# SUR LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

PAR

**MARTIN KRAUSE**

À ROSTOCK.

Soit $n$ un nombre positif impair pris à volonté, puis

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ \xi & t' \end{vmatrix}$$

un réprésentant pris à volonté appartenant à la transformation de $n^{\text{ème}}$ degré, on a, comme on sait, les équations:

$$(1)\quad \begin{aligned}
\vartheta(v',\ \tau')_0 &= x_1\vartheta(v)_0^n + x_2\vartheta(v)_0^{n-2}\vartheta(v)_1^2 + \ldots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta(v)_0\vartheta(v)_1^{n-1}\\
\vartheta(v',\ \tau')_2 &= x_1\vartheta(v)_2^n + x_2\vartheta(v)_2^{n-2}\vartheta(v)_3^2 + \ldots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta(v)_2\vartheta(v)_3^{n-1}\\
\vartheta(v',\ \tau')_3 &= x_1\vartheta(v)_3^n + x_2\vartheta(v)_3^{n-2}\vartheta(v)_2^2 + \ldots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta(v)_3\vartheta(v)_2^{n-1}\\
(-1)^{\frac{t-1}{2}}\vartheta(v',\ \tau')_1 &= x_1\vartheta(v)_1^n + x_2\vartheta(v)_1^{n-2}\vartheta(v)_0^2 + \ldots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta(v)_1\vartheta(v)_0^{n-1}.
\end{aligned}$$

*Acta mathematica.* 2. Imprimé 8 Septembre 1883.

Dans ces équations:

$$v' = tv, \qquad \tau' = \frac{t\tau - \xi}{t'};$$

et les grandeurs $x_1, x_2, \ldots x_{\frac{n+1}{2}}$ sont des constantes qui seront déterminées dans la suite.

Ces équations peuvent se mettre sous la forme:

$$\frac{\vartheta(v', \tau')_0}{\vartheta(v)_0^n} = x_1 + x_2 \frac{\vartheta(v)_1^2}{\vartheta(v)_0^2} + \ldots + x_{\frac{n+1}{2}} \frac{\vartheta(v)_1^{n-1}}{\vartheta(v)_0^{n-1}}$$

$$\frac{\vartheta(v', \tau')_2}{\vartheta(v', \tau')_0} \cdot \frac{\vartheta(v', \tau')_0}{\vartheta(v)_0^n} = x_1 \frac{\vartheta(v)_2^n}{\vartheta(v)_0^n} + x_2 \frac{\vartheta(v)_2^{n-2}\vartheta(v)_3^2}{\vartheta(v)_0^n} + \ldots + x_{\frac{n+1}{2}} \frac{\vartheta(v)_2\vartheta(v)_3^{n-1}}{\vartheta(v)_0^n}$$

(2)

$$\frac{\vartheta(v', \tau')_3}{\vartheta(v', \tau')_0} \cdot \frac{\vartheta(v', \tau')_0}{\vartheta(v)_0^n} = x_1 \frac{\vartheta(v)_3^n}{\vartheta(v)_0^n} + x_2 \frac{\vartheta(v)_3^{n-2}\vartheta(v)_2^2}{\vartheta(v)_0^n} + \ldots + x_{\frac{n+1}{2}} \frac{\vartheta(v)_3\vartheta(v)_2^{n-1}}{\vartheta(v)_0^n}.$$

$$(-1)^{\frac{t-1}{2}} \frac{\vartheta(v', \tau')_1}{\vartheta(v', \tau')_0} \cdot \frac{\vartheta(v', \tau')_0}{\vartheta(v)_0^n} = x_1 \frac{\vartheta(v)_1^n}{\vartheta(v)_0^n} + x_2 \frac{\vartheta(v)_1^{n-2}}{\vartheta(v)_0^{n-2}} + \ldots + x_{\frac{n+1}{2}} \frac{\vartheta(v)_1}{\vartheta(v)_0}.$$

Alors, si on a les rapports:

$$O_\alpha = \vartheta(o, \tau')_\alpha, \qquad k = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}, \qquad k' = \frac{O_2^2}{O_3^2},$$

$$u' = \pi O_3^2 v' = \pi t O_3^2 v = t \frac{O_3^2}{\vartheta_3^2} u = Mu$$

on aura:

$$\frac{\vartheta(v)_1}{\vartheta(v)_0} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} \operatorname{sn}(u, k), \qquad \frac{\vartheta(v)_2}{\vartheta(v)_0} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_0} \operatorname{cn}(u, k), \qquad \frac{\vartheta(v)_3}{\vartheta(v)_0} = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_0} \operatorname{dn}(u, k),$$

$$\frac{\vartheta(v', \tau')_1}{\vartheta(v', \tau')_0} = \frac{O_2}{O_3} \operatorname{sn}(u', k'), \qquad \frac{\vartheta(v', \tau')_2}{\vartheta(v', \tau')_0} = \frac{O_2}{O_0} \operatorname{cn}(u', k'), \qquad \frac{\vartheta(v', \tau')_3}{\vartheta(v', \tau')_0} = \frac{O_3}{O_0} \operatorname{dn}(n', k').$$

On obtient par conséquent les équations

$$
\begin{aligned}
&\vartheta_3^n \frac{\vartheta(v', \tau')_0}{\vartheta(v)_0^n} = x_1\vartheta_3^n + x_2\vartheta_3^{n-2}\vartheta_2^2 \operatorname{sn}^2(u, k) + \dots x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_3\vartheta_2^{n-1}\operatorname{sn}^{n-1}(u, k),\\
&\frac{O_2\vartheta_0^n}{O_0}\operatorname{cn}(u', k')\frac{\vartheta(v', \tau')_0}{\vartheta(v)_0^n} = x_1\vartheta_2^n \operatorname{cn}^n(u, k) + x_2\vartheta_2^{n-2}\vartheta_3^2\operatorname{cn}^{n-2}(u, k)\operatorname{dn}^2(u, k) + \dots\\
&\qquad\qquad + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_2\vartheta_3^{n-1}\operatorname{cn}(u, k)\operatorname{dn}^{n-1}(u, k),\\
(3)\quad &\frac{O_3\vartheta_0^n}{O_0}\operatorname{dn}(u', k')\frac{\vartheta(v', \tau')_0}{\vartheta(v)_0^n} = x_1\vartheta_3^n\operatorname{dn}^n(u, k) + x_2\vartheta_3^{n-2}\vartheta_2^2\operatorname{dn}^{n-2}(u, k)\operatorname{cn}^2(u, k) + \dots\\
&\qquad\qquad + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_3\vartheta_2^{n-1}\operatorname{dn}(u, k)\operatorname{cn}^{n-1}(u, k),\\
&(-1)^{\frac{t-1}{2}}\frac{O_2\vartheta_3^n}{O_3}\operatorname{sn}(u', k')\frac{\vartheta(v', \tau')_0}{\vartheta(v)_0^n} = x_1\vartheta_2^n\operatorname{sn}^n(u, k) + x_2\vartheta_2^{n-2}\vartheta_3^2\operatorname{sn}^{n-2}(u, k) + \dots\\
&\qquad\qquad + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_2\vartheta_3^{n-1}\operatorname{sn}(u, k).
\end{aligned}
$$

De ces équations on tire les trois suivantes:

$$
\begin{aligned}
&x_1\left(\vartheta_2^n\operatorname{cn}^n(u, k) - \frac{O_2 . \vartheta_0^n}{O_0}\operatorname{cn}(u', k')\right) + \dots\\
&+ x_{\frac{n+1}{2}}\left(\vartheta_2\vartheta_3^{n-1}\operatorname{cn}(u, k)\operatorname{dn}^{n-1}(u, k) - \frac{O_2 . \vartheta_0^n . \vartheta_2^{n-1}}{O_0\vartheta_3^{n-1}}\operatorname{cn}(u', k') . \operatorname{sn}^{n-1}(u, k)\right) = 0,\\
&x_1\left(\vartheta_3^n\operatorname{dn}^n(u, k) - \frac{O_3\vartheta_0^n}{O_0}\operatorname{dn}(u', k')\right) + \dots\\
(4)\quad &+ x_{\frac{n+1}{2}}\left(\vartheta_3\vartheta_2^{n-1}\operatorname{dn}(u, k)\operatorname{cn}^{n-1}(u, k) - \frac{O_3 . \vartheta_0^n\vartheta_2^{n-1}}{O_0 . \vartheta_3^{n-1}}\operatorname{dn}(u', k') . \operatorname{sn}^{n-1}(u, k)\right) = 0,\\
&x_1\left(\vartheta_2^n\operatorname{sn}^n(u, k) - \frac{(-1)^{\frac{t-1}{2}} O_2 . \vartheta_3^n}{O_3}\operatorname{sn}(u', k')\right) + \dots\\
&+ x_{\frac{n+1}{2}}\left(\vartheta_2\vartheta_3^{n-1}\operatorname{sn}(u, k) - \frac{(-1)^{\frac{t-1}{2}} O_2 . \vartheta_3\vartheta_2^{n-1}}{O_3}\operatorname{sn}(u', k') . \operatorname{sn}^{n-1}(u, k)\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Représentons-nous maintenant, dans les deux derniers systèmes d'équations, les fonctions $\operatorname{sn}^e(u, k)$, $\operatorname{cn}^e(u, k)$, $\operatorname{dn}^e(u, k)$, développées d'après les puissances de $u$, comme M. HERMITE, D. ANDRÉE et d'autres en ont donné l'exemple. Les coefficients sont des fonctions rationnelles connues des grandeurs $\vartheta_a$. Représentons-nous de même les fonctions $\operatorname{sn}(u', k')$,

$\mathrm{cn}(u', k')$, $\mathrm{dn}(u', k')$ et leurs produits avec $\mathrm{sn}^{\epsilon}(u, k)$, développés d'après les puissances de $u$. Les coefficients sont des fonctions rationnelles connues des grandeurs $\vartheta_a$ et $O_a$.

Soit enfin:

$$\frac{\vartheta(v', \tau')_0}{\vartheta(v)_0^n} = \eta_0 + \eta_2 u^2 + \eta_4 u^4 + \dots$$

où il faut considérer les grandeurs $\eta_2, \eta_4, \dots$ comme inconnues.

Représentons-nous ces développements introduits dans les équations (3) et (4) et les coefficients de $u^0, u^1, \dots u^{2r+1}$ également placés à droite et à gauche; le système d'équations (3) donnera lieu, en somme, à $4r$ équations linéaires à $\frac{n+1}{2} + r - 1$ inconnues $x_1, x_2, \dots x_{\frac{n+1}{2}}, \eta_2, \dots \eta_{2r}$, et le système d'équations (4), à $3r$ équations linéaires à $\frac{n+1}{2}$ inconnues $x_1, x_2, \dots x_{\frac{n+1}{2}}$.

Quand $r$ augmentera, les constantes $x_1, \dots x_{\frac{n+1}{2}}$ pourront être exprimées d'une manière rationnelle par les grandeurs $\vartheta_a$ et $O_a$ d'autant de manières que l'on voudra. On trouve en même temps autant de rapports rationnels que l'on veut entre les grandeurs $\vartheta_a$ et $O_a$ elles-mêmes.

On peut encore multiplier ces rapports en appliquant la transformation supplémentaire et la transformation linéaire.

En combinant avec ce procédé de détermination des constantes le procédé ordinaire, au moyen duquel les constantes ou du moins leurs quotients sont exprimés par les grandeurs

$$\vartheta\left(\frac{m + m_1\tau}{n}\right)_a,$$

on obtient facilement des rapports pour les valeurs partielles des fonctions théta, comme Gauss, Jacobi, Schroeter et d'autres en ont découverts.

Dans les cas les plus simples la méthode conduit vite au résultat. Posons $r = 0$, nous avons la détermination des constantes pour $n = 3, 5, 7$; de plus on obtient pour $n = 3$ et $n = 5$ des rapports entre $\vartheta_a$ et $O_a$; si on pose $r = 1$, on obtient en outre la détermination des constantes pour $n = 9, 11, 13$, et des rapports modulaires pour la transformation du 9ème et du 11ème degré, etc. Dans des circonstances de ce genre cette méthode se recommenderait avant tout pour l'application pratique.