho_1 &= 1 \\ M_2\mu_2 + P_2\pi_2 - R_2\rho_2 &= 1 \\ M_3\mu_3 + P_3\pi_3 - R_3\rho_3 &= -1 \\ \mu_2 M_1 + \pi_2 P_1 - R_1\rho_2 &= 0 \\ \mu_2 M_3 + \pi_2 P_3 - R_3\rho_2 &= 0 \\ \mu_3 M_1 + \pi_3 P_1 - R_1\rho_3 &= 0 \end{aligned}$$

Nous allons encore remplacer ce système par un autre; remarquons à cet effet que les équations

$$\begin{aligned} \mu_2 M_1 + \pi_2 P_1 - R_1\rho_2 &= 0 \\ \mu_2 M_3 + \pi_2 P_3 - R_3\rho_2 &= 0 \end{aligned}$$

donnent

$$\frac{\mu_2}{-P_1R_3 + P_3R_1} = \frac{\pi_2}{-R_1M_3 + R_3M_1} = \frac{\rho_2}{M_1P_3 - M_3P_1}$$

désignons par s la valeur commune de ces rapports; en substituant ces valeurs dans la seconde des équations (ε), on a:

$$s[M_2(P_3R_1 - P_1R_3) + P_2(M_1R_3 - R_1M_3) + R_2(M_3P_1 - M_1P_3)] = 1$$

or le coëfficient de s est le déterminant de la substitution, il est donc égal à ± 1 ou $\pm i$. Ne considérons que le sous-groupe pour lequel ce déterminant est égal à l'unité: on aura alors $s = 1$.

Ainsi

$$\begin{aligned} \mu_2 &= P_3R_1 - P_1R_3 \\ \pi_2 &= M_1R_3 - M_3R_1 \\ \rho_2 &= M_1P_3 - M_3P_1 \end{aligned}$$

auquel il faut adjoindre:

$$\begin{aligned} M_1\mu_1 + P_1\pi_1 - R_1\rho_1 &= 1 \\ M_3\mu_3 + P_3\pi_3 - R_3\rho_3 &= -1 \\ \mu_3 M_1 + \pi_3 P_1 - R_1\rho_3 &= 0 \end{aligned}$$

et de ce système de six équations on peut d'ailleurs facilement déduire le système des équations (ε). On a en effet d'après les trois dernières équations:

$$-(M_1\mu_1+P_1\pi_1-R_1\rho_1)(M_3\mu_3+P_3\pi_3-R_3\rho_3)+(\mu_3M_1+\pi_3P_1-R_1\rho_3)(M_3\mu_1+P_3\pi_1-\rho_1R_3)=1$$

ce qui peut s'écrire:

$$(P_3R_1-P_1R_3)(\pi_3\rho_1-\pi_1\rho_3)+(M_1R_3-M_3R_1)(\mu_1\rho_3-\mu_3\rho_1)-(M_1P_3-M_3P_1)(\mu_1\pi_3-\mu_3\pi_1)=1$$

ou enfin

$$M_2\mu_2 + P_2\mu_2 - R_2\rho_2 = 1.$$

Quant aux autres équations (ε) on voit de suite qu'elles sont vérifiées. Avec cette nouvelle forme, le groupe se trouve donné par les valeurs de

$$M_1,\ P_1,\ R_1,\ M_3,\ P_3,\ R_3$$

vérifiant les équations

$$\begin{aligned} M_1\mu_1 + P_1\pi_1 - R_1\rho_1 &= 1 \\ M_3\mu_3 + P_3\pi_3 - R_3\rho_3 &= -1 \\ \mu_3M_1 + \pi_3P_1 - R_1\rho_3 &= 0 \end{aligned}$$

A toute solution de ces équations correspondront des valeurs entières de M_2, P_2 et R_2. Je reviendrai dans un autre travail sur le groupe précédent.

8. Reprenant maintenant le cas général, *je veux montrer que l'on peut former des fonctions uniformes des deux variables x et y, définies pour tous les systèmes de valeurs x et y du domaine D déjà considéré, domaine défini par l'inégalité*

$$\alpha(x'^2 + x''^2) + \beta(y'^2 + y''^2) - g < 0$$

et qui se reproduisent pour toutes les substitutions du groupe (M, P, R) c'est à dire quand on remplace x et y par

$$X = \frac{M_1x + P_1y + R_1}{M_3x + P_3y + R_3}, \qquad Y = \frac{M_2x + P_2y + R_2}{M_3x + P_3y + R_3}.$$

Comme je l'ai dit plus haut (paragr. 6), je considère le groupe des substitutions pour lequel le déterminant de la substitution est égal à l'unité; nous avons donc ici

$$\begin{vmatrix} M_1 & P_1 & R_1 \\ M_2 & P_2 & R_2 \\ M_3 & P_3 & R_3 \end{vmatrix} = 1.$$

J'envisage le déterminant fonctionnel de X et Y, soit $D(X, Y)$; nous allons étudier la série dont le terme général est:

$$[\mathrm{mod}\, D(X, Y)]^m$$

la sommation étant étendue à toutes les substitutions du groupe; et nous prouverons qu'à partir d'une valeur convenable de l'entier m, la série est convergente. Calculons d'abord ce déterminant fonctionnel, on trouve de suite:

$$D(X, Y) = \frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{(M_3 x + P_3 y + R_3)^3}$$

Nous avons donc à considérer la serie:

$$\frac{1}{\mathrm{mod}\,(M_3 x + P_3 y + R_3)^{3m}}.$$

Pour démontrer la convergence de cette série, nous emploierons deux méthodes distinctes, l'une particulière à la nature spéciale des groupes que nous venons d'étudier, l'autre beaucoup plus générale et applicable à tout groupe discontinu, moyennant seulement quelques hypothèses sur la nature de ce groupe.

9. Pour plus de simplicité, supposons que le groupe considéré soit le groupe des substitutions à coëfficients entiers de la forme $a + bi$, transformant en elle-même la forme:

$$a u u_0 + \beta v v_0 - g w w_0$$

le même raisonnement, avec quelques légères modifications seulement, serait applicable au cas général précédemment étudié.

Nous avons établi (paragr. 4) que pour un système de valeurs x, y situé à l'intérieur du domaine D, on a:

$$\mathrm{mod}\,(M_3 x + P_3 y + R_3) > A \cdot \mathrm{mod}\, R_3$$

A étant une constante dépendant seulement de x, y et α, β et γ, mais nullement des M, P, R.

Pour une valeur donnée à R_3, il ne peut y avoir qu'un nombre limité de substitutions appartenant au groupe (paragr. 4); cherchons une limite supérieure de ce nombre. Remarquons d'abord qu'il résulte des équations (5) et (6) (paragr. 3) qu'à une valeur donnée de R_3, M_3, P_3, R_1, R_2 ne peut correspondre qu'une seule substitution. Nous avons donc seulement à chercher, pour une valeur donnée de R_3, le nombre maximum de valeurs possibles pour le système des quatre quantités M_3, P_3, R_1 et R_2. Il nous suffira de considérer les équations:

$$\frac{M_3\mu_3}{\alpha} + \frac{P_3\pi_3}{\beta} - \frac{R_3\rho_3}{g} = -\frac{1}{g}$$

$$\alpha R_1\rho_1 + \beta R_2\rho_2 - gR_3\rho_3 = -g$$

Soit $R_3 = a + bi$ et posons

$$R_1 = m + in, \quad R_2 = p + iq$$

La seconde équation s'écrira:

$$\alpha(m^2 + n^2) + \beta(p^2 + q^2) = g(a^2 + b^2 - 1)$$

m et n seront certainement moindres que $\sqrt{\frac{g}{\alpha}(a^2 + b^2)}$ et p sera moindre que $\sqrt{\frac{g}{\beta}(a^2 + b^2)}$; donc le nombre de systèmes de valeurs possibles pour R_1 et R_2 sera moindre que

$$(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} \cdot N$$

N étant une constante purement numérique, dépendant seulement de α, β et g, qu'il est inutile de fixer. Tout pareillement le nombre de systèmes de valeurs possibles pour M_3 et P_3 sera moindre que

$$(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} \cdot N_1$$

donc pour la valeur $R_3 = a + bi$, une limite supérieure du nombre de substitutions entière possible dans le groupe, sera:

$$N \cdot N_1(a^2 + b^2)^3$$

Revenons maintenant à la série dont le terme général est

$$\frac{1}{\bmod(M_3x + P_3y + R_3)^{3m}}$$

il pourra y avoir un certain nombre de termes pour lesquels R_3 aura la même valeur, mais ce nombre sera moindre que $N^2(a^2 + b^2)^2$.

On a d'autre part

$$\frac{1}{\bmod(M_3x + P_3y + R_3)^{3m}} < \frac{1}{A^{3m}} \cdot \frac{1}{(\bmod R_3)^{3m}}$$

donc la somme des termes pour lesquels R_3 a la même valeur, sera moindre que

$$\frac{NN_1}{A^{3m}} \frac{(a^2 + b^2)^3}{(a^2 + b^2)^{\frac{3m}{2}}}$$

la série tout entière sera donc moindre que le produit de $\frac{NN_1}{A^{3m}}$ par la série dont le terme général est:

$$\frac{(a^2 + b^2)^3}{(a^2 + b^2)^{\frac{3m}{2}}}$$

où a et b reçoivent toutes les valeurs entières possibles, à l'exception de $a = 0$, $b = 0$. Or on voit facilement que pour toute valeur de m, égale ou supérieure à 3 cette dernière série converge. Dans le cas de $m = 3$, son terme général est en effet:

$$\frac{1}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Faisant varier a et b depuis l'unité jusqu'à l'infini, nous prouverons la convergence de cette série en montrant que l'intégrale double

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{da\, db}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

a un sens déterminé. Or cette intégrale peut s'écrire

$$\int_1^\infty \int_{\frac{1}{a}}^\infty \frac{da\, dt}{a^2(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{qui est moindre que} \quad \int_1^\infty \frac{da}{a^2} \times \int_0^\infty \frac{dt}{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

expression dont la valeur est parfaitement déterminée.

Nous avons donc établi que la série

$$\sum \frac{1}{\operatorname{mod}(M_3x + P_3y + R_3)^{3m}}$$

étendue à toutes les substitutions du groupe est convergente si m est égal ou supérieur à trois. Notre seconde démonstration nous permettra de voir que ce résultat subsiste quand on a $m = 2$.

10. Avant d'exposer cette seconde démonstration, voyons de suite le parti que l'on peut tirer du résultat précédent pour obtenir des fonctions restant invariables pour toutes les substitutions du groupe. Soit $R(x, y)$ une fonction rationnelle de x et y restant uniforme et continue pour tous les points à l'intérieur ou sur la limite du domaine D

$$\alpha(x'^2 + x''^2) + \beta(y'^2 + y''^2) - g < 0$$

Tout polynome entier satisfait naturellement à cette condition; comme exemple d'une fonction qui ne soit pas entière citons

$$\frac{1}{a - x - y}$$

a étant une quantité positive supérieure à $\frac{g(\beta + \alpha)}{\alpha\beta}$.

Formons alors la série

$$(\alpha) \qquad \sum R\left(\frac{M_1x + P_1y + R_1}{M_3x + P_3y + R_3}, \frac{M_2x + P_2y + R_2}{M_3x + P_3y + R_3}\right)\frac{1}{(M_3x + P_3y + R_3)^{3m}}$$

qui est étendue à toutes les substitutions du groupe. Puisque nous avons établi que la série de terme général

$$\frac{1}{\operatorname{mod}(M_3x + P_3y + R_3)^{3m}}$$

était convergente; il s'ensuit que la série des modules des termes de la série (α) est convergente. Nous formons donc ainsi une fonction de x et y uniforme et continue pour tout système de valeurs (x, y) à l'intérieur du domaine D; soit $P(x, y)$ cette fonction. Il est facile de voir ce que devient cette fonction quand on fait sur (x, y) une substitution du groupe; chaque terme de la nouvelle série devient égal à un terme de la première, multiplié par le dénominateur des formules de substitution, élevé à la puissance $3m$.

On a donc, pour toute substitution (M, P, R)

$$P\left[\frac{M_1x + P_1y + R_1}{M_3x + P_3y + R_3}, \frac{M_2x + P_2y + R_2}{M_3x + P_3y + R_3}\right] = (M_3x + P_3y + R_3)^{3m} \cdot P(x, y)$$

Ces fonctions sont, comme on le voit, les analogues des fonctions d'une variable, appelées thétafuchsiennes par M. Poincaré et qui jouent un rôle si important dans sa théorie des fonctions fuchsiennes.

11. Ce résultat serait illusoire si la fonction $P(x, y)$ était identiquement nulle: c'est un point qui parait peu vraisemblable, vu surtout le degré de généralité de la fonction rationnelle R; mais pour plus de sûreté montrons en toute rigueur, que ce résultat ne peut se présenter, quelle que soit la fonction rationnelle R, au moins à partir d'une valeur suffisamment grande de l'entier m. Nous raisonnerons encore, pour plus de simplicité, sur le groupe des substitutions (paragr. 9) à coëfficients entiers transformant en elle-même la forme

$$\alpha uu_0 + \beta vv_0 - \gamma ww_0$$

et il nous suffira de constater que la série:

$$\sum \frac{1}{(M_3x + P_3y + R_3)^{3m}}$$

au moins pour certaines valeurs de m, n'est pas nulle pour $x = 0$, $y = 0$. Or il y a un nombre limité N de substitutions pour lesquelles on a $R_3 = \pm 1$ ou $\pm i$, et en prenant $m = 4n$, la part provenant de ces termes sera évidemment N. Pour tous les autres termes le module de R_3 sera supérieur à l'unité; chaque terme sera très-petit si n est suffisamment grand et par conséquent leur somme, puisque nous savons que la série est convergente; la série différera donc peu de N et par conséquent ne sera pas nulle. Nous sommes donc assuré que la série précédente ne peut pas toujours être identiquement nulle, et alors il en est évidemment de même de la série (α) précédemment formée.

12. La connaissance des fonctions $P(x, y)$ conduit immédiatement à la formation de fonctions se reproduisant pour toutes les substitutions du groupe. Prend on en effet deux fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ correspondant à la même valeur de m; on a, en posant

$$F(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

$$F\left(\frac{M_1x + P_1y + Q_1}{M_3x + P_3y + Q_3}, \frac{M_2x + P_2y + Q_2}{M_3x + P_3y + Q_3}\right) = F(x, y)$$

Il existe donc des fonctions uniformes des deux variables indépendantes x et y, définies dans le domaine D et se reproduisant quand on effectue sur x et y toutes les substitutions du groupe (M, P, R).

13. J'arrive maintenant à la seconde démonstration que j'ai annoncée pour la convergence de la série:

$$\sum \frac{1}{(M_3x + P_3y + R_3)^{3m}}$$

Cette démonstration ne s'applique pas seulement aux groupes dont nous nous sommes occupés dans cette étude, mais à tout groupe discontinu jouissant des propriétés suivantes.

Considérons le domaine D limité par la relation

$$x'^2 + x''^2 + y'^2 + y''^2 = 1$$

et désignons encore par:

$$X = \frac{M_1x + P_1y + R_1}{M_3x + P_3y + R_3}, \qquad Y = \frac{M_2x + P_2y + R_2}{M_3x + P_3y + R_3}$$

une substitution quelconque du groupe proposé. Nous supposons d'abord qu'à tout point (x, y) sur la limite du domaine [j'appelle, pour abréger, point (x, y) l'ensemble des valeurs x et y] correspond un point de cette même limite ce qui nous donne les relations

$$M_1\rho_1 + M_2\mu_2 - M_3\mu_3 = P_1\pi_1 + P_2\pi_2 - P_3\pi_3 = -(R_1\rho_1 + R_2\rho_2 - R_3\rho_3)$$
$$P_1\mu_1 + P_2\mu_2 - P_3\mu_3 = 0$$
$$M_1\rho_1 + M_2\rho_2 - M_3\rho_3 = 0$$
$$P_1\rho_1 + P_2\rho_2 - P_3\rho_3 = 0$$

où, comme précédemment, les lettres grecques sont les conjuguées des grandes lettres correspondantes. Nous supposerons de plus que le déterminant (M, P, R) de la substitution soit égal à l'unité. Or désignons par k la valeur commune, nécessairement réelle, des trois expressions sur la première ligne, on tire des autres équations:

$$\frac{P_1}{-\mu_2\rho_3 + \mu_3\rho_2} = \frac{P_2}{-\rho_1\mu_3 + \rho_3\mu_1} = \frac{P_3}{\mu_1\rho_2 - \mu_2\rho_1} = s$$

et en substituant dans la relation

$$P_1\pi_1 + P_2\pi_2 - P_3\pi_3 = k$$

on aura, en tenant compte de ce que le déterminant est supposé égal à l'unité

$$s = k$$

donc

$$P_1 = k(\mu_3\rho_2 - \mu_2\rho_3)$$
$$P_2 = k(\mu_1\rho_3 - \mu_3\rho_1)$$
$$P_3 = k(\mu_1\rho_2 - \mu_2\rho_1)$$

et de même on trouverait:

$$M_1 = k(\pi_2\rho_3 - \pi_3\rho_2), \quad R_1 = k(\pi_2\mu_3 - \mu_2\pi_3)$$
$$M_2 = k(\pi_3\rho_1 - \pi_1\rho_3), \quad R_2 = k(\mu_1\pi_3 - \pi_1\mu_3)$$
$$M_3 = k(\pi_2\rho_1 - \pi_1\rho_2), \quad R_3 = k(\mu_1\pi_2 - \mu_2\pi_1)$$

d'où on conclut en portans let valeurs des M et R dans les expressions des P

$$P_1 = k^3 P_1, \quad P_2 = k^3 P_2, \quad P_3 = k^3 P_3$$

on en conclut que $k^3 = 1$ et par suite $k = 1$.

Les relations entre les M, P, R ont donc absolument la même forme que celles que nous avons considéré au paragraphe (7). Seulement dans ce dernier les M, P, R représentaient des entiers complexes, tandis qu'ici nous ne savons rien sur ces constantes.

D'après la forme de ces équations, une substitution quelconque du groupe transformera un point du domaine D en un point du même domaine. Nous supposons enfin que le groupe est discontinu pour tous les points à l'intérieur de D, et voici ce que nous entendons par là: x, y étant un point quelconque à l'intérieur de D et D_1 étant un domaine quelconque comprenant ce point mais compris lui-même tout entier dans D, les transformations du groupe effectuées sur (x, y) ne donneront qu'un nombre limité de points à l'intérieur de D_1; par suite quand on effectue sur (x, y) toutes les transformations du groupe, les valeurs transformées tendent vers la limite du domaine D.

Considérons le dénominateur

$$M_3 x + P_3 y + R_3$$

on a

$$\operatorname{mod}(M_3 x + P_3 y + R_3) = \operatorname{mod} R_3 \cdot \operatorname{mod}\left(\frac{M_3}{R_3} x + \frac{P_3}{R_3} y + 1\right)$$

or nous avons les relations [relations (ε) du paragr. 7]

$$\begin{aligned}
M_1\mu_1 + P_1\pi_1 - R_1\rho_1 &= 1\\
M_2\mu_2 + P_2\pi_2 - R_2\rho_2 &= 1\\
M_3\mu_3 + P_3\pi_3 - R_3\rho_3 &= -1\\
\mu_2 M_1 + \pi_2 P_1 - R_1\rho_2 &= 0\\
\mu_2 M_3 + \pi_2 P_3 - R_3\rho_2 &= 0\\
\mu_3 M_1 + \pi_3 P_1 - R_1\rho_3 &= 0
\end{aligned}$$

on voit donc que $\operatorname{mod} R_3 \geqq 1$ et

$$\operatorname{mod}^2 \frac{M_3}{R_3} + \operatorname{mod}^2 \frac{P_3}{R_3} = 1 - \frac{1}{\operatorname{mod}^2 R_3}$$

$\operatorname{mod} \frac{M_3}{R_3}$ et $\operatorname{mod} \frac{P_3}{R_3}$ sont donc moindres que un et pour un point (x, y) à l'intérieur de D, on a

$$\mathrm{mod}\left(\frac{M_3}{R_3}x + \frac{P_3}{R_3}y + 1\right) < 3$$

On peut trouver une limite inférieure de la même quantité, en suivant la voie du paragr. (4); on a ainsi

$$\mathrm{mod}\left(\frac{M_3}{R_3}x + \frac{P_3}{R_3}y + 1\right) >$$

$$> \frac{(1-\mathrm{mod}^2 x)\mathrm{mod}^2\frac{M_3}{R_3} + (1-\mathrm{mod}^2 y)\mathrm{mod}^2\frac{P_3}{R_3} - 2\mathrm{mod}\,x\cdot\mathrm{mod}\,y\cdot\mathrm{mod}\frac{M_3}{R_3}\cdot\mathrm{mod}\frac{P_3}{R_3} + \frac{1}{\mathrm{mod}^2 R_3}}{1 + \mathrm{mod}\,x\cdot\mathrm{mod}\frac{M_3}{R_3} + \mathrm{mod}\,y\cdot\mathrm{mod}\frac{P_3}{R_3}}$$

et par suite

$$\mathrm{mod}\left(\frac{M_3}{R_3}x + \frac{P_3}{R_3}y + 1\right) > \frac{1 - \mathrm{mod}^2 x - \mathrm{mod}^2 y}{3(1 - \mathrm{mod}^2 x)}$$

Ecrivons donc

$$\mathrm{mod}\,(M_3 x + P_3 y + R_3) = A \cdot \mathrm{mod}\,R_3$$

A satisfaisant aux conditions

$$\frac{1 - \mathrm{mod}^2 x - \mathrm{mod}^2 y}{3(1 - \mathrm{mod}^2 x)} < A < 3$$

Ceci posé, soit x_0, y_0 un point tel que la substitution unité soit la seule qui le transforme en lui-même (c'est évidemment ce qui arrive pour un point pris arbitrairement), et envisageons la série (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... des points transformés de (x_0, y_0) par les substitutions du groupe. Je trace autour du point (x_0, y_0) un petit domaine: soit pour fixer les idées

$$(x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 + (x'' - x''_0)^2 + (y'' - y''_0)^2 = \varepsilon^2,$$

ou ε est une quantité très-petite, la limite de ce domaine que nous appellerons δ_0. Les substitutions transformeront le domaine δ_0 en une série de domaines δ_1, δ_2, ... autour des points (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... Le groupe étant discontinu, il est clair que l'on pourra prendre ε suffisamment petit pour que tous ces domaines soient extérieurs les uns aux autres; supposons donc ε ainsi choisi. Considérons alors l'intégrale quadruple:

$$\int\int\int\int dx'\,dx''\,dy'\,dy''$$

étendue à chacun des domaines δ_0, $\delta_1, \ldots$; la somme de toutes ces intégrales aura une valeur finie, car elle est évidemment moindre que la valeur de l'intégrale précédente étendue au domaine D tout entier. Or soit l'intégrale

$$\int\int\int\int dX'\,dX''\,dY'\,dY''$$

étendue au domaine δ transformée de δ_0 par la substitution:

$$X = \frac{M_1 x + P_1 y + R_1}{M_3 x + P_3 y + R_3}, \qquad Y = \frac{M_2 x + P_2 y + R_2}{M_3 x + P_3 y + R_3}$$

on voit, par un calcul bien simple, que l'intégrale précédente est égale à l'intégrale

$$\int\int\int\int \frac{dx'\,dx''\,dy'\,dy''}{\mathrm{mod}^2\,(M_3 x + P_3 y + R_3)^3}$$

étendue au domaine δ_0; de cette manière toutes les intégrales se trouvent ramenées à ce domaine. Le terme général de la série sera donc

$$\frac{1}{\mathrm{mod}^2\,R^3_3}\cdot\int\int\int\int \frac{dx'\,dx''\,dy'\,dy''}{A^6}$$

Or d'après les limites données à l'instant pour A, cette dernière intégrale quadruple sera comprise entre deux limites, la limite inférieure étant une quantité différente de zéro, et on conclut que la série de terme général

$$\frac{1}{\mathrm{mod}^2\,R^3_3}$$

étendue à toutes les substitutions du groupe est convergente. Il en résulte immédiatement que la série de terme général

$$\frac{1}{\mathrm{mod}\,(M_3 x + P_3 y + R_3)^{3m}}$$

est convergente, m étant supérieur ou égal à deux, puisque l'on a

$$\operatorname{mod}(M_3x + P_3y + R_3) = A \operatorname{mod} R_3$$

A étant limité, comme il a été indiqué plus haut.

On voit donc que pour tous les groupes discontinus jouissant des propriétés énoncées, il existe des fonctions qui restent invariables pour toutes les substitutions de ces groupes.

Paris, le 28 décembre 1882.