

UNE QUESTION DE RENTES VIAGÈRES

PAR

L. LINDELÖF

A HELSINGFORS.

Dans la première livraison des *Acta mathematica* M. MALMSTEN vient de publier un article intéressant sur la théorie des rentes viagères, ayant pour objet de déterminer la valeur d'une pension annuelle de 1 fr. assurée à un groupe donné de n personnes, tant que v , au moins, d'entre elles restent en vie.

Ayant eu occasion, dans une recherche statistique récemment terminée sur l'état d'une caisse de pension finlandaise,⁽¹⁾ de m'occuper d'une question analogue, j'ai été amené à l'envisager à un point de vue un peu plus général; et comme le résultat de cet examen n'est peut-être pas sans intérêt, je demande la permission de l'exposer ici en peu de mots.

Le problème généralisé que nous avons en vue, peut s'énoncer dans les termes suivants:

Trouver la valeur annuelle d'une rente viagère, payable à la fin de chaque année à un groupe donné de n personnes à telles conditions, que la somme à payer chaque fois, au lieu d'être constante, dépende du nombre des survivants et qu'elle soit fixée respectivement à $r_n, r_{n-1}, r_{n-2}, \dots, r_1$ fr. pour les périodes de temps successives où le groupe donné sera réduit à $n, n-1, n-2, \dots, 1$ personnes en vie.

⁽¹⁾ Statistiska beräkningar angående finska civilstatens enke- och pupillkassa. Helsingfors 1882. (*Acta Societatis Scientiarum Fennicae*, Tom. XIII.)

Soient x_1, x_2, \dots, x_n les âges actuels des n personnes. Suivant l'usage des actuaires anglais nous désignons par $a_x, a_{xy}, a_{xyz}, \dots$ la valeur d'une annuité ($= 1$) sur une, deux, trois, \dots têtes, x, y, z, \dots étant les âges respectifs. Le groupe primitif donnant lieu à

$$\frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{1 \cdot 2 \dots p} = \binom{n}{p}$$

combinaisons distinctes de p têtes, nous désignons de plus par S_p la somme des valeurs des annuités relatives à toutes ces combinaisons, en sorte que

$$S_1 = a_{x_1} + a_{x_2} + \dots + a_{x_n}$$

$$S_2 = a_{x_1 x_2} + a_{x_1 x_3} + a_{x_2 x_3} + \dots$$

et ainsi de suite. Les âges x_1, x_2, \dots, x_n étant donnés, on peut calculer, suivant des règles connues, les valeurs des annuités a et par suite des sommes S . En supposant qu'on ait ainsi évalué les quantités S_1, S_2, \dots, S_n , la valeur actuelle V de la rente viagère dont il s'agit, peut s'exprimer au moyen d'elles par une équation, dont la forme générale résulte des considérations suivantes.

Imaginons-nous une telle convention faite avec les n personnes que chacune d'elles reçoive séparément une annuité viagère ρ_1 , et qu'en outre une annuité ρ_2 soit assurée à chaque combinaison de deux têtes durant son existence, une annuité ρ_3 à chaque combinaison de trois têtes, et ainsi de suite jusqu'à la combinaison unique de n têtes à laquelle on aura de même assuré une annuité ρ_n , les quantités ρ pouvant du reste être positives ou négatives, suivant qu'il s'agit réellement de sommes à payer aux assurés ou à retrancher. Il est évident que les n inconnues $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ pourront être déterminées de manière que la somme annuelle à payer ainsi pendant chacune des n périodes successives s'accorde exactement avec la rente viagère précédemment stipulée, dont la valeur actuelle, dès lors, sera

$$(1) \quad V = \rho_1 S_1 + \rho_2 S_2 + \rho_3 S_3 + \dots + \rho_n S_n.$$

Il est facile d'établir les équations de condition auxquelles les inconnues ρ doivent satisfaire. Considérons, par exemple, la $m^{\text{ième}}$ période à partir de la fin, c. à. d. celle où le nombre des survivants est réduit à m per-

sonnes. Comme avec ce nombre on peut former $\binom{m}{2}$ combinaisons de deux têtes, $\binom{m}{3}$ combinaisons de trois têtes etc., la somme annuelle à payer à l'ensemble de toutes ces combinaisons durant la période dont il s'agit, sera

$$r_m = m\rho_1 + \binom{m}{2}\rho_2 + \binom{m}{3}\rho_3 + \dots + \binom{m}{m}\rho_m$$

Faisant successivement $m = 1, 2, 3, \dots, n$, on obtient le système suivant d'équations

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1 = \rho_1 \\ r_2 = 2\rho_1 + \rho_2 \\ r_3 = 3\rho_1 + 3\rho_2 + \rho_3 \\ \dots \\ r_n = n\rho_1 + \binom{n}{2}\rho_2 + \binom{n}{3}\rho_3 + \dots + \rho_n \end{array} \right.$$

Pour tirer de ces équations la valeur d'une inconnue quelconque ρ_m , il suffit d'ajouter les m premières d'entre elles, après les avoir multipliées respectivement par les nombres binomiaux

$$\binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \dots, \binom{m}{m},$$

pris alternativement avec les signes $+$ et $-$. En effet, dans le résultat de cette opération l'inconnue ρ_p ($p < m$) sera, au signe près, affectée du coefficient

$$\binom{m}{p} - \binom{m}{1}\binom{m-1}{p} + \binom{m}{2}\binom{m-2}{p} - \dots \pm \binom{m}{m-p}\binom{p}{p},$$

lequel, à cause de l'identité

$$\binom{m}{q}\binom{m-q}{p} = \binom{m}{p}\binom{m-p}{q},$$

peut être mis sous la forme

$$\binom{m}{p} \left\{ 1 - \binom{m-p}{1} + \binom{m-p}{2} - \dots \pm 1 \right\} = \binom{m}{p} (1-1)^{m-p}$$

et, par conséquent, s'évanouit identiquement. On aura donc

$$(3) \quad \rho_m = r_m - \binom{m}{1} r_{m-1} + \binom{m}{2} r_{m-2} - \dots \pm \binom{m}{m-1} r_1$$

ou bien, en faisant successivement $m = 1, 2, 3, \dots, n$,

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = r_1 \\ \rho_2 = r_2 - 2r_1 \\ \rho_3 = r_3 - 3r_2 + 3r_1 \\ \dots \\ \rho_n = r_n - \binom{n}{1} r_{n-1} + \binom{n}{2} r_{n-2} - \dots \pm nr_1 \end{array} \right.$$

Les coefficients de l'équation fondamentale (1) étant déterminés, notre problème se trouve ainsi complètement résolu.

Dans le cas particulier traité par M. MALMSTEN on a

$$r_1 = r_2 = \dots = r_{v-1} = 0 \quad \text{et} \quad r_v = r_{v+1} = \dots = r_n = 1,$$

ce qui donne d'abord

$$\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_{v-1} = 0 \quad \text{et} \quad \rho_v = 1.$$

Pour $m > v$, la formule (3) devient, dans ce cas,

$$\rho_m = 1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \dots \pm \binom{m}{m-v} = (-1)^{m-v} \binom{m-1}{m-v}$$

et l'on obtient pour la valeur actuelle de la rente viagère l'expression suivante

$$V = S_v - vS_{v+1} + \frac{v(v+1)}{1 \cdot 2} S_{v+2} - \dots \pm \frac{v(v+1) \dots (n-1)}{1 \cdot 2 \dots (n-v)} S_n,$$

qui s'accorde, sauf la notation, avec le résultat de M. MALMSTEN.

Dans les règlements des caisses de secours il est souvent stipulé que la rente viagère ou pension, assurée à une famille, constitue une annuité fixe (= 1) tant que deux ou plusieurs membres de la famille restent en vie, mais qu'elle se réduise à une certaine fraction θ de cette annuité

pour le dernier survivant. Les coefficients ρ seront alors déterminés par la formule

$$\rho_m = 1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \dots \pm \binom{m}{m-1} \theta = (-1)^m (m - 1 - m\theta)$$

et l'on aura

$$V = \theta S_1 + (1 - 2\theta) S_2 - (2 - 3\theta) S_3 + (3 - 4\theta) S_4 - \dots \pm (n - 1 - n\theta) S_n.$$

Si l'on suppose en particulier $\theta = \frac{2}{3}$, il vient

$$\rho_m = (-1)^m \cdot \frac{m-3}{3}$$

et par suite

$$V = \frac{2}{3} S_1 - \frac{1}{3} S_2 \pm 0 \cdot S_3 + \frac{1}{3} S_4 - \frac{2}{3} S_5 + \dots \pm \frac{n-3}{3} S_n.$$

C'est la formule d'après laquelle nous avons en effet, dans le travail cité plus haut, calculé la table XXII, donnant pour différentes combinaisons d'âges les valeurs d'une pension assurée à une famille de 2, 3, ... 8 enfants.

Dans le même travail nous avons encore à traiter un cas où la pension dépendait non seulement du nombre des survivants, mais en certaine mesure aussi de la vie d'une personne particulière (la veuve) désignée d'avance. Ce cas pourrait donner lieu à une généralisation ultérieure de notre problème, mais dont la discussion excède les limites de la présente communication.
