SUR QUELQUES POINTS DANS LA THÉORIE DES NOMBRES

PAR

CH. HERMITE et R. LIPSCHITZ.

1. Extrait d'une lettre de M. Hermite à M. Lipschitz.

.... Vous connaissez et vous admirez comme moi, le mémoire de DIRICHLET sur les valeurs moyennes, où il commence par donner aux quantités près de l'ordre $\sqrt{n}$, l'expression de

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(n) = F(n),$$

$\varphi(i)$ désignant le nombre des diviseurs de i. DIRICHLET emploie d'abord l'expression connue:

$$F(n) = E\left(\frac{n}{1}\right) + E\left(\frac{n}{2}\right) + E\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots,$$

puis celle qu'il a découverte:

$$F(n) = -\mu\nu + \sum_{1}^{\mu}{}_i E\left(\frac{n}{i}\right) + \sum_{1}^{\nu}{}_j E\left(\frac{n}{j}\right),$$

où il suppose $\mu\nu = n$. En voici une autre encore dont on peut conclure son résultat. Soit pour abreger

$$\nu = E(\sqrt{n}),$$

j'obtiens:

$$F(n) = 2\sum_{1}^{\nu}{}_i E\left(\frac{n}{i}\right) - \nu^2.$$

Pour le démontrer, considérez la quantité $F(n+1)$, et supposez en premier lieu que $n+1$ ne soit pas un carré, de sorte qu'on ait:

$$E(\sqrt{n+1}) = \nu.$$

Dans la différence

$$F(n+1) - F(n) = 2\sum_1^{\nu}{}_i \left[E\left(\frac{n+1}{i}\right) - E\left(\frac{n}{i}\right)\right],$$

les seuls termes qui ne seront point nuls, seront évidemment ceux où $\frac{n+1}{i}$ est entier, de sorte que la quantité

$$E\left(\frac{n+1}{i}\right) - E\left(\frac{n}{i}\right)$$

devient alors égale à l'unité. Par conséquent

$$F(n+1) - F(n)$$

est le double du nombre des diviseurs de $n+1$, qui sont au dessous de sa racine carrée où bien le nombre total de tous ses diviseurs.

Supposons en second lieu

$$E(\sqrt{n+1}) = \nu + 1,$$

je puis écrire

$$F(n+1) - F(n) = 2\sum_1^{\nu}{}_i \left[E\left(\frac{n+1}{i}\right) - E\left(\frac{n}{i}\right)\right] + 2E\left(\frac{n+1}{\nu+1}\right) - (\nu+1)^2 + \nu^2.$$

Or on a

$$2E\left(\frac{n+1}{\nu+1}\right) - (\nu+1)^2 + \nu^2 = 2(\nu+1) - 2\nu - 1 = 1,$$

de sorte qu'alors nous trouvons, deux fois le nombre des diviseurs moindres que $\sqrt{n+1}$, plus l'unité, c'est à dire encore la somme de tous les diviseurs de $n+1$.

Paris 12 Mai 1883.

2. Extrait d'une lettre de M. Lipschitz à M. Hermite.

.... En cherchant la cause de la symétrie parfaite qui se manifeste dans la formule par laquelle vous avez exprimée la somme

$$F(n) = \sum_{t=1}^{t=n} f(t),$$

$f(t)$ dénotant le nombre des diviseurs de t, j'ai fait l'observation que l'on peut représenter d'une manière semblable la somme

$$F_s(n) = \sum_{t=1}^{t=n} f_s(t),$$

où $f_s(t)$ désigne le nombre de ceux diviseurs de t qui sont en même temps des puissances s-ièmes d'un nombre, et où $f_s(t)$ coïncide avec $f(t)$ pour $s = 1$. Une valeur quelconque de s étant choisie écrivons dans une première ligne horizontale les nombres naturels de 1 à n, dans une seconde ligne tous les multiples de 2^s non supérieurs à n, dans une troisième ligne tous les multiples de 3^s non supérieurs à n, et ainsi de suite jusqu'à la puissance p^s la plus grande qui ne surpasse pas n, de manière que nous ayons

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots. n \\ 2^s,\ 2^s.2,\ 2^s.3 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots. \\ \ldots\ldots \\ p^s. \end{array}$$

Ce tableau contient tous les nombres non supérieurs à n representés comme les produits d'un nombre quelconque et d'une puissance s-ième d'un nombre, autant de fois qu'une telle représentation peut se faire. Donc le nombre de tous les termes du tableau doit être égal à la somme requise

$$F_s(n) = \sum_{t=1}^{t=n} f_s(t).$$

Le nombre des termes de la première ligne horizontale étant n, de la seconde ligne horizontale $\left[\frac{n}{2^s}\right]$, où l'entier le plus grand contenu dans une quantité z est designé par $[z]$, on a pour $F_s(n)$ l'expression

$$F_s(n) = [n] + \left[\frac{n}{2^s}\right] + \left[\frac{n}{3^s}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{p^s}\right].$$

Mais si l'on détermine le nombre des termes contenus dans les lignes verticales, on trouve pour la première le nombre

$$\left[n^{\frac{1}{s}}\right] = p,$$

pour la seconde le nombre

$$\left[\frac{n^{\frac{1}{s}}}{2^{\frac{1}{s}}}\right],$$

et ainsi de suite jusqu'à la dernière qui contient un seul terme. Cela étant le second mode d'énumération donne pour la fonction $F_s(n)$ l'expression

$$F_s(n) = \left[n^{\frac{1}{s}}\right] + \left[\frac{n^{\frac{1}{s}}}{2^{\frac{1}{s}}}\right] + \left[\frac{n^{\frac{1}{s}}}{3^{\frac{1}{s}}}\right] + \cdots + \left[\frac{n^{\frac{1}{s}}}{n^{\frac{1}{s}}}\right],$$

qui devient identique avec la première seulement pour $s = 1$.

Comme les lignes horizontales sont construites de sorte que le nombre des termes de chaque ligne soit supérieur ou égal au nombre des termes de la suivante, et comme les lignes verticales ont la propriété correspondante, l'énumération peut aussi s'exécuter de la manière suivante. Nous déterminons le nombre des termes des lignes horizontales successives de la première jusqu'à la μ-ième ligne inclusivement

$$\mu^s, \quad \mu^s \cdot 2, \quad \mu^s \cdot 3, \ldots \mu^s \cdot \nu,$$

où ν a la valeur

$$\left[\frac{n}{\mu^s}\right],$$

et apres cela nous nous déterminons le nombre des termes des lignes verticales de la première jusqu'à la ν-ième ligne. Alors nous avons compris tous les termes, deux fois d'une part, une fois de l'autre. Les termes compris deux fois sont évidemment ceux qui appartiennent aux μ premières lignes horizontales et en même temps aux ν premières lignes verticales, dont le nombre total est égal au produit $\mu\nu$. C'est donc ce nombre qu'il faut soustraire de la somme des deux sommes mentionnées pour avoir exactement $F_s(n)$. D'où vient la troisième expression

$$F_s(n) = -\mu\nu + \sum_{x=1}^{x=\mu}\left[\frac{n}{x^s}\right] + \sum_{y=1}^{y=\nu}\left[\frac{n^{\frac{1}{s}}}{y^{\frac{1}{s}}}\right].$$

On parviendra au même résultat si l'on fait usage, pour transformer la première expression de $F_s(n)$, de la formule générale, exposée par DIRICHLET dans le mémoire: *Ueber ein die Division betreffendes Problem* (Monatsbericht der Berliner Academie, Januar 1851, et CRELLES Journal f. Mathematik, Bd 47). La même formule de DIRICHLET a été appliquée pour la transformation de diverses séries arithmétiques par Mr CH. ZELLER dans une communication: *Ueber Summen von grössten Ganzen bei arithmetischen Reihen* (Nachrichten d. k. G. d. W. von Göttingen, Mai 1879).

Dans la troisième expression de $F_s(n)$ supposons le nombre μ égal à

$$\left[n^{\frac{1}{1+s}}\right].$$

Alors on parvient à la formule

$$F_s(n) = -\mu^2 + \sum_{x=1}^{x=\mu}\left[\frac{n}{x^s}\right] + \sum_{y=1}^{y=\mu}\left[\frac{n^{\frac{1}{s}}}{y^{\frac{1}{s}}}\right],$$

qui se change dans la votre pour le cas $s = 1$. Actuellement on a les rélations suivantes

$$\mu^{1+s} \overline{\overline{<}} n < (\mu + 1)^{1+s},$$

$$\nu \overline{\overline{<}} \frac{n}{\mu^s} < \nu + 1.$$

On conclut de la première

$$\mu \overline{\overline{<}} \frac{n}{\mu^s};$$

c'est pourquoi ν doit être ou égal à μ ou plus grand que μ, c'est à dire $\overline{\overline{>}} \mu + 1$. Dans le premier cas la formule en question est démontrée. Dans le second cas on a nécessairement

$$\mu \overline{\overline{<}} \frac{n^{\frac{1}{s}}}{\nu^{\frac{1}{s}}} \overline{\overline{<}} \frac{n^{\frac{1}{s}}}{(\mu + 1)^{\frac{1}{s}}} < \mu + 1.$$

Partant toutes les $(\nu - \mu)$ quantités

$$\left[\frac{n^{\frac{1}{s}}}{(\mu + 1)^{\frac{1}{s}}}\right], \ldots \left[\frac{n^{\frac{1}{s}}}{\nu^{\frac{1}{s}}}\right]$$

ont une valeur égale à μ. Or en étendant la somme

$$\sum_{y=1}^{y=\nu} \left[\frac{n^{\frac{1}{s}}}{y^{\frac{1}{s}}}\right]$$

d'abord de 1 à μ, puis de $\mu + 1$ a ν, la seconde partie a pour valeur $(\nu - \mu)\mu$, qui ajoutée à la quantité $-\mu\nu$ donne le résultat $-\mu^2$. Donc la troisième formule est transformée dans la quatrième, ce qu'il fallait démontrer.

Bonn, 6 Juin 1883.