SUR UNE ESPÈCE DE COURBES SYMÉTRIQUES DE LA SIXIÈME CLASSE.

PAR

C. CRONE.

À COPENHAGUE.

En examinant une surface du quatrième ordre à une conique cuspidale (¹) mon attention s'est arrêtée sur une courbe symétrique de la sixième classe et du sixième ordre, qui s'est présentée comme le contour apparent de la dite surface vu d'un point arbitraire, c. à. d. comme la trace sur un plan du cône ayant pour sommet le point arbitraire et circonscrit à la surface. Cette courbe est sans tangentes doubles ni points doubles; elle a huit tangentes d'inflexion, symétriques deux à deux, et huit points de rebroussement, symétriques deux à deux. Si le nombre de tangentes singulières est augmenté soit d'une tangente double soit d'une tangente d'inflexion, tandis que la classe de la courbe reste la même, on a des formes spéciales, savoir: une courbe du quatrième ordre à deux points de rebroussement, mais sans points doubles, et une courbe du troisième ordre sans points doubles ni points de rebroussement.

Dans la section I de ce mémoire-ci je vais démontrer que *les courbes symétriques de la sixième classe et du sixième ordre à huit tangentes d'inflexion sont les courbes génerales types, c'est à dire, que toutes les courbes douées des mêmes nombres plückeriens pourront être transformées en des courbes symétriques par une transformation homographique.* (²)

Quant aux courbes du troisième ordre cette propriété est assez connue.

(¹) Om Fladerne af 4de Orden med Tilbagegangs Keglesnit og deres Konturer. Copenhague 1881.

(²) M. ZEUTHEN m'a le premier communiqué ce théorème sans toutefois m'en donner la démonstration.

Si l'on place une courbe du quatrième ordre sans point double, mais ayant deux points de rebroussement, de manière que ces derniers points soient les points à l'infini sur le cercle, on aura la courbe symétrique nommée les ovales de DESCARTES. [1]

La courbe du sixième ordre et les deux formes spéciales ont entre elles une relation bien simple: si l'on fait tourner une de ces courbes autour de son axe de symétrie, le contour apparent de la surface de révolution engendrée, vu d'un point quelconque, sera toujours une des trois courbes. Dans la section II je démontrerai cette relation et je m'en servirai pour déduire quelques propriétés des courbes considérées.

I.

Soit donnée une courbe $k^{(n)}$ de l'ordre n, qui est coupée par une tangente arbitraire à une courbe unicursale $\chi^{(r)}$ de la classe r de telle manière, que les abscisses des points d'intersection se déterminent par une équation réductible:

$$f_1(\eta, x) \cdot f_2(\eta, x) = 0$$

$f_1(\eta, x)$ et $f_2(\eta, x)$ étant des polynômes entiers et rationnels et en x et en le paramètre η du point de contact de la tangente. Soient n_1 et n_2 les degrés des polynômes par rapport à x; on a donc:

$$n_1 + n_2 = n.$$

Les r tangentes à $\chi^{(r)}$ passant par un point arbitraire P de $k^{(n)}$ se divisent en deux groupes contenant respectivement r_1 et r_2 tangentes: sur les r_1 tangentes le point P appartient au groupe des n_1 points d'intersection déterminés par l'équation $f_1(\eta, x) = 0$, tandis que sur les r_2 tangentes P est un des n_2 points d'intersection déterminés par l'équation $f_2(\eta, x) = 0$. On voit bien, que:

$$r_1 + r_2 = r,$$

et que les degrés des fonctions f_1 et f_2 par rapport à η sont nr_1 et nr_2.

---

(1) Voir SALMON: Higher plane curves. Sec. Ed. p. 241.

L'équation $\triangle_1 = 0$ exprimant, que l'équation $f_1(\eta, x) = 0$ résolue par rapport à η a des racines multiples, sera du degré $2n_1(r_1 n - 1)$ par rapport à x. Nous allons énumérer les cas, où des valeurs de η correspondant à la même valeur de x coïncident.

D'abord deux points d'intersection d'une droite $x = k$ avec $k^{(n)}$ pourront coïncider. Si $x = k$ est tangente à $k^{(n)}$, $2r_1$ tangentes à $\chi^{(r)}$ coïncident deux à deux et k est une racine r_1-tuple de $\triangle_1 = 0$. Si deux points d'intersection A_1 et A_2 de $x = k$ avec $k^{(n)}$ vont se confondre en un point double P de $k^{(n)}$, une des r tangentes à $\chi^{(r)}$ passant par A_1, qui appartient, p. ex., au groupe r_1, coïncidera avec une des r tangentes passant par A_2, qui pourra appartenir soit au groupe r_1 soit au groupe r_2. Une quelconque des r tangentes à $\chi^{(r)}$ passant par P peut donc provenir soit de la coïncidence de deux tangentes appartenant toutes les deux au groupe r_1, soit de la coïncidence de deux tangentes appartenant toutes les deux au groupe r_2, soit de la coïncidence de deux tangentes appartenant à différents groupes. Si l'on désigne par d_1 et d_2 les nombres de tangentes des deux premières espèces pour tous les d points doubles de $k^{(n)}$, on a:

$$\text{(A)} \qquad d_1 - d_2 = d(r_1 - r_2)$$

Pour chaque coïncidence de deux tangentes appartenant au groupe r_1, $x = k$ est une racine double de $\triangle_1 = 0$. Quant au cas, où $x = k$ passe par un point de rebroussement de $k^{(n)}$, il sera discuté plus tard.

Puis l'équation $f_1(\eta, x) = 0$ aura des racines multiples, si des tangentes passant par différents points d'intersection de $x = k$ avec $k^{(n)}$ coïncident. Alors $x = k$ est tangente à $\chi^{(r)}$ et k est une racine $n_1(n_1 - 1)$-tuple de $\triangle_1 = 0$.

Enfin deux tangentes passant par le même point d'intersection de $x = k$ avec $k^{(n)}$ pourront coïncider, ce qui aura lieu seulement si le point d'intersection est un point d'intersection aussi de $k^{(n)}$ avec $\chi^{(r)}$, $\chi^{(r)}$ *désignant dans ce qui suit la courbe et ses tangentes d'inflexion.* Si une branche de $k^{(n)}$ passe par un point Q de $\chi^{(r)}$ correspondant à $\eta = 0$ et $x = 0$ sans être tangente en ce point ni à la branche de $\chi^{(r)}$, à laquelle appartient le point $\eta = 0$, ni à aucune autre branche de $k^{(n)}$, on pourra pour des valeurs assez petites de η et de x correspondant à des points sur cette branche de $k^{(n)}$, développer x en série suivant des puissances ascendantes de η avec des exposants entiers et positifs. Comme cette série ne pourra satisfaire en même temps à $f_1(\eta, x) = 0$ et à $f_2(\eta, x) = 0$, les tangentes passant par un point P pris sur la branche de $k^{(n)}$ infiniment près de Q, dont les points de contact vont coïncider au point correspondant à $\eta = 0$ doivent appartenir à un seul et même groupe parmi les groupes r_1 et r_2. Nous désignerons par s_1 et s_2 les nombres de points d'intersection de $k^{(n)}$ avec $\chi^{(r)}$ pour lesquels coïncident deux tangentes du même groupe r_1 ou deux tangentes du même groupe r_2; si $x = k$ passe par un pareil point d'intersection, k est une racine simple de $\triangle_1 = 0$ ou du discriminant $\triangle_2 = 0$ de $f_2(\eta, x) = 0$.

Si un point Q de $\chi^{(r)}$ est un point de rebroussement de $k^{(n)}$ ou si $k^{(n)}$ est tangente à $\chi^{(r)}$ en Q, les tangentes passant par un point P de $k^{(n)}$ infiniment près de Q, dont les points de contact vont coïncider en Q, pourront appartenir à différents groupes. Nous désignerons par k_1 et par t les nombres de ces points de rebroussement et de ces points de contact de $\chi^{(r)}$ avec $k^{(n)}$. On a donc en énumérant les points d'intersection de $k^{(n)}$ avec $\chi^{(r)}$:

$$\text{(B)} \qquad 2(k_1 + t) + s_1 + s_2 = 2n(r - 1).$$

Le nombre de points de rebroussement de $k^{(n)}$ non compris dans k_1 sera désigné par k_2. Si deux points d'intersection A_1 et A_2 de $x = k$ avec $k^{(n)}$ vont se confondre en un des k_1 points de rebroussement P, les deux tangentes à $\chi^{(r)}$ passant par A_1, et de même les deux tangentes passant par A_2, dont les points de contact coïncident en P, appartiennent chacune à son groupe savoir r_1 ou r_2. L'équation $f_1(\eta, x) = 0$ a donc une racine double égale à la valeur de η correspondant au point P. Si deux tangentes passant par les points A_1 et A_2 coïncident en une tangente, dont le point de contact est un point $\eta = \eta_1$ différent de P, η_1 sera une racine double de $f_1(\eta, x) = 0$, et k sera une racine triple de $\triangle_1 = 0$ correspondant à cette racine double. $x = k$ sera donc en tout une racine $(3(r_1 - 1) + 1)$-tuple de $\triangle_1 = 0$. Si $x = k$ passe par un des points de rebroussement de $k^{(n)}$ compris dans le nombre k_2, k sera une racine $3r_1$-tuple de $\triangle_1 = 0$.

On a donc en énumérant les racines de $\triangle_1 = 0$:

$$\begin{aligned} 2n_1(nr_1 - 1) = r_1[n(n-1) - 2d - 3(k_1 + k_2)] + 2d_1 + 3k_2 r_1 + \\ + 3k_1(r_1 - 1) + rn_1(n_1 - 1) + k_1 + s_1. \end{aligned}$$

Cette équation et celle qu'on obtient en énumérant les racines de $\triangle_2 = 0$ pourront s'écrire:

$$
(\mathrm{C}) \qquad \begin{aligned}
s_1 + 2d_1 - 2k_1 - 2dr_1 &= rn - r_1 n_2^2 - r_2 n_1^2 + r_1 n_1 - r_2 n_2 - 2n_1 \\
s_2 + 2d_2 - 2k_1 - 2dr_2 &= rn - r_2 n_1^2 - r_1 n_2^2 + r_2 n_2 - r_1 n_1 - 2n_2
\end{aligned}
$$

Ces équations donnent par soustraction au moyen de A:

$$
(\mathrm{D}) \qquad s_1 - s_2 = 2(r_1 n_1 - r_2 n_2 - n_1 + n_2). \text{ (}^1\text{)}
$$

Considérons maintenant une courbe $c^{(6)}$ du sixième ordre à huit points doubles *distincts*. Si l'on fait passer par ces huit points un faisceau $(c^{(3)})$ de courbes du troisième ordre, une courbe quelconque de ce faisceau aura deux points d'intersection avec $c^{(6)}$ sans compter les points doubles. Si la droite l joignant ces deux points ne passe pas par un point fixe elle est tangente à une courbe unicursale $\chi^{(r)}$ de la $r^{\text{ième}}$ classe. Pour déterminer la valeur de r il faut considérer deux cas distincts. *Si le neuvième point fixe du faisceau $(c^{(3)})$ coïncide avec un des points doubles A,* une courbe $c_1^{(3)}$ du faisceau aura un point double en A, tandis que les autres auront une tangente commune en ce point. On voit bien, qu'une des tangentes passant par A doit correspondre à $c_1^{(3)}$. On a donc dans les formules (C), $n_1 = 2$, $r_1 = 1$, $s_1 = 0$, et l'on doit poser $d_1 = 1$, si A est un point double de $c^{(6)}$, $d_1 = 0$, si A est un point de rebroussement de $c^{(6)}$. Comme en ce dernier cas deux points d'intersection de $c^{(6)}$ avec une tangente à $\chi^{(r)}$ déterminés par l'équation $f_1(\eta, x) = 0$ coïncident en A, ce point de rebroussement n'est pas compris dans le nombre k_1, tandis que tout autre point de rebroussement est nécessairement compris dans ce nombre. On aura au moyen de (C):

$$
2d_1 - 2k_1 - 2d = -2r - 10;
$$

pour $d_1 = 1$ on doit poser $k_1 + d = 8$, ce qui donne $r = 2$, pour $d_1 = 0$ on aura $k_1 + d = 7$, ce qui donne aussi $r = 2$. *Si le neuvième point fixe*

---

(1) On obtiendrait encore ces résultats en se servant d'une formule indiquée par M. ZEUTHEN dans Mathematische Annalen 1871. Si les points de deux courbes C_1 et C_2, dont les genres sont p_1 et p_2, sont liés les uns aux autres de façon qu'à chaque point de C_2 correspondent x_1 points de C_1 et à chaque point de C_1. x_2 points de C_2 on a d'après la formule de ZEUTHEN:

$$
y_1 - y_2 = 2x_2(p_1 - 1) - 2x_1(p_2 - 1)
$$

y_1 et y_2 désignant les nombres de coïncidences de deux points, qui, respectivement sur C_1 et C_2, correspondent à un même point de l'autre courbe. Voir aussi Acta mathematica **1.** p. 181.

du faisceau ne coïncide avec aucun point double de $c^{(6)}$ on a $d_1 = 0$ et $k_1 + d = 8$; en se servant de (C) on aura $r = 3$.

Considérons d'abord le cas, où $r = 2$. La courbe décrite par les points d'intersection d'une tangente à la conique $\chi^{(2)}$ avec la courbe correspondante $c^{(3)}$ sera du septième ordre et aura un point triple en A. Elle est donc composée de $c^{(6)}$ et d'une droite m passant par A. Une des tangentes en A à la courbe du septième ordre est la tangente commune aux courbes $c^{(3)}$; comme ces courbes ne touchent pas $c^{(6)}$ en A, m doit être leur tangente commune. Deux des points d'intersection d'une tangente à $\chi^{(2)}$ avec la courbe correspondante $c^{(3)}$ sont situés sur $c^{(6)}$, tandis que le troisième point d'intersection parcourt la droite m; comme il y a une correspondance (1, 1) entre le point d'intersection d'une tangente à $\chi^{(2)}$ avec m et le point de contact, m doit être tangente à $\chi^{(2)}$. Comme on l'a démontré plus haut la tangente correspondante à $c_1^{(3)}$ passe par A; cette tangente doit être la droite m même, car autrement tous les trois points d'intersection de m avec $c_1^{(3)}$ devraient coïncider en A, ce qui est impossible. On pourra établir la correspondance entre les tangentes à $\chi^{(2)}$ et les courbes $c_1^{(3)}$ de telle manière, que A soit un point de rebroussement de $c^{(6)}$; si un autre point fixe du faisceau $(c^{(3)})$ doit être un point de rebroussement, il faut le choisir sur $\chi^{(2)}$.[1] Si l'on choisit sur $\chi^{(2)}$ six points fixes du faisceau, le neuvième point fixe est nécessairement situé sur m, mais alors m ne pourra pas avoir un point d'intersection mobile avec les courbes $c^{(3)}$. On voit donc, que si l'on pose $r = 2$, $c^{(6)}$ ne peut avoir plus de six points de rebroussement.

Jusqu'ici on a supposé $r = 2$; *supposons maintenant* $r = 3$. Les points d'intersection des tangentes à $\chi^{(3)}$ avec les courbes correspondantes $c^{(3)}$ décriront une courbe du dixième ordre composée de $c^{(6)}$ et d'une courbe $c^{(4)}$ du quatrième ordre, décrite par le point d'intersection d'une tangente à $\chi^{(3)}$ avec la courbe correspondante $c^{(3)}$, qui n'est pas situé sur $c^{(6)}$; $c^{(4)}$ passe par les huit points doubles de $c^{(6)}$ et a un point triple en le

---

[1] Pour rendre cela évident il faut écrire les équations de la tangente à $\chi^{(2)}$ et du faisceau $(c^{(3)})$ sous la forme:

$$f_1(\eta) \cdot x + f_2(\eta) \cdot y + f_3(\eta) = 0 \qquad u + \eta \cdot v = 0$$

$u = 0$ et $v = 0$ désignant les équations de deux courbes $c^{(3)}$ et choisir l'origine des coordonnées soit en A, soit en un autre point fixe de $(c^{(3)})$.

neuvième point fixe du faisceau ($c^{(3)}$). Ce dernier point ne peut pas être situé sur $c^{(6)}$, car alors $c^{(6)}$ serait unicursale. Les points de $c^{(4)}$ et de $\chi^{(3)}$ ont entre eux une correspondance (1, 1), c'est à dire, un point P de $c^{(4)}$ correspond au point de contact de la tangente à $\chi^{(3)}$, dont la courbe correspondante passe par P; $c^{(4)}$ ne pourra donc être une courbe composée qu'en contenant des droites, dans lesquelles une tangente à $\chi^{(3)}$ coïncide avec une partie de la courbe $c^{(3)}$ correspondante. Un point quelconque d'une telle droite correspondra à son point de contact avec $\chi^{(3)}$.

En appliquant la formule (D) aux courbes $c^{(4)}$ et $\chi^{(3)}$ on aura en posant $n_1 = 1$, $n_2 = 3$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $s_1 = 0$:

$$s_2 = 6;$$

$c^{(4)}$ ne peut pas avoir un point ordinaire Q en un point d'inflexion ou un point de rebroussement de $\chi^{(3)}$ sans être tangente à $\chi^{(3)}$ en ce point, car autrement — comme nous l'avons démontré plus haut — les trois tangentes à $\chi^{(3)}$ passant par un point sur $c^{(4)}$ infiniment près de Q appartiendront à un seul et même groupe soit r_1 soit r_2.

En appliquant les formules (B) et (D) aux courbes $c^{(6)}$ et $\chi^{(3)}$, on aura en posant $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $s_1 = 0$:

$$s_2 = 8 \quad \text{et} \quad k_1 + t = 8.$$

$\chi^{(3)}$ a donc avec $c^{(6)}$ seize points d'intersection coïncidant deux à deux ou en des points de contact ou en des points de rebroussement de $c^{(6)}$.

Si l'on veut qu'un point fixe du faisceau ($c^{(3)}$) soit un point de rebroussement sur $c^{(6)}$, il faut le choisir sur $\chi^{(3)}$, c'est à dire en un point d'intersection Q de $\chi^{(3)}$ avec $c^{(4)}$. Si Q est un point d'intersection ordinaire des deux courbes ou si Q est un point de rebroussement ou un point d'inflexion de $\chi^{(3)}$ au contact de $\chi^{(3)}$ avec $c^{(4)}$, Q est compté au moins une fois dans le nombre s_2; si Q est un point de contact ordinaire de $c^{(4)}$ avec $\chi^{(3)}$ compris dans le nombre t, il ne pourra pas être un point de rebroussement de $c^{(6)}$. Car deux des trois tangentes à $\chi^{(3)}$ passant par Q auront leurs points de contact coïncidant en Q tandis que le point de contact de la troisième tangente sera un point différent de Q. Deux des courbes $c^{(3)}$ correspondantes auront donc en Q la même tangente que $\chi^{(3)}$ tandis que la troisième a une tangente différente. La courbe décrite par les points d'intersection des tangentes à $\chi^{(3)}$ avec les courbes $c^{(3)}$ a donc en Q un point triple où deux branches sont tangentes à $\chi^{(3)}$, tandis que la troisième a une tangente différente de la tangente à $\chi^{(3)}$. Une des branches tangentes à $\chi^{(3)}$ est $c^{(4)}$; Q ne peut donc pas être un point de rebroussement de $c^{(6)}$. Il s'ensuit que $c^{(6)}$ ne peut avoir des points de rebroussement qu'aux points d'intersection de $\chi^{(3)}$ avec $c^{(4)}$ contenus dans le nombre s_2.

Si $c^{(4)}$ contient une tangente à $\chi^{(3)}$, le point de contact est compris dans le nombre t, les deux points d'intersection dans le nombre s_2. La tangente passe par le point triple de $c^{(4)}$ et par deux autres points fixes du faisceau $(c^{(3)})$. Si trois tangentes à $\chi^{(3)}$ font partie de $c^{(4)}$, le reste de $c^{(4)}$ sera une tangente double ou une tangente d'inflexion à $\chi^{(3)}$. D'ailleurs les démonstrations précédentes s'appliquant aussi aux cas, où $c^{(4)}$ est composée, on voit bien que pour $r = 3$ $c^{(6)}$ ne peut avoir plus de six points de rebroussement.

Si la droite l joignant les deux points d'intersection mobiles de $c^{(6)}$ avec une courbe $c^{(3)}$ passe constamment par un point O, l'équation de l peut s'écrire:

$$xf_1(\eta) + yf_2(\eta) = 0$$

quand on choisit l'origine des coordonnées en O. O ne pourra pas être un point double de $c^{(6)}$, car alors $f_1(\eta)$ et $f_2(\eta)$ seraient du deuxième degré par rapport à η, et la courbe décrite par les points d'intersection de l avec $c^{(3)}$ serait du septième ordre, c'est à dire elle serait composée de $c^{(6)}$ et d'une droite, ce qui est impossible, puisque elle aurait un point quadruple en O. Il est également clair, que O ne pourra pas être un point ordinaire de $c^{(6)}$. Si O n'est situé ni sur $c^{(6)}$ ni dans le neuvième point fixe B du faisceau $(c^{(3)})$, $f_1(\eta)$ et $f_2(\eta)$ seront du troisième degré par rapport à η. La courbe décrite par les points d'intersection de l avec les courbes $c^{(3)}$ sera composée de $c^{(6)}$ et d'une courbe $c^{(4)}$ du quatrième ordre passant par O et par les points doubles de $c^{(6)}$. $c^{(4)}$ a un point triple en B, et peut être composée d'une courbe du troisième ordre à point double en B et d'une droite passant par O, B et deux autres points fixes du faisceau $(c^{(3)})$. Les trois courbes $c^{(3)}$ correspondant à une droite l passent par les trois points d'intersection de l avec $c^{(4)}$ différents de O. Un point fixe Q du faisceau $(c^{(3)})$ ne pourra donc être un point de rebroussement de $c^{(6)}$ que 1° si la droite passant par Q est une tangente à $c^{(4)}$ ou 2° si $c^{(4)}$ contient une courbe du troisième ordre à un point de rebroussement en

B et que Q soit situé sur OB; $c^{(6)}$ ne pourra donc pas avoir plus de cinq points de rebroussement.

Si O coïncide avec B, les points d'intersection de l avec les courbes $c^{(3)}$ décriront outre $c^{(6)}$ une courbe du quatrième ordre à un point quadruple en O. Cette courbe est composée de quatre droites chacune contenant O et deux autres points fixes du faisceau $(c^{(3)})$. Des trois courbes $c^{(3)}$ correspondant à une de ces droites l_1 l'une est composée de l_1 et d'une conique passant par les six points fixes du faisceau non situés sur l_1; les deux autres sont tangentes à $c^{(6)}$ en les points doubles situés sur l_1. Ces deux courbes coïncideront si l'un des points doubles sur l_1 est un point de rebroussement. O est un point d'inflexion de toutes les courbes $c^{(3)}$; nous désignerons par a la droite contenant tous les points de contact des tangentes aux courbes $c^{(3)}$ menées par O. Si l'on projette $c^{(6)}$ de manière que O devienne le point à l'infini dans la direction perpendiculaire à a toutes les courbes $c^{(3)}$ et par suite $c^{(6)}$ seront des courbes symétriques, dont a est l'axe de symétrie commun. $c^{(6)}$ ne peut donc avoir qu'un nombre pair de points de rebroussement.

Nous avons donc démontré que *toute courbe du $6^{\text{ième}}$ ordre ayant 8 points de rebroussement et 0 point double peut être transformée homographiquement en une courbe symétrique.* On voit aussi *qu'il n'y a pas de courbes du $6^{\text{ième}}$ ordre à 7 points de rebroussement et 1 point double.*

Considérons la courbe $k^{(6)}$ du sixième ordre et de la sixième classe à huit points de rebroussement. Si l est représentée par l'équation $y = \alpha x$ et si η est le paramètre de la courbe $c^{(3)}$, à laquelle la droite représentée par $y = \eta x$ est tangente en O, il y a entre α et η une équation du premier degré par rapport à α et du troisième degré par rapport à η. Si l'on pose $\alpha = \eta$, cette équation donnera les paramètres des quatre droites passant par O et deux autres points fixes du faisceau $(c^{(3)})$. Soient ces paramètres 0, ∞, β et γ. Comme pour $\alpha = \infty$ l'équation entre α et η résolue par rapport à η aura une racine double η_1, elle pourra s'écrire:

$$\eta(\eta - \beta)(\eta - \gamma) + a(\eta - \alpha)(\eta - \eta_1)^2 = 0$$

a désignant une constante. En substituant $\alpha = 0$, $= \beta$ et $= \gamma$ et en divisant l'équation respectivement par η, $\eta - \beta$ et $\eta - \gamma$, on aura trois équations du second degré. Comme chacune de ces équations a deux racines égales, on a:

$$4(1+a)(\beta\gamma - a\eta_1^2) - (\beta + \gamma + 2a\eta_1)^2 = 0$$

$$4(1+a)\eta_1^2 - (\gamma + 2a\eta_1)^2 = 0$$

$$4(1+a)a\eta_1^2 - (\beta + 2a\eta_1)^2 = 0.$$

La soustraction des deux dernières équations donne, le facteur $\beta - \gamma$ supprimé: $\beta + \gamma = -4a\eta_1$; en ajoutant on a $\beta\gamma = -4a\eta_1^2$. Si dans la première des trois équations on substitue $\eta_1 = \dfrac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}$ et $a = \dfrac{-(\beta+\gamma)^2}{4\beta\gamma}$ l'équation se réduit à:

$$\beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma = 0.$$

Le rapport anharmonique des quatre droites joignant 2 points de rebroussement symétriques de la courbe $k^{(6)}$ est donc = une des valeurs imaginaires de $(-1)^{\frac{1}{3}}$, c'est à dire, les quatre droites ont la situation équianharmonique.

II.

Désignons par $k^{(6)}$, $k^{(4)}$ et $k^{(3)}$ les trois courbes à examiner. En tournant autour de leurs axes de symétrie elles engendrent trois surfaces de révolution $F^{(6)}$, $F^{(4)}$ et $F^{(3)}$ de la sixième classe. Chacune des trois surfaces a quatre cônes circonscrits engendrés par deux tangentes d'inflexion symétriques. $F^{(6)}$ a quatre cercles de rebroussement; $F^{(4)}$ a un cercle de rebroussement et est touchée par un plan D perpendiculaire à l'axe de révolution le long d'un cercle $d^{(2)}$. $F^{(3)}$ est coupée par un plan V perpendiculaire à l'axe de révolution suivant trois droites coïncidant à l'infini.

Je désignerai par $\chi^{(2)}$ toute conique ayant avec une des courbes symétriques deux contacts stationnaires en deux points symétriques. Si les deux points de contact sont soit deux points de rebroussement soit les deux points de contact d'une tangente double, la conique $\chi^{(2)}$ se réduit à une conique infiniment aplatie dont les sommets occupent soit les points de rebroussement soit les points de contact de la tangente double. Si les points de contact de $\chi^{(2)}$ sont deux points d'inflexion symétriques, $\chi^{(2)}$ se compose des deux tangentes d'inflexion. Si le point à l'infini dans la direction perpendiculaire à l'axe de symétrie est un point d'inflexion de la courbe symétrique et que les points de contact de $\chi^{(2)}$ se confondent en ce point, $\chi^{(2)}$ sera une conique infiniment aplatie renfermée dans la tangente d'inflexion, dont les sommets coïncident à l'infini. — Si l'on fait tourner la courbe symétrique autour de son axe de symétrie, on aura une surface de révolution, dont *la surface du second ordre engendrée par une conique $\chi^{(2)}$ contiendra trois parallèles consécutifs. Nous désignerons par $\Pi^{(2)}$ cette surface du second ordre;* ses géneratrices sont les tangentes principales à la surface, c'est à dire, les asymptotes de l'indicatrice, en les points du cercle de contact. Il faut remarquer, que si $\chi^{(2)}$ est une conique infiniment aplatie, dont les sommets coïncident à l'infini, elle engendrera une surface $\Pi^{(2)}$ qui se réduit aux deux points I et J à l'infini sur le cercle dans un plan perpendiculaire à l'axe de révolution.

Maintenant nous allons projeter chacune des surfaces $F^{(6)}$, $F^{(4)}$ et $F^{(3)}$ d'un centre de projection quelconque P sur un plan perpendiculaire au plan passant par P et par l'axe de révolution. Le contour apparent sera donc toujours une courbe symétrique de la sixième classe. La trace d'un plan A passant par P sera une tangente double ou une tangente d'inflexion dans les trois cas suivants: 1° si A est tangent à un cône engendré par deux tangentes d'inflexion symétriques à la courbe méridienne de la surface; alors la trace de A est une tangente d'inflexion; 2° si A est un plan tangent à la surface, dont P est le point de contact; alors les points de contact de la trace de A sont les traces des tangentes principales à la surface en P, et la trace de A sera une tangente d'inflexion, si P est choisi sur $d^{(2)}$ ou sur un cercle de rebroussement; 3° si A est un plan perpendiculaire à l'axe de révolution et tangent à la surface le long d'un cercle; alors les points de contact sont les traces des tangentes menées par P au cercle de contact.

On voit donc, que, si P n'est choisi ni sur les surfaces ni dans D ni dans V le contour apparent vu de P sera une courbe de la sixième classe sans tangente double, mais qui aura huit tangentes d'inflexion, c'est à dire, la courbe $k^{(6)}$. Si P est un point ordinaire d'une des surfaces, ou si P est choisi soit dans le plan D soit dans le plan V, le contour apparent sera une courbe de la sixième classe avec huit tangentes d'inflexion et une tangente double, c'est à dire, $k^{(4)}$. Si P est choisi soit sur la droite à l'infini de $F^{(3)}$ soit sur $d^{(2)}$ soit sur un cercle de rebroussement le contour apparent vu de P sera une courbe de la sixième classe sans tangente double et ayant neuf tangentes d'inflexion, c'est à dire, $k^{(3)}$.

Nous désignerons par I et J les points à l'infini sur le cercle dans un plan perpendiculaire à l'axe de révolution d'une quelconque des surfaces. Les points I et J de la surface $F^{(6)}$ sont des points triples; ce sont de points doubles sur les surfaces $F^{(4)}$ et $F^{(3)}$. Les droites joignant I et J aux points d'intersection de la surface avec l'axe de révolution sont contenues dans la surface. Ces droites sont projetées comme les tangentes menées au contour apparent de la surface par les projections de I et de J. On voit donc, que le contour apparent de $F^{(6)}$ ne passe pas par les projections de I et de J, tandis que le contour apparent de $F^{(4)}$ passe toujours par les projections de I et de J, si le centre de projection n'est pas choisi dans le plan D. Les points I et J de $F^{(3)}$ sont projetés comme des points de rebroussement d'un centre de projection quelconque non situé dans V.

Comme les points de rebroussement des contours sont ou bien les projections de points singuliers des surfaces ou bien les traces des tangentes principales passant par le centre de projection, on voit, qu'on peut faire passer par un point arbitraire P quatre surfaces $\Pi^{(2)}$ circonscrites à une des surfaces $F^{(6)}$ ou $F^{(4)}$. Si l'on considère la surface $F^{(3)}$, une des quatre surfaces $\Pi^{(2)}$ se réduit aux points I et J. Si P est un point ordinaire d'une des surfaces, trois des quatre surfaces $\Pi^{(2)}$ coïncident avec celle dont le cercle de contact passe par P. Si P est choisi dans un des plans D ou V, trois des quatre surfaces $\Pi^{(2)}$ se réduisent à ce plan.

Du théorème démontré à la fin de la section I on déduit les résultats suivants en désignant par ε une des valeurs imaginaires de $(-1)^{\frac{1}{3}}$.

Construisons les quatre surfaces $\Pi^{(2)}$ circonscrites à $F^{(6)}$ ou à $F^{(4)}$, ou les quatre coniques $\chi^{(2)}$ ayant deux contacts stationnaires avec $k^{(6)}$ ou $k^{(4)}$, qui passent par un point donné P. Alors le rapport anharmonique des quatre plans tangents aux surfaces $\Pi^{(2)}$ en P, et de même le rapport anharmonique des quatre tangentes aux coniques $\chi^{(2)}$ en P, sera $= \varepsilon$. Ce théorème est encore vrai pour la surface $F^{(3)}$ et pour la courbe $k^{(3)}$ à cela près, que par rapport à $F^{(3)}$ et à $k^{(3)}$ s'opère respectivement la réduction d'une des surfaces $\Pi^{(2)}$ et d'une des coniques $\chi^{(2)}$ à un plan perpendiculaire à l'axe de révolution (c. à. d. passant par la droite IJ) d'une part et d'autre part à une droite perpendiculaire à l'axe de symétrie.

Comme la courbe correspondant à $k^{(6)}$ d'après le principe de dualité est une courbe de la même espèce, le rapport anharmonique des quatre points d'intersection de l'axe de symétrie avec les tangentes d'inflexion, est aussi égal à ε. On a donc:

Le rapport anharmonique des sommets des quatre cônes $\Pi^{(2)}$ circonscrits aux surfaces $F^{(6)}$, $F^{(4)}$ ou $F^{(3)}$, et de même le rapport anharmonique des quatre points d'intersection de deux tangentes d'inflexion symétriques aux courbes $k^{(6)}$, $k^{(4)}$ et $k^{(3)}$, est $= \varepsilon$.

Ce théorème est susceptible d'extension. Comme deux tangentes d'inflexion symétriques à une section faite dans une des surfaces $F^{(6)}$, $F^{(4)}$ ou $F^{(3)}$ par un plan quelconque sont deux génératrices d'une surface $\Pi^{(2)}$ tangente au plan, on a le théorème sous la forme suivante:

Etant donnés un plan et une des surfaces $F^{(6)}$, $F^{(4)}$ ou $F^{(3)}$ on peut construire quatre surfaces $\Pi^{(2)}$ tangentes au plan. Le rapport anharmonique des points de contact est $= \varepsilon$. De même parmi les coniques $\chi^{(2)}$ ayant avec une des courbes $k^{(6)}$, $k^{(4)}$ ou $k^{(3)}$ deux contacts stationnaires il y en a quatre qui sont tangentes à une droite donnée, et le rapport anharmonique des quatre points de contact est $= \varepsilon$.

Le contour d'une surface $\Pi^{(2)}$ vu d'un point P est une conique $\chi^{(2)}$ à deux contacts stationnaires avec le contour de la surface, à laquelle $\Pi^{(2)}$ est circonscrite, vu du même point P. On a donc le théorême suivant:

Si l'on considère une des surfaces $F^{(6)}$, $F^{(4)}$ ou $F^{(3)}$, on trouve quatre surfaces $\Pi^{(2)}$ tangentes à une droite donnée. Le rapport anharmonique des points de contact, ainsi que celui des quatre plans tangents aux surfaces $\Pi^{(2)}$ en ces points de contact, est $= \varepsilon$.

Pour cela on doit considérer une section faite dans la surface par un plan passant par la droite, ou le contour apparent de la surface vu d'un point sur la droite. (¹)

On pourra faire passer trois cônes de révolution circonscrits à la surface $F^{(4)}$ par le cercle de rebroussement $k^{(2)}$. Ces cônes portent dans mon mémoire cité plus haut le nom de *cônes kummériens,* parceque pour la surface $F^{(4)}$ ils jouent le même rôle que les cônes kummériens des surfaces du quatrième ordre à une conique double. Le contour de $F^{(4)}$

(¹) Cette remarque m'a été communiquée par M. ZEUTHEN.

vu d'un point P de $k^{(2)}$ est une courbe $k^{(3)}$; les traces des plans tangents en P à la surface et aux cônes kummériens sont la tangente d'inflexion v et les trois tangentes ordinaires à $k^{(3)}$ perpendiculaires à l'axe de symétrie, tandis que les quatre droites de la surface passant par I sont projetées comme quatre tangentes à $k^{(3)}$ menées par un point sur la courbe. On voit donc que les quatre sommets $TT_1T_2T_3$ du cône circonscrit à $F^{(4)}$ le long de $k^{(2)}$ et des cônes kummériens ont le même rapport anharmonique que les quatre points d'intersection $A_1A_2A_3A_4$ de $F^{(4)}$ avec l'axe de révolution. L'involution de couples de points déterminée, p. ex. par les couples de points A_1A_2 et A_3A_4 contient un couple composé p. ex. des points T et T_1 et un couple composé de T_2 et T_3, et l'on aura $(A_1A_2A_3A_4) = = (TT_1T_2T_3)$ ou $= \frac{1}{(TT_1T_2T_3)}$.(¹) On voit donc, que les quatre points d'intersection d'une courbe $k^{(4)}$ avec son axe de symétrie ont le même rapport anharmonique que la tangente en un point de rebroussement et les trois tangentes menées à la courbe par le point de rebroussement. Le contour de la surface $F^{(6)}$, vu d'un point P sur la surface, et de même le contour d'une des surfaces $F^{(4)}$ ou $F^{(8)}$, vu d'un point P pris soit sur la surface, soit dans le plan D, soit dans le plan V, est la courbe $k^{(4)}$. Les points d'intersection de $k^{(4)}$ avec son axe de symétrie sont les projections des sommets des quatre cônes de révolution circonscrits à la surface et passant par P. Les points de rebroussement Q et Q_1 de $k^{(4)}$ sont les traces des deux génératrices PQ et PQ_1 de la surface $\Pi^{(2)}$ passant par P, mais dont le cercle de contact est différent du parallèle passant par P; la tangente à $k^{(4)}$ en Q et les trois autres tangentes à $k^{(4)}$ menées par Q sont les traces des quatre plans tangents communs à la surface et à $\Pi^{(2)}$ passant par la génératrice PQ, dont le premier a un point commun de contact avec les deux surfaces; ce point est situé sur leur cercle de contact. Le rapport anharmonique des sommets des quatre cônes circonscrits passant par P est donc égal à celui des sommets des quatre cônes circonscrits communs à la surface et à $\Pi^{(2)}$; l'un de ces cônes est circonscrit à $\Pi^{(2)}$ le long de son cercle de contact avec la surface. Le théorème démontré pourra donc s'énoncer de la manière suivante:

Par le rapport anharmonique d'une conique $\chi^{(2)}$ ayant avec une des courbes

(¹) Voir mon mémoire cité plus haut p. 78.

$k^{(3)}$, $k^{(4)}$ ou $k^{(6)}$ deux contacts stationnaires en deux points symétriques nous désignerons celui des quatre points d'intersection de l'axe de symétrie avec les tangentes communes à $\chi^{(2)}$ et à la courbe, deux de ces tangentes étant les tangentes à $\chi^{(2)}$ aux points de contact avec la courbe. Nous avons donc démontré, que le rapport anharmonique d'une conique $\chi^{(2)}$ est égal au rapport anharmonique des quatre tangentes menées à la courbe par un quelconque des points d'intersection de $\chi^{(2)}$ soit avec la courbe, soit avec la tangente double à $k^{(4)}$, soit enfin avec la tangente d'inflexion v à $k^{(3)}$.

Le nombre de coniques $\chi^{(2)}$ ayant un rapport anharmonique donné peut se trouver de la manière suivante. Considérons une courbe $k^{(3)}$ et choisissons pour l'axe des ordonnées v et pour l'axe des abscisses l'axe de symétrie. Si par deux points symétriques de v determinés par $y^2 = \beta$ on mène les tangentes à $k^{(3)}$, les abscisses des points d'intersection des tangentes avec l'axe de symétrie se détermineront par une équation du quatrième degré $L = 0$, dont les coefficients sont des polynômes entiers et rationnels du troisième degré par rapport à β. Le rapport anharmonique h des points d'intersection se détermine par l'équation:

$$i^3 - 24k \,.\, j^2 = 0 \tag{1}$$

où $k = \dfrac{(1 - h + h^2)^3}{(1 + h)^2 (2 - h)^2 (1 - 2h)^2}$, tandis que i et j sont les invariantes de $L = 0$ du second et du troisième degré respectivement par rapport aux coefficients. Comme pour $\beta = 0$ toutes les racines de $L = 0$ s'évanouissent de telle manière, que la limite du rapport $\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{\beta}}{x}$ a quatre valeurs, qui ne sont ni $= 0$ ni $= \infty$, il faut, que les coefficients de x et de x^0 soient divisibles par β^2, d'où s'ensuit, que i^3 et j^2 sont divisibles par β^6. Ce facteur supprimé l'équation (1) pourra s'écrire sous la forme:

$$A^3 - 24k \,.\, B^2 = 0 \tag{2}$$

A^3 et B^2 étant du douzième degré par rapport à β. Pour $k = 1$ on a:

$$A^3 - 24B^2 \equiv D = 0$$

ou $D = 0$ désigne le discriminant de l'équation $L = 0$, divisé par β^6. $L = 0$ n'a de racines doubles que pour $y = 0$ ou $y =$ l'ordonnée d'un point d'intersection de v avec une autre tangente d'inflexion. Soit y_1 une telle ordonnée; $\beta = y_1^2$ sera donc une racine triple de $D = 0$, et $D = 0$

pourra s'écrire $E^3 = 0$, ou les racines de l'équation du quatrième degré par rapport à β $E = 0$ correspondent aux dits points d'intersection. On voit donc que l'équation (2) pourra s'écrire:

$$(3)\quad (1-k)A^3 + kE^3 \equiv (1-k)\left[A + \sqrt[3]{\frac{k}{1-k}}E\right]\left[A + \varepsilon\sqrt[3]{\frac{k}{1-k}}E\right]\left[A + \varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{k}{1-k}}E\right] = 0.$$

Il y a une correspondance (1, 1) entre le paramètre β d'un couple de points sur v et le paramètre α, p. ex. l'abscisse commune des deux points de contact de la conique $\chi^{(2)}$ passant par le couple de points sur v; comme le rapport anharmonique des quatre droites passant par les points de contact de deux tangentes d'inflexion symétriques est $= \varepsilon$, (¹) on voit, que le rapport anharmonique des racines de $E = 0$ a la même valeur. Considérons une surface $F^{(4)}$ ou $F^{(6)}$ et son contour apparent $k^{(3)}$ vu d'un point pris sur un cercle de rebroussement; il y aura donc une correspondance (1, 1) entre le paramètre α de deux points symétriques sur $k^{(3)}$ et le paramètre γ du parallèle passant par les points de la surface, dont les deux points sur $k^{(3)}$ sont les projections. Il existe donc entre β et γ une relation linéaire par rapport à tous les deux paramètres, et au moyen de cette relation on peut introduire γ dans l'équation (3) en éliminant β. Si pour paramètre d'une surface $\Pi^{(2)}$ on choisit le paramètre du cercle de contact, on voit, que les paramètres des surfaces $\Pi^{(2)}$ circonscrites à une des surfaces $F^{(3)}$, $F^{(4)}$ et $F^{(6)}$, qui ont un rapport anharmonique donné, se determinent par une équation de la forme (3). Il y a donc 12 coniques à deux contacts stationnaires avec une des courbes $k^{(3)}$, $k^{(4)}$ ou $k^{(6)}$, qui ont un rapport anharmonique donné; si le rapport anharmonique est $= -1$ ou $= \varepsilon$, le nombre de coniques $\chi^{(2)}$ se réduit respectivement à 6 et à 4. Les nombres de points sur $k^{(6)}$ ou sur $k^{(4)}$, par lesquels on peut mener quatre tangentes à la courbe, dont le rapport anharmonique a une valeur donnée, sont donc égaux à 72 ou à 24; si la valeur donnée est $= -1$, les nombres se réduisent à 36 et à 12, si elle est $= \varepsilon$, les nombres se réduisent à 24 et à 8.

Copenhague 10 janvier 1883.

(¹) Voir Clebsch: Vorlesungen über Geometrie, 1 Bd., Leipzig 1876, p. 564.