SUR DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES ANALOGUES AUX FONCTIONS MODULAIRES

PAR

EMILE PICARD
à PARIS.

On sait à quelle classe importante de fonctions d'une variable conduit, quand elle est possible d'une manière uniforme, l'inversion du quotient de deux solutions d'une équation linéaire du second ordre à coefficients algébriques. On peut procéder d'une manière analogue pour obtenir une classe remarquable de fonctions de deux variables indépendantes: considérons, à cet effet, un système d'équations linéaires simultanées aux dérivées partielles:

$$r = ap + bq + cz$$
$$s = a_1p + b_1q + c_1z$$
$$t = a_2p + b_2q + c_2z$$

où les a, b, c sont des fonctions algébriques des deux variables indépendantes x et y.

Ces équations ne peuvent avoir plus de trois solutions communes linéairement indépendantes; supposons qu'elles existent effectivement et désignons les par ω_1, ω_2 et ω_3. Les cas où les équations

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u, \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = v$$

donnent pour x *et* y des fonctions uniformes de u et v nous conduisent à des fonctions de deux variables analogues à ces fonctions uniformes d'une variable obtenues par l'inversion du quotient de deux solutions d'une équation linéaire du second ordre.

Je me propose d'indiquer dans cette étude un exemple de fonctions de deux variables pouvant être obtenues par cette voie. Considérons d'abord les expressions

$$\int_g^h \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}}$$

où g et h désignent deux des quantités 0, 1, x et ∞. Il est bien connu qu'elles satisfont à l'équation linéaire du second ordre

$$(x^2-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(1-2x)\frac{dy}{dx}+\frac{y}{4}=0$$

et on sait qu'en prenant deux solutions convenables ω_1 et ω_2 de cette équation la fonction x de u donnée par l'équation:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=u$$

est uniforme et définie seulement pour la moitié du plan de la variable u située au dessus de l'axe réel: c'est la fonction modulaire qui joue un rôle si important dans la théorie des fonctions elliptiques.

Envisageons maintenant les intégrales définies

$$\int_g^h \frac{dt}{\sqrt[3]{t(t-1)(t-x)(t-y)}}$$

où g et h désignent deux des quantités 0, 1, x, y et ∞. Ces expressions considérées comme fonctions de x et y satisfont aux trois équations linéaires simultanées aux dérivées partielles:

$$9x(x-1)(x-y)r=(-5x^2+4xy+3x+2y)3p-3y(1-y)q+(x-y)z$$
$$3(x-y)s=p-q$$
$$9y(y-1)(y-x)t=-3x(1-x)p+(-5y^2+4xy+3y+2x)q+(y-x)z;$$

ces équations ont trois solutions communes linéairement indépendantes. *Nous établissons qu'en désignant par ω_1, ω_2, ω_3 trois solutions convenables, les équations;*

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u, \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = v$$

donnent pour x *et* y *des fonctions uniformes de* u *et* v, *fonctions qui ne seront définies, si on pose* $u = u' + iu''$ *et* $v = v' + iv''$, *que pour les valeurs de* u *et* v *satisfaisant à l'inégalité*

$$2v' + u'^2 + u''^2 < 0$$

Ainsi, de même que la fonction modulaire n'est définie que poûr les valeurs de la variable u, telles que $u'' > 0$, nos deux fonctions x et y ne sont définies que pour les valeurs des variables indépendantes u et v vérifiant l'inégalité précédente.

Ces fonctions x et y restent invariables quand on effectue sur u et v une infinité de substitutions linéaires; nous donnons les substitutions fondamentales de ce groupe. Je termine en montrant rapidement l'intérêt que peuvent présenter ces fonctions x et y dans l'étude des fonctions abéliennes auxquelles conduit la relation algébrique entre z et t

$$z^3 = t(t-1)(t-x)(t-y).$$

relation pour laquelle le nombre caractéristique p est égal à trois. *Nos fonctions de* u *et de* v *jouent dans la théorie de ces fonctions abéliennes le même rôle que la fonction modulaire dans la théorie des fonctions elliptiques.*

(1). Partons de la relation algébrique entre les deux variables z et t:

$$z^3 = t(t-1)(t-x)(t-y)$$

où x et y désignent deux constantes.

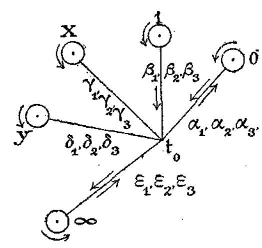
Cette courbe est du troisième genre ($p = 3$); et on peut prendre comme intégrales de première espèce les trois intégrales suivantes:

$$\Omega = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{z^2}$$

$$U = \int_{t_0}^{t} \frac{tdt}{z^2}$$

$$W = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{z},$$

Soit t_0 un point quelconque du plan de la variable t, distinct seulement de 0, 1, x, y. Quelle que soit la disposition des points 0, 1, x et y, on peut joindre le point t_0 aux points 0, 1, x, y par des lignes ne se coupant pas et se suivant autour du point t_0 dans l'ordre 0, 1, x, y; ces lignes nous serviront à définir les lacets élémentaires comme on le fait habituellement dans la théorie des fonctions algébriques. Nous considérerons enfin un cinquième lacet joignant le point t_0 au point ∞; nous le représentons sur la figure que l'on peut supposer être la sphère, et, je le repète, les lacets se suivent autour de t_0 dans l'ordre 0, 1, x, y et ∞. Supposons que t partant de t_0, z ayant la valeur z_1, t_0 décrive le premier lacet, soit α_1 la valeur de l'intégrale Ω, désignons de même par α_2 et α_3 les valeurs de la même intégrale quand pour $t = t_0$, z a successivement ses deux autres déterminations z_2 et z_3. Nous représenterons de même par les lettres β, γ, δ, ε affectées des indices 1, 2, 3 les valeurs analogues de la même intégrale relatives aux autres lacets.



Considérons maintenant les six expressions:

$$a_1 = \beta_1 + \gamma_2 + \delta_3$$

$$a_2 = \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3$$

$$a_3 = \beta_1 + \beta_2 + \gamma_3$$

$$a_4 = -(\gamma_1 + \beta_2 + \gamma_3)$$

$$a_5 = -(\gamma_1 + \delta_2 + \beta_3)$$

$$a_6 = \gamma_1 + \alpha_2 + \beta_3$$

c'est un système de périodes pour l'intégrale Ω, puisque chacune de ces quantités représente la valeur de Ω le long d'un cycle fermé.

Prenons de même l'intégrale W; désignant par α', β', γ' et δ' les quantités analogues aux α, β, γ, δ et posant

$$A_1 = \beta'_1 + \gamma'_2 + \delta'_3$$
$$A_2 = \alpha'_1 + \beta'_2 + \gamma'_3$$
$$A_3 = \beta'_1 + \beta'_2 + \gamma'_3$$
$$A_4 = -(\gamma'_1 + \beta'_2 + \gamma'_3)$$
$$A_5 = -(\gamma'_1 + \delta'_2 + \beta'_3)$$
$$A_6 = \gamma'_1 + \alpha'_2 + \beta'_3$$

nous avons un système de six périodes de l'intégrale W.

Nous commençons par chercher la relation entre les périodes a et A. Suivant la méthode habituelle, nous écrirons que l'intégrale de RIEMANN

$$\sum \int \Omega d W$$

prise le long du contour simple formé par les cinq lacets est nulle, la somme $\sum$ s'étendant aux trois déterminations z_1, z_2, z_3 de z pour $t = t_0$.

Un calcul immédiat donne tout d'abord pour l'expression précédente:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(\alpha'_1 - \beta'_1) + \alpha_2(\beta'_3 - \alpha'_3) \\
&+ (\alpha_1 + \beta_2)(\beta'_2 - \gamma'_2) + (\alpha_2 + \beta_3)(\gamma'_1 - \beta'_1) \\
&+ (\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3)(\gamma'_3 - \delta'_3) + (\alpha_2 + \beta_3 + \gamma_1)(\delta'_2 - \gamma'_2) \\
&+ (\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 + \delta_1)(\delta'_1 + \varepsilon'_2) + (\alpha_2 + \beta_3 + \gamma_1 + \delta_2)(\varepsilon'_2 + \varepsilon'_3 - \delta'_3);
\end{aligned}$$

on a d'ailleurs, bien évidemment

$$\alpha'_1 + \beta'_2 + \gamma'_3 + \delta'_1 + \varepsilon'_2 = 0$$
$$\alpha'_2 + \beta'_3 + \gamma'_1 + \delta'_2 + \varepsilon'_3 = 0$$
$$\alpha'_3 + \beta'_1 + \gamma'_2 + \delta'_3 + \varepsilon'_1 = 0$$

Dans cette relation apparaissent de suite les périodes de W, car les différences telles que $\alpha'_1 - \beta'_1$, $\beta'_2 - \gamma'_2, \ldots$ sont des périodes, puisque

$$\alpha'_1 - \beta'_1 = \alpha'_1 + \beta'_2 + \beta'_3 \ldots$$

il en est de même pour les termes de la dernière ligne, en remarquant que le lacet ∞ ne permute pas les racines dans l'ordre 1, 2, 3 comme les autres lacets, mais dans l'ordre circulaire inverse. On a d'ailleurs;

$$\begin{array}{ll}
\alpha'_1 - \beta'_1 = \alpha'_1 + \beta'_2 + \beta'_3 = A_2 - A_3\,, & \beta'_3 - \alpha'_3 = A_6 + A_2 + A_4 \\
\beta'_2 - \gamma'_2 = - A_4 & \gamma'_1 - \beta'_1 = - A_3 - A_4 \\
\gamma'_3 - \delta'_3 = A_4 + A_3 - A_1 & \delta'_2 - \gamma'_2 = A_3 - A_5 \\
\delta'_1 + \varepsilon'_2 = - A_2 & \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3 - \delta'_3 = - A_2 - A_6
\end{array}$$

substituons ces valeurs dans l'expression précédente et ordonnons par rapport à $A_1, A_2, \ldots A_6$. Il vient

$$\begin{gathered}
- A_1(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) + A_2(\alpha_1 - \alpha_1 - \beta_2 - \gamma_3 - \delta_1 + \alpha_2 - \alpha_2 - \beta_3 - \gamma_1 - \delta_2) + \\
+ A_3(- \alpha_1 + \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 - \alpha_2 - \beta_3 + \alpha_2 + \beta_3 + \gamma_1) + \\
+ A_4(- \alpha_1 - \beta_2 + \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 + \alpha_2 - \alpha_2 - \beta_3) + A_5(- \alpha_2 - \beta_3 - \gamma_1) + \\
+ A_6(\alpha_2 - \alpha_2 - \beta_3 - \gamma_1 - \delta_2),
\end{gathered}$$

on a donc par suite

$$- A_1 a_2 + A_2 a_1 - A_3 a_4 + A_4 a_3 - A_5 a_6 + A_6 a_5 = \sum \int \Omega\, dW = 0$$

Telle est la relation entre les périodes A et a des intégrales Ω et W; on voit que ces périodes sont précisément des périodes normales.

On va voir maintenant que l'on peut facilement évaluer trois des périodes A au moyen des trois autres. En effet quand t étant parti de t_0, avec une certaine valeur initiale pour z, revient au point t_0 après avoir décrit un lacet dans le sens indiqué par la flèche (fig. 1), la valeur de z se trouve multipliée par λ, λ étant la racine cubique imaginaire de l'unité

$$\lambda = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2};$$

on en déduit de suite que

$$A_4 = \lambda A_3\,, \quad A_5 = -\lambda A_1\,, \quad A_6 = \lambda^2 A_2$$

et on trouvera pareillement relativement aux a

$$a_4 = \lambda^2 a_3\,, \quad a_5 = - \lambda^2 a_1\,, \quad a_6 = \lambda a_2$$

et la relation trouvée devient

$$\lambda^2 a_2 A_1 + a_1 A_2 + \lambda a_3 A_3 = 0 \tag{1}$$

En désignant par b les quantités analogues aux a relatives à l'intégrale U, on aura de même

$$\lambda^2 b_2 A_1 + b_1 A_2 + \lambda b_3 A_3 = 0 \tag{2}$$

et nous avons alors le tableau des périodes normales pour les trois intégrales Ω, U et W

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & -\lambda^2 a_1 & a_2 & \lambda^2 a_3 & \lambda a_2 \\ b_1 & b_3 & -\lambda^2 b_1 & b_2 & \lambda^2 b_3 & \lambda b_2 \\ A_1 & A_3 & -\lambda A_1 & A_2 & \lambda A_3 & \lambda^2 A_2 \end{vmatrix}$$

avec les relations (1) et (2).

Passons maintenant aux intégrales normales, nous aurons le tableau des périodes

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}\left(\frac{A_3}{A_1}\right)^2 + \frac{2}{1-\lambda^2}\frac{A_2}{A_1} & -\lambda^2\frac{A_3}{A_1} & \frac{1}{1-\lambda^2}\left(\frac{A_3}{A_1}\right)^2 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)\left(\frac{1}{1-\lambda^2}\right) \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda^2\frac{A_3}{A_1} & \lambda^2 & -\frac{A_3}{A_1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1-\lambda^2}\left(\frac{A_3}{A_1}\right)^2 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)\frac{1}{1-\lambda^2} & -\frac{A_3}{A_1} & \frac{\lambda}{1-\lambda^2}\left(\frac{A_3}{A_1}\right)^2 + \frac{2}{1-\lambda^2}\frac{A_2}{A_1} \end{vmatrix}$$

les a et les b s'éliminent d'eux-mêmes, en remarquant que les équations (1) et (2) donnent

$$\frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{\lambda^2 A_1} = \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{A_2} = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{\lambda A_3}.$$

tableau qui deviendra, en posant

$$\frac{A_2 \lambda^2}{A_1} = v, \quad \frac{A_3}{A_1} = u$$

$$(\mu) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}u^2 + \frac{2i\sqrt{3}}{3}v & -\lambda^2 u & \frac{1}{1-\lambda^2}u^2 - \frac{i\sqrt{3}}{3}v \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda^2 u & \lambda^2 & -u \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1-\lambda^2}u^2 - \frac{i\sqrt{3}}{3}v & -u & \frac{\lambda}{1-\lambda^2}u^2 + \frac{2i\sqrt{3}}{3}v \end{vmatrix}$$

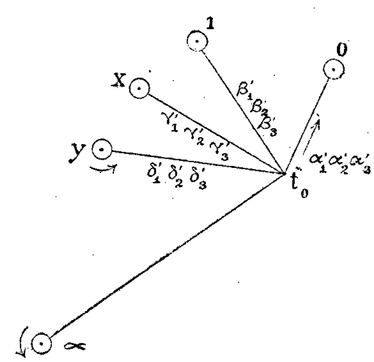
Si l'on fait abstraction des trois premières colonnes et que l'on désigne par α_{gh} $(g, h = 1, 2, 3)$ le coefficient de i dans le terme donné par l'intersection de la ligne de rang g et de la colonne de rang h; on sait que la forme quadratique $\sum m_g m_h \alpha_{gh}$ doit être définie et négative, or ce tableau des coefficients de i est en posant:

$$u = u' + iu'', \quad v = v' + iv''$$

$$\left|\begin{array}{ccc} -u''u' - \frac{u'^2 - u''^2}{6}\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}v & \frac{u'\sqrt{3} + u''}{2} & u'u'' - \frac{u'^2 - u''^2}{6}\sqrt{3} - \frac{v'\sqrt{3}}{3} \\ \frac{u'\sqrt{3} + u''}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -u'' \\ u'u'' - \frac{u'^2 - u''^2}{6}\sqrt{3} - \frac{v'\sqrt{3}}{3} & -u'' & \frac{(u'^2 - u''^2)\sqrt{3}}{3} + \frac{2v'\sqrt{3}}{3} \end{array}\right|$$

Une série de calculs tout élémentaires montre que la condition nécessaire et suffisante pour que la forme désignée par $\sum m_g m_h \alpha_{gh}$ soit définie et négative, se réduit à

$$2v' + u'^2 + u''^2 < 0$$



(2). Nous venons de voir que le tableau des périodes des intégrales normales ne renferme que les deux rapports u et v

$$u = \frac{A_3}{A_1}, \quad v = \frac{\lambda^2 A_2}{A_1}$$

Arrêtons nous maintenant sur les quantités A_1, A_2, A_3. Il est clair qu'elles ne dépendent pas de la valeur de t_0; ce sont des fonctions des seules quantités x et y et c'est à ce point de vue qu'il est intéressant pour notre objet de les considérer. Nous avons en effet

$$A_1 = \beta'_1 + \gamma'_2 + \delta'_3 = -(\varepsilon'_1 + \alpha'_3) =$$

$$= -(1 - \lambda)\int_{t_0}^{\infty}\frac{dt}{z} - \lambda(1 - \lambda^2)\int_{t_0}^{0}\frac{dt}{z} = (1 - \lambda)\left[-\int_{t_0}^{\infty}\frac{dt}{z} + \int_{t_0}^{0}\frac{dt}{z}\right]$$

les valeurs initiales de z dans ces intégrales étant z_1 pour $t = t_0$.

On a de la même manière

$$A_2 = \alpha'_1 + \beta'_2 + \gamma'_3 = \alpha'_1 + \lambda^2\beta'_1 + \lambda\gamma'_1 = (1 - \lambda^2)\int_{t_0}^{0} + \lambda^2(1 - \lambda^2)\int_{t_0}^{1} + \lambda(1 - \lambda^2)\int_{t_0}^{x} =$$

$$= (\lambda^2 - \lambda)\left[\int_{t_0}^{1} - \int_{t_0}^{0}\right] + (\lambda - 1)\left[\int_{t_0}^{x} - \int_{t_0}^{1}\right]$$

et enfin

$$A_3 = (\lambda - 1)\left[\int_{t_0}^{x} - \int_{t_0}^{1}\right]$$

A_1, A_2 et A_3 sont donc des combinaisons linéaires et homogènes d'intégrales de la forme:

$$\int_{g}^{h} \frac{dt}{\sqrt[3]{t(t-1)(t-x)(t-y)}}$$

g, h désignant 0, 1, x ou y.

On peut appliquer à ces intégrales un résultat général établi dans mon mémoire sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux séries hypergéométriques (*Annales de l'Ecole Normale, 1881*). J'y ai considéré les intégrales de la forme

$$\int_{g}^{h} t^{b_1-1}(t-1)^{b_2-1}(t-y)^{b_3-1}(t-x)^{\lambda-1}dt$$

g, h désignant deux quelconques des quantités 0, 1, y, x et ∞. Ces expressions satisfont à un système de trois équations linéaires simultanées aux dérivées partielles ayant trois solutions communes linéairement indépendantes et trois seulement; j'écris seulement deux de ces équations:

$$(x - y)s = (1 - b_3)p + (\lambda - 1)q$$

$$(\varepsilon) \quad x(x-1)(x-y)r + [(5 - 2\lambda - b_1 - b_2 - b_3)x^2 + (2\lambda + b_1 + b_2 - 4)xy +$$
$$+ (\lambda - 3 + b_1 + b_3)x - (\lambda + b_1 - 2)y]p + (1 - \lambda)y(1 - y)q +$$
$$+ (\lambda - 1)(3 - \lambda - b_1 - b_2 - b_3)(x - y)z = 0$$

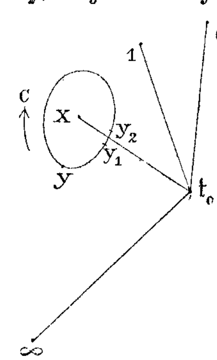
où p, q, r, s désignent, suivant l'usage, les dérivées partielles de z par rapport à x et y. Ces équations, avec d'autres notations, ont été, à un autre point de vue, rencontrées par M. APPELL dans son beau travail sur les séries hypergéométriques de deux variables *(C. R. 1880 et Journal de Liouville).*

Dans le cas actuel, on a

$$b_1 = b_2 = b_3 = \lambda = \frac{2}{3}$$

et en substituant ces valeurs dans les équations précédentes, on aura un système de deux équations simultanées (ε) admettant trois solutions communes linéairement indépendantes, auxquelles satisfont les périodes A_1, A_2 et A_3 considérées comme fonctions de x et y. Ce système d'équations linéaires rappelle l'équation linéaire du second ordre à laquelle satisfont les périodes de l'intégrale elliptique considérées comme fonctions du module et cette analogie nous apparaîtra plus étroite encore quand nous ferons l'inversion des rapports des périodes.

3. Nous allons maintenant chercher le groupe des substitutions qui permettent d'exprimer toutes les déterminations de A_1, A_2, A_3 au moyen d'un système de ces valeurs. Laissant y constant, nous allons d'abord faire tourner successivement y autour des points 0, 1 et x et chercher la substitution linéaire correspondante. Nous avons trouvé plus haut les expressions de A_1, A_2, A_3 au moyen d'intégrales définies prises suivant certaines lignes allant de t_0 au point 0, 1, x et ∞. Ces intégrales sont des fonctions uniformes et continues de y, tant que y ne franchit aucune de ces coupures.



Faisons décrire à y le contour C enveloppant le point x, la coupure t_0x a été franchie, voyons quelles variations vont en résulter pour A_1, A_2, A_3. Des quatre intégrales

$$\int_{t_0}^{x} \frac{dt}{z}, \quad \int_{t_0}^{1} \frac{dt}{z}, \quad \int_{t_0}^{0} \frac{dt}{z}, \quad \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{z}$$

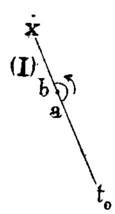
la première seule prend une valeur différente.

Soient y_1 et y_2 deux points de part et d'autre de la coupure infiniment rapprochés; la substitution que nous cherchons est la même que celle qui donnent les variations de A_1, A_2, A_3 quand y_1 vient en y_2 après avoir décrit le contour C: c'est cette substitution que nous allons chercher. Il nous faut pour cela trouver la variation de

$$\int_{t_0}^{x} \frac{dt}{z}$$

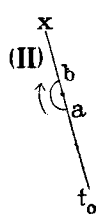
y étant sur le bord gauche puis sur le bord droit de la coupure $t_0 x$.

Si y est sur le bord gauche (fig. I), on devra pour former l'intégrale



$$\int_{t_0}^{x}$$

éviter le point y par un demi cercle ab situé à droite de la coupure. Quand au contraire y sera sur le bord droit (fig. II), on l'évitera par un demi cercle ab situé à gauche de la coupure; la différence des deux intégrales ainsi évaluées s'obtient immédiatement, c'est



$$(\lambda - 1)\left[\int_{t_0}^{x} - \int_{t_0}^{y}\right]$$

ces intégrales ayant leur signification initiale.

En désignant par A'_1, A'_2, A'_3 les nouvelles valeurs de A_1, A_2, A_3, on tire du résultat précédent en se reportant aux valeurs de A_1, A_2, A_3

$$A'_1 = A_1$$
$$A'_2 = A_2 + (\lambda^2 - 1)A_3 - (\lambda - 1)A_1$$
$$A'_3 = A_3 + (\lambda^2 - 1)A_3 - (\lambda - 1)A_1$$

et en posant

$$U = \frac{A'_3}{A'_1}, \quad V = \frac{\lambda^2 A'_2}{A'_1}$$

comme on a posé

$$u = \frac{A_3}{A_1}, \quad v = \frac{\lambda^2 A_2}{A_1}$$

on aura:

$$(S_1)\qquad \begin{aligned} U &= \lambda^2 u - (\lambda - 1) \\ V &= v + (\lambda - \lambda^2)u - (1 - \lambda^2) \end{aligned}$$

En faisant tourner de même le point y autour du point 1, nous obtenons la substitution

$$\begin{aligned} A'_1 &= A_1 \\ A'_2 &= A_2 + (\lambda - 1)A_3 - (\lambda - 1)A_1 \\ A'_3 &= \lambda^2 A_3 + (1 - \lambda^2)A_1 \end{aligned}$$

ce qui nous donne:

$$(S_2)\qquad \begin{aligned} U &= \lambda^2 u + (1 - \lambda^2) \\ V &= v + (1 - \lambda^2)u - (1 - \lambda^2) \end{aligned}$$

Enfin en faisant tourner y autour du point 0, nous obtenons

$$\begin{aligned} A'_1 &= A_1 + (1 - \lambda)(-\lambda A_1 + \lambda A_2) \\ A'_2 &= A_2 - (\lambda^2 - 1)(-\lambda A_1 + \lambda A_2) \\ A'_3 &= A_3 \end{aligned}$$

ce qui nous donne pour u et v la substitution correspondante

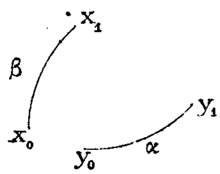
$$(S_3)\qquad \begin{aligned} U &= \frac{u}{-2\lambda + (\lambda^2 - 1)v} \\ V &= \frac{\lambda v + (\lambda^2 - 1)}{-2\lambda + (\lambda^2 - 1)v} \end{aligned}$$

Nous venons de trouver les substitutions donnant les valeurs de A_1, A_2 et A_3 quand, x resté constant, y tourne successivement autour des points 0, 1 et x; en combinant ces substitutions de toutes les manières possibles on aura le groupe des substitutions donnant toutes les valeurs de A_1, A_2, A_3 quand, x restant constant, y décrit un contour fermé quelconque.

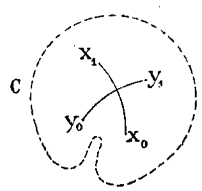
Si laissant y constant, on fait décrire à x un contour fermé quelconque, le groupe des substitutions correspondantes sera évidemment le même, à cause de la symétrie de x et y.

Nous devons enfin supposer que x et y varient simultanément. Soit

x_0, y_0 un système de valeurs initiales de x et y. Si on donne pour $x = x_0$, $y = y_0$ les valeurs de z, p, q, les équations aux dérivées partielles (ε) [paragraphe 2] détermineront la fonction intégrale z dans le voisinage de $x = x_0$ et $y = y_0$, et en allant ainsi de proche en proche pour une succession de valeurs de x et y, on aura pour un système (x_1, y_1) la valeur de l'intégrale z. On voit de suite que dans le cas où les deux lignes ($x_0 \beta x_1$) et ($y_0 \alpha y_1$) ne se coupent pas, au lieu de faire varier simultanément x et y d'après la loi donnée, on peut d'abord, laissant y_0 constant, faire aller x de x_0 en x_1 et ensuite x étant en x_1, faire varier y de y_0 en y_1.



Supposons maintenant que les deux lignes ($x_0 \beta x_1$) et ($y_0 \alpha y_1$) aient un seul point commun; on pourra tracer un contour simple C ne comprenant pas les points 0 ou 1 et à l'intérieur duquel soient les deux chemins; il résulte de l'étude faite dans le mémoire cité (paragr. 2) que dans l'intérieur du contour C les équations (ε) ont trois solutions linéairement indépendantes de la forme



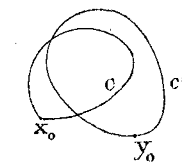
$$F_1(x, y), \; F_2(x, y), \; (x - y)^{\frac{1}{3}} F_3(x, y)$$

F_1, F_2 et F_3 étant des fonctions holomorphes de x et y quand ces variables indépendantes restent à l'intérieur du contour. Partons du système $x = x_0$, $y = y_0$ x, y marchent, suivant une loi quelconque, sur leur chemin respectif et arrivent en x_1 et y_1 (on suppose bien entendu que l'on n'ait jamais $x = y$) et on obtient ainsi la valeur des intégrales précédentes pour $x = x_1$, $y = y_1$,

$$F_1(x_1, y_1), \; F_2(x_1, y_1), \; (x_1 - y_1)^{\frac{1}{3}} F_3(x_1, y_1)$$

le radical cubique ayant une détermination convenable; si au lieu de faire varier x et y simultanément, on fait d'abord varier x, puis ensuite y on pourra obtenir pour ce radical cubique une autre détermination, mais il est clair qu'en faisant tourner x autour de y restant fini en y_1 on pourra ramener la détermination précédente, de telle sorte que l'on peut faire varier x et y séparément et en passer du système de valeurs ainsi trouvé au système cherché en effectuant une substitution du groupe qui vient d'être étudié.

On conclut facilement de la remarque précédente que, quelles que soient les deux courbes C et C' et quelle que soit la loi de succession des deux points x et y, on trouvera les valeurs de A'_1, A'_2 et A'_3 en fonction de A_1, A_2 et A_3 en faisant décrire à x le contour C, y restant en y_0; puis ensuite, x restant en x_0 on fait décrire à y d'abord le contour C', et enfin un contour fermé convenable.



4. On déduit des considérations précédentes le théorème suivant qui est essentiel dans notre étude:

u et v désignant un système de valeurs des rapports $\frac{A_3}{A_1}$ et $\frac{\lambda^2 A_2}{A_1}$, toutes les autres déterminations de u et v sont données en effectuant sur ces grandeurs les substitutions du groupe définies par les trois substitutions élémentaires S_1, S_2 et S_3 que nous avons précédemment obtenues:

$$(\mathrm{S}_1) \qquad \left|\begin{aligned} U &= \lambda^2 u - (\lambda - 1) \\ V &= v + (\lambda - \lambda^2) u - (1 - \lambda^2) \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{S}_2) \qquad \left|\begin{aligned} U &= \lambda^2 u + (1 - \lambda^2) \\ V &= v + (1 - \lambda^2) u - (1 - \lambda^2) \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{S}_3) \qquad \left|\begin{aligned} U &= \frac{u}{-2\lambda + (\lambda^2 - 1)v} \\ V &= \frac{\lambda v + \lambda^2 - 1}{-2\lambda + (\lambda^2 - 1)v} \end{aligned}\right.$$

De ce théorème va résulter une conséquence importante. Nous avons vu (paragraphe 1) que pour une des déterminations de u et de v, on a en posant

$$u = u' + iu'' \qquad\qquad v = v' + iv''$$

$$2v' + u'^2 + u''^2 < 0$$

Or en posant pareillement $U = U' + iU''$ et $V = V' + iV''$, on a par l'une et l'autre des substitutions (S_1) et (S_2)

$$2V' + U'^2 + U''^2 = 2v' + u'^2 + u''^2$$

S'il s'agit de la substitution (S_3), on aura, comme le montre un calcul facile

$$2V' + U'^2 + U''^2 = \frac{1}{\operatorname{mod}^2[-2\lambda + (\lambda^2 - 1)v]}(2v' + u'^2 + u''^2)$$

Nous allons en conclure qu'en désignant par

$$U = \frac{M_1 u + P_1 v + R_1}{M_3 u + P_3 v + R_3}, \quad V = \frac{M_2 u + P_2 v + R_2}{M_3 u + P_3 v + R_3}$$

une substitution quelconque du groupe, on aura:

$$2V' + U'^2 + U''^2 = \frac{1}{\operatorname{mod}^2(M_3 u + P_3 v + R_3)}(2v' + u'^2 + u''^2)$$

Considérons à cet effet les substitutions

$$\begin{aligned} X &= \lambda^2 x - (\lambda - 1)z \\ Y &= (\lambda - \lambda^2)x + y - (1 - \lambda^2)z \\ Z &= z \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} X &= \lambda^2 x + (1 - \lambda^2) \\ Y &= (1 - \lambda^2)x + y - (1 - \lambda^2) \\ Z &= z \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} X &= x \\ Y &= \lambda y + (\lambda^2 - 1)z \\ Z &= (\lambda^2 - 1)y - 2\lambda z \end{aligned}$$

Pour ces trois substitutions on a

(1) $$XX_0 + YZ_0 + Y_0 Z = xx_0 + yz_0 + y_0 z$$

en désignant par x_0, y_0 et z_0 les conjugués de x, y et z. Si maintenant

$$\begin{aligned} X &= M_1 x + P_1 y + R_1 z \\ Y &= M_2 x + P_2 y + R_2 z \\ Z &= M_3 x + P_3 y + R_3 z \end{aligned}$$

représente une substitution quelconque du groupe dont les trois substitutions précédentes sont les substitutions fondamentales, l'égalité (I) subsistera évidemment, et on en conclut,

$$\frac{X}{Z} \cdot \frac{Y_0}{Z_0} + \frac{Y}{Z} + \frac{Y_0}{Z_0} = \frac{zz_0}{ZZ_0}\left(\frac{x}{z} \cdot \frac{x_0}{z_0} + \frac{y}{z} + \frac{y_0}{z_0}\right)$$

ou bien, comme nous voulions l'établir:

$$2V' + U'^2 + U''^2 = \frac{1}{\mathrm{mod}^2(M_3 u + P_3 v + R_3)}(2v' + u'^2 + u''^2)$$

Par suite pour toutes les déterminations de U et V, on a:

$$2V' + U'^2 + U''^2 < 0$$

Ce point fondamental étant démontré, revenons aux valeurs de A_1, A_2, A_3 définies au paragraphe (1). Nous avons implicitement supposé dans ce qui précède que A_1 n'était pas nul, de telle sorte que u et v définis par les égalités

$$u = \frac{A_3}{A_1}, \quad v = \frac{\lambda^2 A_2}{A_1}$$

avaient des valeurs finies parfaitement déterminées. Or on peut démontrer que pour tout système de valeurs x et y différentes entre elles et distinctes de 0, 1 et ∞, A_1 n'est jamais nul. Reportons nous à cet effet au tableau des périodes normales des intégrales Ω, U et W (paragraphe 1); soient particulièrement considérées les périodes

$$A_1 \quad A_3 \quad A_5 \quad A_2 \quad A_4 \quad A_6$$

où

$$A_4 = \lambda A_3, \quad A_5 = -\lambda A_1, \quad A_6 = \lambda^2 A_2$$

c'est un point bien connu dans la théorie des fonctions abéliennes qu'en posant:

$$A_i = \alpha_i + \beta_i\sqrt{-1}$$

on a

$$-\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1 - \beta_3\alpha_4 + \beta_4\alpha_3 - \beta_5\alpha_6 + \beta_6\alpha_5 < 0$$

Or si l'on avait $A_1 = 0$, et par suite $A_5 = 0$, l'inégalité se réduirait à:

$$-\beta_3\alpha_4 + \beta_4\alpha_3 < 0$$

et comme

$$\alpha_4 + \beta_4\sqrt{-1} = \lambda(\alpha_3 + \beta_3\sqrt{-1})$$

on aurait

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_3^2 + \beta_3^2) < 0$$

On ne peut donc supposer que A_1 soit égal à zéro.

5. J'arrive maintenant à l'inversion des rapports des périodes; nous allons montrer que les deux équations:

$$\frac{A_3}{A_1} = u, \quad \frac{\lambda^2 A_2}{A_1} = v$$

donnent pour x et y des fonctions uniformes de u et v. Nous y parviendrons en cherchant à exprimer x et y à l'aide des fonctions θ de trois variables indépendantes.

Soient

$$U^{(1)}(t, z), \; U^{(2)}(t, z), \; U^{(3)}(t, z)$$

les trois intégrales normales de première espèce correspondant à la relation

$$z^3 = t(t-1)(t-x)(t-y)$$

intégrales dont le tableau des périodes est le tableau (μ) du paragraphe (1), et qui sont prises depuis le point analytique (t_0, z_0) [1] jusqu'à un point variable (t, z). Les équations différentielles abéliennes seront

$$U^{(1)}(t_1, z_1) + U^{(1)}(t_2, z_2) + U^{(1)}(t_3, z_3) = u_1$$
$$U^{(2)}(t_1, z_1) + U^{(2)}(t_2, z_2) + U^{(2)}(t_3, z_3) = u_2$$
$$U^{(3)}(t_1, z_1) + U^{(3)}(t_2, z_2) + U^{(3)}(t_3, z_3) = u_3$$

---

(1) Nous avons précédemment appelé z_1 la valeur initiale prise pour z quand on a $t = t_0$, nous l'appelons maintenant z_0 afin de pouvoir garder plus de symétrie dans les notations qui suivent.

Nous allons nous servir des équations qui résolvent le problème de l'inversion, en les prenant sous la forme donnée par M. BRIOT dans sa théorie des fonctions abéliennes (voyez pour les notations BRIOT, Théorie des fonctions abéliennes, page 157). Je pars de la formule:

$$\prod_{k=1}^{k=p}\left[1+\lambda\frac{\psi(t_k,\ z_k)}{\varphi(t_k,\ z_k)}\right]=\frac{1}{E}\prod_{h=1}^{h=mn}\frac{\theta[U_i-U^{(i)}(\xi'_h,\ \eta'_h)-C_i]}{\theta[u_i-U^{(i)}(\xi_h,\ \eta_h)-C_i]}$$

où E est une constante indépendante des t.

Dans le cas qui nous occupe la fonction θ est formée avec les éléments du tableau (μ) du paragraphe premier. Nous allons prendre $\varphi=t$, $\psi=1$ et enfin $\lambda=-1$. Dans le second membre nous aurons un produit de trois facteurs comme dans le premier, et on peut écrire:

$$U^{(i)}(\xi_h,\ \eta_h)\equiv U^{(i)}(0,\ 0)$$

$$U^{(i)}(\xi'_h,\ \eta'_h)\equiv U^{(i)}(1,\ 0)$$

Nous déterminerons C_i par la formule (voir l'ouvrage cité, page 147)

$$2C_i\equiv U^{(i)}(0,\ 0)+U^{(i)}(1,\ 0)+U^{(i)}(x,\ 0)+U^{(i)}(y,\ 0)$$

toutes ces congruences ayant lieu par rapport aux périodes des intégrales U. Ceci posé, faisons d'abord dans la formule écrite plus haut

$$t_1=x \quad \text{et} \quad t_2=t_3=\infty$$

Nous aurons dans le premier membre

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

et dans le second membre on devra remplacer u_1, u_2 et u_3 respectivement par

$$U^{(1)}(x,\ 0)+2U^{(1)}(\infty,\ \infty)$$

$$U^{(2)}(x,\ 0)+2U^{(2)}(\infty,\ \infty)$$

$$U^{(3)}(x,\ 0)+2U^{(3)}(\infty,\ \infty)$$

On voit alors que dans le second membre sous le signe θ ne figureront que des différences de deux valeurs de l'intégrale $U^{(i)}(t, z)$ pour $t = 0, 1, x, y$ ou ∞, et ces différences sont des combinaisons linéaires et homogènes des périodes et par conséquent des fonctions rationnelles de u et v; donc dans le second membre le produit $\prod$ est une fonction uniforme de u et v. Il reste à considérer le facteur $\frac{1}{E}$; il suffit pour cela de faire immédiatement dans la formule $t_1 = t_2 = t_3 = \infty$: le premier membre deviendra l'unité et on voit encore comme précédemment que le coefficient de $\frac{1}{E}$ est une fonction uniforme de u et v, il en est alors de même pour E. Ainsi donc $1 - \frac{1}{x}$ est une fonction uniforme de u et v. Je ne m'arrête pas à trouver explicitement les valeurs de x et y en fonction de u et v; la méthode précédente poussée jusqu'au bout donnerait évidemment ces expressions, mais je me suis seulement proposé de montrer *que x et y sont fonctions uniformes de u et v, fonctions qui ne sont définies que pour tout système de valeurs des variables indépendantes u et v, satisfaisant à l'inégalité*

$$2v' + u'^2 + u''^2 < 0$$

en ayant, comme on sait,

$$u = u' + iu'' \quad \text{et} \quad v = v' + iv''$$

Les substitutions (S_1), (S_2) et (S_3) considérées précédemment sont les substitutions fondamentales du groupe (M, P, R) qui laisse invariables ces deux fonctions x et y. Nous poserons

$$x = P(u, v), \quad y = Q(u, v),$$

et on aura

$$P\left(\frac{M_1 u + P_1 v + R_1}{M_3 u + P_3 v + R_3}, \; \frac{M_2 u + P_2 v + R_2}{M_3 u + P_3 v + R_3}\right) = P(u, v)$$

et

$$Q\left(\frac{M_1 u + P_1 v + R_1}{M_3 u + P_3 v + R_3}, \; \frac{M_2 u + P_2 v + R_2}{M_3 u + P_3 v + R_3}\right) = Q(u, v)$$

6. Revenons aux substitutions (S_1), (S_2) et (S_3). On peut les écrire en employant trois variables:

$$(\mathrm{S}_1) \qquad \begin{cases} X = \lambda^2 x - (\lambda - 1)z \\ Y = (\lambda - \lambda^2)x + y - (1 - \lambda^2)z \\ Z = z \end{cases}$$

$$(\mathrm{S}_2) \qquad \begin{cases} X = \lambda^2 x + (1 - \lambda^2) \\ Y = (1 - \lambda^2)x + y - (1 - \lambda^2) \\ Z = z \end{cases}$$

$$(\mathrm{S}_3) \qquad \begin{cases} X = x \\ Y = \lambda y + (\lambda^2 - 1)z \\ Z = (\lambda^2 - 1)y - 2\lambda z \end{cases}$$

Ces substitutions transforment en elle-même, comme nous l'avons dit plus haut, la forme quadratique:

$$(\varepsilon) \qquad xx_0 + yz_0 + y_0 z$$

où x_0, y_0, z_0 sont les conjuguées de x, y, z et *cette forme rentre dans le type dont j'ai fait l'étude dans un travail récent.* (¹) Elle se ramène immédiatement à la forme canonique, on peut écrire en effet:

$$xx_0 + yz_0 + y_0 z = \frac{1}{2}(2xx_0 + uu_0 - vv_0)$$

en posant

$$u = y + z \quad \text{et} \quad v = y - z$$

Soit

$$\begin{aligned} X &= C_1 x + B_1 y + A_1 z \\ Y &= C_2 x + B_2 y + A_2 z \\ Z &= C_3 x + B_3 y + A_3 z \end{aligned}$$

une substitution à coefficients entiers de la forme $a + b\lambda$, où a et b sont des entiers réels, qui transforme en elle-même l'expression (ε), on aura les relations:

(¹) Tome 1ᵉʳ de ce recueil.

$$C_1\gamma_1 + C_2\gamma_3 + C_3\gamma_2 = A_1\beta_1 + A_2\beta_3 + A_3\beta_2 = 1$$

$$(1)\qquad \begin{aligned} A_1\alpha_1 + A_3\alpha_2 + A_2\alpha_3 &= 0 \\ B_1\beta_1 + B_2\beta_3 + B_3\beta_2 &= 0 \\ C_1\alpha_1 + C_2\alpha_3 + C_3\alpha_2 &= 0 \\ C_1\beta_1 + C_2\beta_3 + C_3\beta_2 &= 0 \end{aligned}$$

les lettres grecques étant, comme d'habitude, les conjuguées des grandes lettres correspondantes.

Les substitutions S_1, S_2, S_3 satisfont aux relations précédentes, mais le groupe dont elles sont les substitutions fondamentales ne forme qu'un sous-groupe dans le groupe général G des substitutions transformant en elle-même la forme (ε).

La substitution de

$$\frac{C_1u + B_1v + A_1}{C_3u + B_3v + A_3},\quad \frac{C_2u + B_2v + A_2}{C_3u + B_3v + A_3}$$

à u et v équivaut à une transformation des périodes, et par suite

$$P\left(\frac{C_1u + B_1v + A_1}{C_3u + B_3v + A_3}, \frac{C_2u + B_2v + A_2}{C_3u + B_3v + A_3}\right) \text{ et } Q\left(\frac{C_1u + B_1v + A_1}{C_3u + B_3v + A_3}, \frac{C_2u + B_2v + A_2}{C_3u + B_3v + A_3}\right)$$

sont des fonctions algébriques de $P(u, v)$ et $Q(u, v)$.

D'une manière plus générale, au lieu de prendre une substitution (A, B, C) dont les coefficients vérifient les relations (1), considérons les relations

$$C_1\gamma_1 + C_2\gamma_3 + C_3\gamma_2 = A_1\beta_1 + A_2\beta_3 + A_3\beta_2 = k$$

$$(2)\qquad \begin{aligned} A_1\alpha_1 + A_3\alpha_2 + A_2\alpha_3 &= 0 \\ B_1\beta_1 + B_2\beta_3 + B_3\beta_2 &= 0 \\ C_1\alpha_1 + C_2\alpha_3 + C_3\alpha_2 &= 0 \\ C_1\beta_1 + C_2\beta_3 + C_3\beta_2 &= 0 \end{aligned}$$

où k est un entier nécessairement réel. Divers problèmes se posent alors sur ces transformations relatives à un nombre k, je me réserve d'y revenir et je terminerai en montrant que ce nombre k ne peut pas être un entier quelconque; on tire en effet des deux dernières équations (2)

$$\frac{C_1}{\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1} = \frac{C_2}{\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3} = \frac{C_3}{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}$$

Soit s la valeur commune de ces rapports; en substituant ces valeurs de C_1, C_2 et C_3 dans la première des équations (2), on trouve, après diverses réductions

$$s\sigma = \frac{1}{k}$$

σ étant conjugué de s, et l'on conclut de cette égalité que k doit être la norme d'un nombre complexe formé avec les racines cubiques de l'unité, c'est à dire un nombre de la forme $a^2 - ab + b^2$.

Paris, le 1er Février 1883.