EINE VERALLGEMEINERUNG DER GLEICHUNG

$\Gamma(1+x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}$.

Aus einem Brief an Herrn G. Mittag-Leffler

VON

HJALMAR MELLIN
IN HELSINGFORS.

Diejenige Eigenschaft der Gammafunction, welche durch die Gleichung

$$\Gamma(1+x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}$$

ausgedrückt wird, kann offenbar auch so angegeben werden, dass

$$\frac{1}{\Gamma(1-\rho_1 x)\Gamma(1-\rho_2 x)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

ist, wenn ρ_1, ρ_2 die zwei Wurzeln der Gleichung

$$\rho^2 = 1,$$

bezeichnen. Dieser Satz ist nur ein Specialfall des folgenden. Sind $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ die ν Wurzeln der Gleichung

$$\rho^\nu = 1$$

so ist

$$\frac{1}{\Gamma(1-\rho_1 x)\Gamma(1-\rho_2 x)\ldots\Gamma(1-\rho_\nu x)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^\nu}{n^\nu}\right).$$

Acta mathematica. 3. Imprimé 28 Août 1883.

Diese Gleichung ist wieder ein Specialfall der folgenden

$$\frac{\Gamma^\nu(z)}{\Gamma(z-\rho_1 x)\Gamma(z-\rho_2 x)\ldots\Gamma(z-\rho_\nu x)}=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{x^\nu}{(z+n)^\nu}\right),$$

wo $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ die obige Bedeutung haben.

Sie ergiebt sich auf folgende Weise. Aus den Gleichungen

$$\Gamma(x)=\frac{e^{-Cx}}{x\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}},\quad (C=0{,}577\ldots)$$

$$\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_\nu=0$$

folgt zunächst

$$\frac{\Gamma^\nu(z)}{\Gamma(z-\rho_1 x)\Gamma(z-\rho_2 x)\cdots\Gamma(z-\rho_\nu x)}=$$

$$\frac{(z-\rho_1 x)(z-\rho_2 x)\cdots(z-\rho_\nu x)\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}-\rho_1\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{z}{n}-\rho_2\frac{x}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}-\rho_\nu\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{\nu z}{n}}}{z^\nu\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^\nu e^{-\frac{\nu z}{n}}}$$

Weil ferner

$$(z-\rho_1 x)(z-\rho_2 x)\cdots(z-\rho_\nu x)=z^\nu-x^\nu,$$

$$\left(1+\frac{z}{n}-\rho_1\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{z}{n}-\rho_2\frac{x}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}-\rho_\nu\frac{x}{n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{z}{n}\right)^\nu-\frac{x^\nu}{n^\nu}=\left(1+\frac{z}{n}\right)^\nu\left(1-\frac{x^\nu}{(z+n)^\nu}\right),$$

so sieht man dass

$$\frac{\Gamma^\nu(z)}{\Gamma(z-\rho_1 x)\Gamma(z-\rho_2 x)\cdots\Gamma(z-\rho_\nu x)}=\frac{(z^\nu-x^\nu)\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^\nu}{(z+n)^\nu}\right)\left(1+\frac{z}{n}\right)^\nu e^{-\frac{\nu z}{n}}}{z^\nu\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^\nu e^{-\frac{\nu z}{n}}}$$

$$=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{x^\nu}{(z+n)^\nu}\right)$$

Bedenkt man, wie die Nullstellen der Function

$$F(x) = x^{\mu} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^{\nu}}{n^{\nu}} \right)$$

in der x-Ebene vertheilt sind, so sieht man leicht ein, dass dieselbe nicht periodisch sein kann, wie auch die ganze Zahl μ gewählt werden mag, wenn $\nu > 2$ ist. Ist $\mu = 1$, $\nu = 2$, so ist

$$F(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi} = \frac{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}{2\pi i}.$$

Da i und $-i$ die Wurzeln der Gleichung

$$r^2 = -1$$

sind, so fragt es sich, ob es, auch für den Fall $\nu > 2$, möglich sei, die positive ganze Zahl μ und die Constanten $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ so zu bestimmen, dass

$$F(x) = A_1 e^{r_1 \pi x} + A_2 e^{r_2 \pi x} + \cdots + A_\nu e^{r_\nu \pi x}$$

wäre, wo $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ die ν Wurzeln der Gleichung

$$r^{\nu} = -1$$

bedeuten. Die Coefficienten der beständig convergirenden Potenzreihe, in die $F(x)$ entwickelt werden kann, würden sicht leicht ergeben, wenn diese Frage bejaht werden könnte. Es ist aber dies nicht der Fall. Denn man kann beweisen, dass der letzte Ausdruck nicht alle Nullstellen der Function $F(x)$ haben kann. Ist also $\nu > 2$, so ist $F(x)$ nicht ein Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^{\nu} y}{dx^{\nu}} = -\pi^{\nu} y.$$