QUELQUES THEORÈMES

DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES DE POINTS.

Extrait d'une lettre adressée à M. Cantor à Halle

PAR

IVAR BENDIXSON

à STOCKHOLM.

.... Dans votre travail récemment publié: »Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre», vous avez énoncé le théorème suivant, qui me paraît devoir être rectifié dans quelques parties. Vous y dites page 31:

»Hat $P^{(1)}$ die Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse (II), so lässt sich $P^{(1)}$ stets und nur auf einzige Weise in zwei Mengen R und S zerlegen, so dass

$P^{(1)} \equiv R + S$, wo R und S eine äusserst verschiedene Beschaffenheit haben:

R ist so beschaffen dass sie durch den wiederholten Ableitungsprocess einer fortwährenden Reduction bis zur Annihilation fähig ist, so dass es immer eine erste ganze Zahl γ der Zahlenclassen (I) oder (II) giebt, für welche $R^{(\gamma)} \equiv 0$; solche Punctmengen R nenne ich reductibel.

S dagegen ist so beschaffen, dass bei dieser Punctmenge der Ableitungsprocess gar keine Aenderung hervorbringt indem $S^{(1)} \equiv S$. Derartige Mengen S nenne ich perfecte Punctmengen.»

J'ai réussi à construire un exemple, contraire à ce théorème. Avant de le formuler, je veux énoncer un théorème facile dont j'aurai besoin quelquefois dans les pages suivantes:

»Si $\mathfrak{D}(P, P') \equiv P$, P' est un ensemble parfait.»

La démonstration de ce théorème n'offre aucune difficulté. Car chaque point de P est aussi un point de P' d'après l'hypothèse. Or P'' contient au moins tous les points de P'.

Mais P'' ne peut contenir d'autres points que P'. Il en résulte donc que

$P' \equiv P''$, c'est à dire, P' est un ensemble parfait.

c. q. f. d.

L'exemple dont j'ai parlé ci-dessus se construit ainsi:

Soit $\alpha \ldots \beta$ $(\alpha < \beta)$ un intervalle, donné sur l'axe réel, j'y mets les points suivants

$$\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2}, \; \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^2}, \; \ldots, \; \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^\nu}, \; \ldots \quad (\nu = 1, 2 \ldots)$$

$$\beta - \frac{\beta - \alpha}{2^2}, \; \ldots, \; \beta - \frac{\beta - \alpha}{2^\nu}, \; \ldots \quad (\nu = 2, 3 \ldots)$$

Je nomme cet ensemble $Q_{\alpha, \beta}$.

Nous voyons donc que $Q'_{\alpha, \beta} \equiv (\alpha, \beta)$, où (α, β) désigne un ensemble qui ne contient d'autres points que α et β.

Dans chaque intervalle

$$\left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^\nu}\right) \ldots \left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^{\nu+1}}\right),$$

je place un ensemble

$$Q_{\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^\nu}, \; \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^{\nu+1}}}$$

et dans chaque intervalle

$$\left(\beta - \frac{\beta - \alpha}{2^\nu}\right) \ldots \left(\beta - \frac{\beta - \alpha}{2^{\nu+1}}\right)$$

je place un ensemble

$$Q_{\beta - \frac{\beta - \alpha}{2^\nu}, \; \beta - \frac{\beta - \alpha}{2^{\nu+1}}}$$

Je nomme le résultat de toutes ces opérations $Q_{s_{\alpha, \beta}}$.

Or

$$Q'_{s_{\alpha,\beta}} \equiv Q_{\alpha,\beta} + (\alpha, \beta)$$

et il faut que

$$Q''_{s_{\alpha,\beta}} \equiv Q'_{\alpha,\beta} \equiv (\alpha, \beta)$$

Avant de continuer je veux donner la définition suivante:

Par ces mots: »inscrire (ou placer) symétriquement l'étendue a dans l'intervalle $\alpha \ldots \beta$», je veux dire: »fixer deux points γ, δ tels que $\delta - \gamma = a$, $\gamma - \alpha = \beta - \delta$».

Prenons l'intervalle $0 \ldots 1$. Plaçons-y symétriquement l'étendue $1/2$ dans laquelle nous ne plaçons plus d'étendues. Dans chacun des intervalles $0 \ldots 1/4$ et $3/4 \ldots 1$, formés aux côtés de l'étendue inscrite, nous plaçons symétriquement une nouvelle étendue égale à $1/2 \cdot 1/4$ (et dans laquelle il ne faut plus placer d'étendues) et ainsi de suite, de sorte que nous plaçons symétriquement dans chaque intervalle nouveau une étendue, dans laquelle nous ne plaçons pas de nouvelles étendues, et qui est égale à la moitié de ce même intervalle.

Je nomme P_e l'ensemble de points formé par les points extrêmes de toutes les étendues, dans lesquelles nous n'avons pas inscrit de nouvelles étendues. On voit sans difficulté, que chaque point de P_e appartient aussi à P'_e. Car chaque point α_1 de P_e est entouré d'un côté par une étendue, où il n'y a pas de nouvelles étendues inscrites, c'est à dire, où il n'y a pas de points de P_e. Soit b la longueur de cette étendue et $\alpha_1 - b$, α_1 ses points extrêmes.

En construisant l'ensemble P_e nous avons placé l'étendue b symétriquement dans l'intervalle $\left(\alpha_1 - \frac{3b}{2}\right) \ldots \left(\alpha_1 + \frac{b}{2}\right)$. Le point $\alpha_1 + \frac{b}{2}$ est donc un point de P_e. Dans l'intervalle $\alpha_1 \ldots \left(\alpha_1 + \frac{b}{2}\right)$ nous avons symétriquement placé l'étendue $\frac{b}{2^2}$. Il en résulte que $\alpha_1 + \frac{b}{2^3}$ est un point de P_e et ainsi de suite, de sorte que $\alpha_1 + \frac{b}{2^{2\nu+1}}$ est un point de P_e pour $\nu = 1, 2 \ldots$

Il faut donc que α_1 soit un point de P'_e.

Or $\mathfrak{D}(P_e, P'_e) \equiv P_e$, et nous savons donc que P'_e est un ensemble parfait.

Plaçons maintenant dans chaque étendue $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_2$ de l'exemple précédent (dans laquelle nous n'avons pas inscrit de nouvelles étendues) un ensemble $Q_{S_{\varepsilon_1,\,\varepsilon_2}}$, comme je l'ai défini ci-dessus, nous obtenons comme résultat un ensemble P; le premier ensemble qui en est dérivé est l'exemple cherché.

On voit facilement que P' contient tous les points de P_e. Il faut donc que P'_e soit une partie intégrante de P'' c'est à dire de P'.

Nous pouvons donc mettre

$$P' \equiv P'_e + T$$

où T est formé par tous les points de P' qui tombent en dedans des étendues désignées plus haut.

Mais la partie de P' qui tombe en dedans d'une étendue quelconque $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_2$ est, comme on le voit facilement, un ensemble $Q_{\varepsilon_1,\,\varepsilon_2}$, comme je l'ai défini ci-dessus. En observant que $Q'_{\varepsilon_1,\,\varepsilon_2} \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, il en résulte que T' est tel, qu'il comprend au moins tous les points de P_e.

Or P'_e est une partie intégrante de T'' c'est à dire de T'. Mais T' ne peut contenir d'autres points que P'_e.

Or

$$T' \equiv P'_e.$$

Nous pouvons donc diviser P' en

$$P' \equiv T + P'_e,$$

où P'_e est parfait et T est tel que

$$T^{(\gamma)} \equiv P'_e.$$

Et il n'y a jamais un γ pour lequel

$$T^{(\gamma)} \equiv 0.$$

Il s'en suit, que l'ensemble R de votre équation:

$$P' \equiv R + S$$

n'est pas toujours tel, qu'il y ait un γ pour lequel

$$R^{(\gamma)} \equiv 0.$$

En changeant de la manière suivante votre théorème, je crois pouvoir lui donner une exactitude complète:

»Si P est un ensemble de points situés dans un espace continu à n dimensions, et si P' a une puissance plus grande que la première, je puis toujours le diviser d'une seule manière

$$P' \equiv R + S$$

où S est un ensemble parfait et R est de la première puissance et tel qu'il existe toujours un γ, tel que

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\gamma)}) \equiv 0,$$

γ étant un de vos symboles d'infini correspondant à ce que vous avez nommé nombre de la classe (I) ou (II).

Dans les pages suivantes je montrerai la manière dont je prouve votre théorème ainsi changé. Je ne veux pourtant le traiter ici qu'en supposant, que P' soit situé dans un espace continu à une seule dimension, la preuve du théorème général étant tout à fait analogue.

Je veux donc prouver les théorèmes suivants:

Théorème D. (1) »*Si P' a une puissance plus grande que la première, il existe toujours des points qui appartiennent à la fois à tous les $P^{(\gamma)}$* (où γ parcourt tous vos nombres de la classe (I) et (II)).»

Théorème E. »*Si $P^{(\Omega)}$ est l'ensemble de tous les points du théorème D, $P^{(\Omega)}$ est un ensemble parfait*» (Ω correspond au premier nombre de la classe III).

Théorème F. »*Si $P' - P^{(\Omega)} \equiv R$, R a la première puissance.*»

Théorème G. (2) »*Il existe un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II), tel que*

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\gamma)}) \equiv 0.»$$

Démonstration du théorème D.

Nous avons supposé que P' n'est pas de la première puissance. Il n'existe donc pas un γ, appartenant à vos nombres de la classe (I) ou

(1) Les lettres sont choisies, comme l'a souhaité M. Cantor, afin que les théorèmes puissent être plus en correspondance avec ses propres théorèmes A, B, C page 409 de ce même tome.

(2) M. Cantor m'a informé, que les théorèmes D, E, F étaient déjà trouvés par lui. Quant au théorème G, il n'y était pas encore parvenu.

(II) tel que $P^{(\gamma)} \equiv 0$. (¹) Soit donc P' donné dans l'intervalle $\alpha \ldots \beta$ $(\alpha < \beta)$ de l'axe réel et m un nombre entier positif > 1. Si l'on divise $\alpha \ldots \beta$ en m parties égales, on trouve que dans l'un au moins des intervalles

$$\left(\alpha + n\frac{\beta-\alpha}{m}\right) \ldots \left(\alpha + (n+1)\frac{\beta-\alpha}{m}\right) \qquad (n+1 \leqq m)$$

doit tomber une partie P_1 de P' telle qu'il n'existe pas un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II) tel que

$$P_1^{(\gamma)} \equiv 0.$$

Soit $\alpha_1 \ldots \beta_1$ $(\alpha_1 < \beta_1)$ le premier intervalle où cela a lieu. Divisons maintenant l'intervalle $\alpha_1 \ldots \beta_1$ en m parties égales. Dans l'un au moins des intervalles formés

$$\left(\alpha_1 + n_1\frac{\beta_1-\alpha_1}{m}\right) \ldots \left(\alpha_1 + (n_1+1)\frac{\beta_1-\alpha_1}{m}\right)$$

doit tomber une partie P_2 de P' telle qu'il n'existe pas un γ pour lequel

$$P_2^{(\gamma)} \equiv 0.$$

Soit $\alpha_2 \ldots \beta_2$ le premier intervalle de cette espèce.

Ainsi nous formons de suite α_ν, β_ν etc. *in infinitum,* de sorte qu'il tombe toujours dans chaque intervalle $\alpha_\nu \ldots \beta_\nu$ une partie P_ν de P' telle qu'il n'existe pas un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II), pour lequel

$$P_\nu^{(\gamma)} \equiv 0.$$

Mais $\alpha_\nu \leqq \alpha_{\nu+1}$; $\beta_\nu \geqq \beta_{\nu+1}$.

Les quantités α_ν ont donc une limite supérieure α_∞ et les quantités β_ν ont de même une limite inférieure β_∞.

Il faut donc que

$$\beta_\infty - \alpha_\infty < \beta_\nu - \alpha_\nu = \frac{\beta-\alpha}{m^\nu}.$$

Or $\beta_\infty = \alpha_\infty$. On voit facilement que le point $\beta_\infty = \alpha_\infty$ appartient à la fois à tous les $P^{(\gamma)}$.

(¹) Voir le théorème B de M. Cantor page 409 de ce même tome.

En effet, entourez le point α_∞ d'un intervalle $(\alpha_\infty - \delta) \ldots (\alpha_\infty + \delta)$, il existe toujours un nombre entier positif n tel que

$$\frac{\beta - \alpha}{m^\nu} < \delta \qquad \text{pour } \nu \geqq n.$$

Il en résulte que

$$\beta_\nu - \alpha_\nu < \delta \qquad \text{pour } \nu \geqq n.$$

Les points α_ν, β_ν tombent donc nécessairement dans l'intervalle $\alpha_\infty - \delta \ldots \alpha_\infty + \delta$. Il en résulte qu'il tombe dans l'intervalle $\alpha_\infty - \delta \ldots \ldots \alpha_\infty + \delta$ un ensemble P_ν tel qu'il n'y a pas un γ pour lequel

$$P_\nu^{(\gamma)} \equiv 0.$$

C'est à dire, dans l'intervalle $\alpha_\infty - \delta \ldots \alpha_\infty + \delta$ tombent des points de $P^{(\gamma)}$ (γ parcourant tous les nombres de la classe (I) ou (II)). Comme cela a lieu pour chaque δ, α_∞ est un point de $P^{(\gamma+1)}$, c'est à dire de $P^{(\gamma)}$ (γ parcourant tous les nombres de la classe (I) ou (II)).

Donc il y a des points qui appartiennent à la fois à tous les $P^{(\gamma)}$.

c. q. f. d.

En prouvant le théorème D, j'ai aussi donné la preuve d'un théorème, que vous avez énoncé dans les Annales de mathématiques pures et appliquées, Tome XV, savoir: »Quand il n'existe pas un ν, appartenant aux nombres entiers positifs, tel que $P^{(\nu)} \equiv 0$, il existe toujours un ensemble $P^{(\omega)}$ tel, qu'il appartient à la fois à tous les $P^{(\nu)}$.»

Démonstration du théorème E.

Pour prouver le théorème E, je veux commencer par prouver que $P^{(\Omega)}$ ne peut se composer d'un seul point.

Nous avons défini l'ensemble $P^{(\Omega)}$ l'ensemble de tous les points α_∞ qui appartiennent à la fois à tous les $P^{(\gamma)}$. Soit P' donné dans l'intervalle $\alpha \ldots \beta$ $(\alpha < \beta)$ et a un point de cet intervalle, je dis que $P^{(\Omega)}$ ne peut être égal à a.

Soient $m_1, m_2 \ldots m_\nu \ldots$ des nombres entiers positifs, tels que $m_1 < m_2 < \ldots < m_\nu < \ldots$ Dans l'intervalle $\alpha \ldots \left(a - \frac{a - \alpha}{m_1}\right)$ tombe une partie Q_1 de P' telle que $Q_1^{(\Omega)}$ ne contient pas un seul point. Car si $Q_1^{(\Omega)}$ contenait un point a_1, ce point appartiendrait à tous les $Q_1^{(\gamma)}$, c'est à dire à tous les $P^{(\gamma)}$. Par suite le point a_1 serait un point de $P^{(\Omega)}$, ce qui n'a pas lieu.

Or $Q_1^{(\Omega)}$ ne contient pas un seul point.

Il en résulte que Q_1 a la première puissance ou ne contient qu'un nombre fini de points.

Maintenant on prouve de la même manière que dans l'intervalle

$$\left(a - \frac{a-\alpha}{m_1}\right) \;\ldots\; \left(a - \frac{a-\alpha}{m_2}\right)$$

tombe un ensemble Q_2 qui a la première puissance ou est fini et que dans l'intervalle

$$\left(a - \frac{a-\alpha}{m_2}\right) \;\ldots\; \left(a - \frac{a-\alpha}{m_3}\right)$$

tombe un ensemble Q_3 qui a la première puissance ou est fini, et ainsi de suite indéfiniment, de sorte que dans l'intervalle

$$\left(a - \frac{a-\alpha}{m_\nu}\right) \;\ldots\; \left(a - \frac{a-\alpha}{m_{\nu+1}}\right) \qquad \text{pour } \nu = 1,\, 2 \,\ldots\, n \,\ldots$$

tombe un ensemble Q_ν qui a la première puissance ou est fini.

L'ensemble de tous ces intervalles forme un ensemble de la première puissance et dans chaque intervalle tombe un ensemble de points qui a aussi la première puissance (ou est fini).

Or la somme de tous ces ensembles de points a la première puissance (ou est finie).

La partie de P' qui tombe dans l'intervalle $\alpha \ldots a$ est donc de la première puissance (ou est finie).

On prouve de la même manière que la partie de P' qui tombe dans l'intervalle $a \ldots \beta$ est de la première puissance (ou est finie).

Donc P' a la première puissance, (ou est fini), ce qui n'a pas lieu.

Or $P^{(\Omega)}$ ne peut se composer d'un seul point.

Maintenant nous pouvons sans difficulté prouver que $P^{(\Omega)}$ est un ensemble parfait.

Je veux d'abord faire remarquer que tous les points de $P^{(\Omega)}$ sont des points de $(P^{(\Omega)})'$. Car s'ils ne l'étaient pas, il y aurait un point α de $P^{(\Omega)}$

tel, qu'on pourrait l'entourer d'un intervalle $(\alpha - \delta) \ldots . (\alpha + \delta)$ dans lequel aucun autre point de $P^{(\Omega)}$ ne tomberait. Soit Q la partie de P' située dans l'intervalle $(\alpha - \delta) \ldots (\alpha + \delta)$, il en résulterait que

$$Q^{(\Omega)} \equiv \alpha$$

ce qui est impossible.

Donc on ne peut entourer α d'un tel intervalle.

Or

$$\mathfrak{D}(P^{(\Omega)}, (P^{(\Omega)})') \equiv P^{(\Omega)}.$$

Il s'en suit que $(P^{(\Omega)})'$ est un ensemble parfait.

Mais chaque point de $(P^{(\Omega)})'$ est aussi un point de $P^{(\Omega)}$. Car si α_1 est un point de $(P^{(\Omega)})'$, il se trouve dans chaque intervalle $\alpha_1 - \delta \ldots \alpha_1 + \delta$ des points de $P^{(\Omega)}$. C'est à dire, dans chaque intervalle $\alpha_1 - \delta \ldots \alpha_1 + \delta$ il tombe une partie Q_1 de P' telle qu'il n'y a pas un γ pour lequel $Q_1^{(\gamma)} \equiv 0$.

Or dans chaque intervalle $\alpha_1 - \delta \ldots \alpha_1 + \delta$ tombent des points de $Q_1^{(\gamma)}$ c'est à dire de $P^{(\gamma)}$.

Il s'en suit que α_1 est un point de chaque $P^{(\gamma+1)}$ c'est à dire de chaque $P^{(\gamma)}$.

Or α_1 est un point de $P^{(\Omega)}$.

Il faut donc que

$$\mathfrak{D}(P^{(\Omega)}; (P^{(\Omega)})') \equiv (P^{(\Omega)})'.$$

Mais de l'autre côté nous avons

$$\mathfrak{D}(P^{(\Omega)}, (P^{(\Omega)})') \equiv P^{(\Omega)}.$$

Donc

$$P^{(\Omega)} \equiv (P^{(\Omega)})'.$$

c. q. f. d.

Démonstration du théorème F.

Posons $P' \equiv R + P^{(\Omega)}$, nous voulons prouver que R a la première puissance.

Chaque point α_1 de R est tel qu'on peut l'entourer d'un intervalle $\alpha_1 - \delta_1 \ldots \alpha_1 + \delta_2$, où il n'y a pas de points de $P^{(\Omega)}$. Car si on ne le pouvait pas, α_1 serait un point de $(P^{(\Omega)})'$ c'est à dire de $P^{(\Omega)}$, ce qui n'a pas lieu.

Cet intervalle où il n'y a pas de points de $P^{(\Omega)}$, s'étend évidemment sur chaque côté de α jusqu'au point le plus rapproché de $P^{(\Omega)}$. A chaque point de R correspond donc un intervalle dont les points extrêmes sont des points de $P^{(\Omega)}$ et dans lequel il n'y a pas de points de $P^{(\Omega)}$. Mais le même intervalle correspond ordinairement à plusieurs points de R.

Si nous regardons tous ces intervalles differents qui n'ont pas de points communs, je sais qu'ils forment un ensemble de la première puissance (ou fini). (1) Mais dans chacun de ces intervalles est située une partie de R, qui a la première puissance (ou est finie). Car soit R_1 la partie de R qui tombe dans l'un quelconque de ces intervalles, nous savons que $R_1^{(\Omega)}$ ne contient pas un seul point, chaque point de $R_1^{(\Omega)}$ étant à la fois un point de $P^{(\Omega)}$.

Or R_1 a la première puissance (ou est fini).

Comme dans chacun des intervalles nommés tombe un ensemble de points qui a la première puissance (ou est fini) et que ces intervalles forment aussi un ensemble de la première puissance (ou fini), il en résulte que la somme de tous ces ensembles de points a la première puissance.

Mais la somme de tous les ensembles de points situés dans les intervalles nommés, c'est précisément mon ensemble R.

Donc R a la première puissance.

c. q. f. d.

Démonstration du théorème G.

Il ne nous reste maintenant qu'à démontrer que pour un certain γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II), on a

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\gamma)}) \equiv 0.$$

Nous avons

$$P' \equiv R + P^{(\Omega)}.$$

(1) Voir le théorème de M. Cantor page 366 de ce même tome.

Chaque point de $P^{(\gamma)}$ appartient à P', c'est à dire à R ou à $P^{(\Omega)}$. Mais $P^{(\Omega)}$ est une partie intégrante de $P^{(\gamma)}$. Il faut donc que $P^{(\gamma)} - P^{(\Omega)}$ ne contienne que des points de R. Or

$$P^{(\gamma)} - P^{(\Omega)} \equiv \mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma)}).$$

Il s'en suit que

$$P^{(\gamma)} \equiv P^{(\Omega)} + \mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma)});$$

De même

$$P^{(\gamma+1)} \equiv P^{(\Omega)} + \mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma+1)});$$

Ou il y a maintenant un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II), tel que

$$\mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma)}) \equiv \mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma+1)})$$

ou il n'y en a pas.

S'il y a un γ dans ces conditions, nous voyons que pour ce γ

$$P^{(\gamma)} \equiv P^{(\Omega)} + \mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma)}) \equiv P^{(\Omega)} + \mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma+1)}) \equiv P^{(\gamma+1)}.$$

Or $P^{(\gamma)} \equiv P^{(\Omega)}$.

De plus, nous savons que

$$\mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma)}) \equiv \mathfrak{D}(R,\ P^{(\Omega)}) \equiv 0.$$

Mais $R^{(\gamma)}$ ne contient d'autres points que $P^{(\gamma)}$. Il s'en suit que

$$\mathfrak{D}(R,\ R^{(\gamma)}) \equiv 0.$$

Si au contraire il n'existe pas un γ tel que

$$\mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma)}) \equiv \mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma+1)}),$$

il faut nécessairement qu'il y ait pour chaque γ des points de R qui disparaissent, quand je passe de $P^{(\gamma)}$ à $P^{(\gamma+1)}$, c'est à dire des points de R tels, qu'ils appartiennent à $P^{(\gamma)}$ mais non à $P^{(\gamma+1)}$.

Je peux donc ranger les points de R de telle manière qu'à chaque γ correspondent les points de R qui appartiennent à $P^{(\gamma)}$ mais non à $P^{(\gamma+1)}$. Or R a au moins la même puissance que les quantités γ, c'est à dire des nombres de la classe (II), ce qui est contraire au théorème F. [1]

---

[1] Voir le théorème de M. CANTOR page 388 de ce même tome.

Il existe donc toujours un certain γ tel que

$$\mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma)}) \equiv \mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma+1)})$$

Il en résulte qu'il y a toujours un certain γ tel que

$$\mathfrak{D}(R,\ R^{(\gamma)}) \equiv 0.$$

c. q. f. d.

J'ai fait la démonstration ici en supposant que P' soit situé dans un espace continu à une seule dimension.

Le théorème G se prouve exactement de la même manière, si P' est situé dans un espace continu à n dimensions. Quant aux autres théorèmes, leur démonstration dans ce cas est entièrement analogue à la précédente et je ne crois pas nécessaire de la donner séparément.

Je puis maintenant énoncer le théorème primitif de la manière suivante:

»*Si P est un ensemble de points, situés dans un espace continu à n dimensions, et si P' a une puissance plus grande que la première, il existe toujours un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II), et tel que $P^{(\gamma)}$ est un ensemble parfait.*»

La preuve de ce théorème n'offre pas de difficulté.

Nous avons

$$P' \equiv R + P^{(\Omega)}$$

où $P^{(\Omega)}$ est parfait et R est tel que $\mathfrak{D}(R,\ R^{(\gamma)}) \equiv 0$.

Mais $R^{(\gamma)}$ ne contient que des points de P'. Or $R^{(\gamma)}$ ne contient que des points de $P^{(\Omega)}$.

Il s'en suit que

$$P^{(\gamma)} \equiv P^{(\Omega)}$$

c'est à dire $P^{(\gamma)}$ *est un ensemble parfait.*

c. q. f. d.

On obtient maintenant le théorème général qui suit:

»*Si P est un ensemble quelconque de points, situés dans un espace continu à n dimensions, il existe toujours un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II) tel que*

$$P^{(\gamma)} \equiv P^{(\gamma+1)}.\text{»}$$

Car ou P' est de la première puissance (ou fini), ou il ne l'est pas. Si P' est de la première puissance (ou fini), il existe toujours un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II), tel que

$$P^{(\gamma)} \equiv 0 \equiv P^{(\gamma+1)}$$ [1]

Si P' n'est pas de la première puissance (et n'est pas fini), il existe toujours un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II), tel que $P^{(\gamma)}$ est parfait, c'est à dire

$$P^{(\gamma)} \equiv P^{(\gamma+1)}$$

c. q. f. d.

Avant de finir je veux démontrer un théorème assez remarquable.

Revenons pour cela à notre exemple P_e page 417, nous voyons que P'_e est un ensemble parfait, situé dans un espace continu à une seule dimension, et tel qu'il peut être exprimé comme le premier ensemble dérivé de l'ensemble isolé T, situé lui aussi dans un espace à une seule dimension.

On peut prouver que:

»*Si P est un ensemble parfait, tel qu'il ne forme nulle part un espace continu et situé dans un espace continu à une dimension, l'ensemble P peut toujours être exprimé comme le premier ensemble dérivé d'un ensemble isolé, situé aussi dans un espace à une dimension.*»

On voit de suite que cette qualité n'appartient pas aux ensembles parfaits qui forment quelque part un espace continu.

Soit P un ensemble parfait qui ne forme nulle part un espace continu et situé dans l'intervalle $\alpha \ldots \beta$ $(\alpha < \beta)$ de l'axe réel.

Par $(\alpha \ldots \beta)$ je désigne l'ensemble de tous les points de l'intervalle $\alpha \ldots \beta$.

Posons

$$(\alpha \ldots \beta) \equiv P + S$$

Si α_1 est un point de S, je peux donc l'entourer d'une étendue $\alpha_1 - \delta_1 \ldots \alpha_1 + \delta_2$ dans laquelle il n'y a pas un seul point de P. Car si on ne le pouvait pas, α_1 serait un point de P', c'est à dire de P, ce qui n'a pas lieu.

---

[1] Voir le théorème C de M. Cantor page 409 de ce même tome.

Cette étendue $\alpha_1 - \delta_1 \ldots \alpha_1 + \delta_2$ dans laquelle il n'y a pas de points de P s'étend à chaque côté de α_1 jusqu'au point le plus rapproché de P.

Si nous regardons toutes les differentes étendues dont les points extrêmes sont des points de P, mais en dedans desquelles ne se trouve aucun point de P, je sais que ces étendues forment un ensemble de la première puissance. (¹) Or l'ensemble Q formé par tous les points extrêmes de ces étendues a aussi la première puissance.

Mais comme les points extrêmes de ces étendues sont des points de P, nous savons que Q est une partie intégrante de P.

L'ensemble Q' est un ensemble parfait. Car si l'on entoure un point β_1 de Q d'un intervalle $\beta_1 - \delta \ldots \beta_1 + \delta$, je sais qu'il y a des points de P dans cet intervalle (chaque point de Q étant point de P, c'est à dire de P'). Mais comme P n'est condensé dans aucune partie de l'intervalle $\alpha \ldots \beta$, il y a aussi dans l'intervalle $\beta_1 - \delta \ldots \beta_1 + \delta$ une étendue, dans laquelle il n'y a pas de points de P.

Les points extrêmes de cette étendue étant des points de Q, il en résulte qu'il y a des points de Q dans chaque intervalle $\beta_1 - \delta \ldots \beta_1 + \delta$.

Or β_1 est un point de Q'.

Or chaque point de Q est aussi point de Q' c'est à dire

$$\mathfrak{D}(Q, Q') \equiv Q,$$

et alors Q' est un ensemble parfait.

Maintenant je veux prouver que $Q' \equiv P$.

Il est clair que chaque point de Q' est aussi point de P. Car Q étant une partie intégrante de P, il faut que Q' soit une partie intégrante de P', c'est à dire de P.

On prouve que chaque point de P est aussi point limite de Q, absolument comme j'ai prouvé que chaque point de Q était point limite de Q.

Or P est une partie intégrante de Q'.

Il s'en suit que

$$P \equiv Q'.$$

Si l'on inscrit maintenant dans chaque étendue $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_2$ (ε_1, ε_2 sont points de Q), en dedans de laquelle il ne tombe pas de points de P, un

---

(¹) Voir le théorème de M. Cantor page 366 de ce même tome.

ensemble isolé $Q_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, comme je l'ai défini page 416, je sais que l'ensemble Q_S de tous les $Q_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ est un ensemble de points isolés.

L'ensemble Q_S est tel que

$$Q'_S \equiv P.$$

Car Q'_S contient au moins tous les points de Q et ne peut contenir que des points de Q'. Or Q''_S contient tous les points de Q'. Il en résulte que Q'_S contient tous les points de Q'.

Or

$$Q'_S \equiv Q' \equiv P.$$

Q_S est donc l'ensemble isolé cherché.

c. q. f. d.

Il existe naturellement un nombre infini d'ensembles isolés Q_S tels que

$$Q'_S \equiv P.$$

Je puis enfin énoncer le théorème suivant dont la preuve a été donnée ici:

»Chaque ensemble parfait P qui ne forme nulle part un espace continu et qui est situé dans un espace continu à une seule dimension, peut être exprimé comme le premier ensemble dérivé d'un ensemble de la première puissance Q, dont les points sont les points extrêmes d'étendues en dedans desquelles ne tombe aucun point de P.»