SUR LA TRANSFORMATION

DES

FONCTIONS HYPERELLIPTIQUES DE PREMIER ORDRE

PAR

MARTIN KRAUSE

À ROSTOCK.

Des travaux de M. HERMITE et d'autres savants sur la transformation des fonctions hyperelliptiques de premier ordre, il résulte qu'on peut représenter les fonctions théta transformées pour une transformation quelconque du $n^{\text{ème}}$ degré, abstraction faite d'un facteur commun, comme des fonctions entières des fonctions primitives théta, du $n^{\text{ème}}$ degré, et contenant un certain nombre de constantes linéairement. BRIOSCHI a donné une détermination de ces constantes. Nous ferons remarquer dans la suite une autre méthode de détermination au moyen de laquelle ces constantes deviennent des fonctions rationnelles des fonctions théta, soit primitives, soit transformées, quand les arguments prennent la valeur zéro. L'avantage de cette méthode, c'est qu'elle donne en même temps le moyen de déduire autant de rapports modulaires que l'on veut pour un degré quelconque de transformation.

Nous nous bornons ici au cas d'une transformation impaire, car le cas d'une transformation paire n'offre, en principe, aucune particularité. Nous aurons alors le droit de nous borner aux représentants qui appartiennent à la transformation proposée. Ces représentants devront être convenablement choisis. Enfin, nous signalerons quelques rapports qui existent entre ces théories et la théorie des nombres.

§ 1.

Nous rapprocherons d'abord certaines formules de la théorie des fonctions thêta, qui serviront beaucoup dans la suite. D'après la forme sous laquelle KOENIGSBERGER, dans le 64^e volume du Journal de CRELLE, a représenté le théorème de l'addition des fonctions thêta, on obtient immédiatement les relations suivantes:

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
\vartheta_5\vartheta_0\vartheta_5^2(v_1, v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_0(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_i} &= \vartheta_{01}\vartheta_1'(v_i)_0\vartheta_1(v_1, v_2)\vartheta_{01}(v_1, v_2) \\
&\quad + \vartheta_{03}\vartheta_3'(v_i)_0\vartheta_3(v_1, v_2)\vartheta_{03}(v_1, v_2). \\
\vartheta_4\vartheta_{14}\vartheta_5^2(v_1, v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_1(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_i} &= \vartheta_{23}\vartheta_{04}'(v_i)_0\vartheta_0(v_1, v_2)\vartheta_{01}(v_1, v_2) \\
&\quad - \vartheta_{03}\vartheta_{24}'(v_i)_0\vartheta_2(v_1, v_2)\vartheta_{12}(v_1, v_2). \\
\vartheta_5\vartheta_2\vartheta_5^2(v_1, v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_2(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_i} &= -\vartheta_{12}\vartheta_1'(v_i)_0\vartheta_1(v_1, v_2)\vartheta_{12}(v_1, v_2) \\
&\quad + \vartheta_{23}\vartheta_3'(v_i)_0\vartheta_3(v_1, v_2)\vartheta_{23}(v_1, v_2). \\
\vartheta_2\vartheta_{23}\vartheta_5^2(v_1, v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_3(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_i} &= \vartheta_{14}\vartheta_{02}'(v_i)_0\vartheta_0(v_1, v_2)\vartheta_{03}(v_1, v_2) \\
&\quad + \vartheta_{01}\vartheta_{24}'(v_i)_0\vartheta_4(v_1, v_2)\vartheta_{34}(v_1, v_2). \\
\vartheta_5\vartheta_4\vartheta_5^2(v_1, v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_4(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_i} &= -\vartheta_{14}\vartheta_1'(v_i)_0\vartheta_1(v_1, v_2)\vartheta_{14}(v_1, v_2) \\
&\quad - \vartheta_{34}\vartheta_3'(v_i)_0\vartheta_3(v_1, v_2)\vartheta_{34}(v_1, v_2). \\
\vartheta_5\vartheta_{01}\vartheta_5^2(v_1, v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{01}(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_i} &= -\vartheta_0\vartheta_1'(v_i)_0\vartheta_1(v_1, v_2)\vartheta_0(v_1, v_2) \\
&\quad - \vartheta_{03}\vartheta_{13}'(v_i)_0\vartheta_{13}(v_1, v_2)\vartheta_{03}(v_1, v_2).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vartheta_2\vartheta_0\vartheta_5^2(v_1,\ v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{02}(v_1,\ v_2)}{\vartheta_5(v_1,\ v_2)}}{\partial v_i} &= \vartheta_5\vartheta'_{02}(v_i)_0\vartheta_0(v_1,\ v_2)\vartheta_2(v_1,\ v_2) \\
&\quad - \vartheta_4\vartheta'_{13}(v_i)_0\vartheta_{04}(v_1,\ v_2)\vartheta_{24}(v_1,\ v_2). \\
\vartheta_5\vartheta_{03}\vartheta_5^2(v_1,\ v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{03}(v_1,\ v_2)}{\vartheta_5(v_1,\ v_2)}}{\partial v_i} &= -\vartheta_0\vartheta'_3(v_i)_0\vartheta_3(v_1,\ v_2)\vartheta_0(v_1,\ v_2) \\
&\quad + \vartheta_{01}\vartheta'_{13}(v_i)_0\vartheta_{13}(v_1,\ v_2)\vartheta_{01}(v_1,\ v_2). \\
\vartheta_4\vartheta_0\vartheta_5^2(v_1,\ v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{04}(v_1,\ v_2)}{\vartheta_5(v_1,\ v_2)}}{\partial v_i} &= \vartheta_5\vartheta'_{04}(v_i)_0\vartheta_0(v_1,\ v_2)\vartheta_4(v_1,\ v_2) \\
&\quad + \vartheta_2\vartheta'_{13}(v_i)_0\vartheta_{02}(v_1,\ v_2)\vartheta_{24}(v_1,\ v_2). \\
\vartheta_5\vartheta_{12}\vartheta_5^2(v_1,\ v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{12}(v_1,\ v_2)}{\vartheta_5(v_1,\ v_2)}}{\partial v_i} &= \vartheta_2\vartheta'_1(v_i)_0\vartheta_1(v_1,\ v_2)\vartheta_2(v_1,\ v_2) \\
&\quad + \vartheta_{23}\vartheta'_{13}(v_i)_0\vartheta_{13}(v_1,\ v_2)\vartheta_{23}(v_1,\ v_2). \\
\text{(I)}\qquad \vartheta_{03}\vartheta_{01}\vartheta_5^2(v_1,\ v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{13}(v_1,\ v_2)}{\vartheta_5(v_1,\ v_2)}}{\partial v_i} &= -\vartheta_0\vartheta'_{24}(v_i)_0\vartheta_1(v_1,\ v_2)\vartheta_3(v_1,\ v_2) \\
&\quad + \vartheta_5\vartheta'_{13}(v_i)_0\vartheta_{01}(v_1,\ v_2)\vartheta_{03}(v_1,\ v_2). \\
\vartheta_5\vartheta_{14}\vartheta_5^2(v_1,\ v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{14}(v_1,\ v_2)}{\vartheta_5(v_1,\ v_2)}}{\partial v_i} &= \vartheta_4\vartheta'_1(v_i)_0\vartheta_1(v_1,\ v_2)\vartheta_4(v_1,\ v_2) \\
&\quad - \vartheta_{34}\vartheta'_{13}(v_i)_0\vartheta_{13}(v_1,\ v_2)\vartheta_{34}(v_1,\ v_2). \\
\vartheta_5\vartheta_{23}\vartheta_5^2(v_1,\ v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{23}(v_1,\ v_2)}{\vartheta_5(v_1,\ v_2)}}{\partial v_i} &= -\vartheta_2\vartheta'_3(v_i)_0\vartheta_3(v_1,\ v_2)\vartheta_2(v_1,\ v_2) \\
&\quad - \vartheta_{12}\vartheta'_{13}(v_i)_0\vartheta_{13}(v_1,\ v_2)\vartheta_{12}(v_1,\ v_2). \\
\vartheta_4\vartheta_2\vartheta_5^2(v_1,\ v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{24}(v_1,\ v_2)}{\vartheta_5(v_1,\ v_2)}}{\partial v_i} &= \vartheta_5\vartheta'_{24}(v_i)_0\vartheta_2(v_1,\ v_2)\vartheta_4(v_1,\ v_2) \\
&\quad - \vartheta_0\vartheta'_{13}(v_i)_0\vartheta_{02}(v_1,\ v_2)\vartheta_{04}(v_1,\ v_2). \\
\vartheta_5\vartheta_{34}\vartheta_5^2(v_1,\ v_2)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{34}(v_1,\ v_2)}{\vartheta_5(v_1,\ v_2)}}{\partial v_i} &= \vartheta_4\vartheta'_3(v_i)_0\vartheta_3(v_1,\ v_2)\vartheta_4(v_1,\ v_2) \\
&\quad + \vartheta_{14}\vartheta'_{13}(v_i)_0\vartheta_{13}(v_1,\ v_2)\vartheta_{14}(v_1,\ v_2).
\end{aligned}
$$

Les douze constantes $\vartheta'_\alpha(v_i)_0$ que l'on rencontre dans ces formules, ne sont pas toutes indépendantes l'une de l'autre, mais on a les relations:

(2)

$$\vartheta'_3(v_1)_0 = K_{21}\frac{\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_{23}\,.\,\vartheta_{2}\,.\,\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_{0}\,.\,\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2\,.\,\vartheta_4^2\,.\,\vartheta_5^2}.$$

$$\vartheta'_3(v_2)_0 = K_{22}\frac{\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_{23}\,.\,\vartheta_{2}\,.\,\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_{0}\,.\,\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2\,.\,\vartheta_4^2\,.\,\vartheta_5^2}.$$

$$\vartheta'_{24}(v_1)_0 = -K_{11}\frac{\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_{0}\,.\,\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5}.$$

$$\vartheta'_{24}(v_2)_0 = -K_{12}\frac{\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_{0}\,.\,\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5}.$$

$$\vartheta'_{04}(v_1)_0 = (K_{11}+K_{21})\frac{\vartheta_{14}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_{2}\,.\,\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5}.$$

$$\vartheta'_{04}(v_2)_0 = (K_{22}+K_{12})\frac{\vartheta_{14}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_{2}\,.\,\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5}.$$

$$\vartheta'_1(v_1)_0 = (K_{11}+k^2K_{21})\frac{\vartheta_{5}\,.\,\vartheta_{4}\,.\,\vartheta_{2}\,.\,\vartheta_{0}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5}.$$

$$\vartheta'_1(v_2)_0 = (k^2K_{22}+K_{12})\frac{\vartheta_{5}\,.\,\vartheta_{4}\,.\,\vartheta_{2}\,.\,\vartheta_{0}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5}.$$

$$\vartheta'_{02}(v_1)_0 = (K_{11}+\lambda^2K_{21})\frac{\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_{4}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5}.$$

$$\vartheta'_{02}(v_2)_0 = (\lambda^2K_{22}+K_{12})\frac{\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_{4}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5}.$$

$$\vartheta'_{13}(v_1)_0 = (K_{11}+\mu^2K_{21})\frac{\vartheta_{23}\,.\,\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_{5}\,.\,\vartheta_{34}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5}.$$

$$\vartheta'_{13}(v_2)_0 = (\mu^2K_{22}+K_{12})\frac{\vartheta_{23}\,.\,\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_{5}\,.\,\vartheta_{34}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5}.$$

Dans ces formules on a posé:

$$k^2 = \frac{\vartheta_{23}^2\,.\,\vartheta_{01}^2}{\vartheta_4^2\,.\,\vartheta_5^2}, \qquad \lambda^2 = \frac{\vartheta_{[illegible]}^2\,.\,\vartheta_{[illegible]}^2}{\vartheta_{34}^2\,.\,\vartheta_4^2}, \qquad \mu^2 = \frac{\vartheta_2^2\,.\,\vartheta_{01}^2}{\vartheta_5^2\,.\,\vartheta_{34}^2};$$

puis on a la relation:

$$(K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}) = \pi^2 \frac{\vartheta_{34}^3 . \vartheta_4^3 . \vartheta_5^3}{\vartheta_{01} . \vartheta_{12} . \vartheta_{23} . \vartheta_2 . \vartheta_{03} . \vartheta_0 . \vartheta_{14}} = K.$$

Posons maintenant:

$$u_1 = K_{11}v_1 + K_{12}v_2,$$
$$u_2 = K_{21}v_1 + K_{22}v_2.$$

On tire de là réciproquement:

$$Kv_1 = K_{22}u_1 - K_{12}u_2,$$
$$Kv_2 = - K_{21}u_1 + K_{11}u_2.$$

Posons ensuite:

$$\frac{\vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)} = \mathrm{al}_\alpha (u_1, u_2).$$

On tire de là:

$$K\frac{\partial \,\mathrm{al}_\alpha (u_1, u_2)}{\partial u_1} = K_{22}\frac{\partial \frac{\vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_1} - K_{21}\frac{\partial \frac{\vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_2},$$

$$K\frac{\partial \,\mathrm{al}_\alpha (u_1, u_2)}{\partial u_2} = - K_{12}\frac{\partial \frac{\vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_1} + K_{11}\frac{\partial \frac{\vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_2}.$$

Les deux grandeurs

$$\mathrm{al}_\alpha (u_1, u_2) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \,\mathrm{al}_\alpha (u_1, u_2)}{\partial u_i}$$

peuvent être désignées, pour le cas particulier de $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, par al_α et $\mathrm{al}'_\alpha (u_i)_0$; il résulte alors de là que le système d'équations (1) ne change pas, quand on met al_α, $\mathrm{al}'_\alpha(u_i)_0$, $\mathrm{al}_\alpha(u_1, u_2)$ au lieu de

$$\vartheta_\alpha, \ \vartheta'_\alpha(v_i)_0, \ \vartheta_\alpha(v_1, v_2).$$

Mais alors on a:

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
&\mathrm{al}_3'(u_1)_0 = 0. && \mathrm{al}_3'(u_2)_0 = \frac{\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_{23}\vartheta_2\vartheta_{03}\vartheta_0\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2\,.\,\vartheta_4^2\,.\,\vartheta_5^2}.\\
&\mathrm{al}_{24}'(u_1)_0 = -\frac{\vartheta_{03}\vartheta_{12}\vartheta_0\,.\,\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5^2}. && \mathrm{al}_{24}'(u_2)_0 = 0.\\
&\mathrm{al}_{04}'(u_1)_0 = \frac{\vartheta_{14}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5^2}. && \mathrm{al}_{04}'(u_2)_0 = \frac{\vartheta_{14}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5^2}.\\
&\mathrm{al}_1'(u_1)_0 = \frac{\vartheta_5\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_0}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5^2}. && \mathrm{al}_1'(u_2)_0 = k^2\frac{\vartheta_5\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_0}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5^2}.\\
&\mathrm{al}_{02}'(u_1)_0 = \frac{\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_4}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5^2}. && \mathrm{al}_{02}'(u_2)_0 = \lambda^2\frac{\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_4}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5^2}.\\
&\mathrm{al}_{13}'(u_1)_0 = \frac{\vartheta_{23}\,.\,\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_5\,.\,\vartheta_{34}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5^2}. && \mathrm{al}_{13}'(u_2)_0 = \mu^2\frac{\vartheta_{23}\,.\,\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_5\,.\,\vartheta_{34}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_5^2}.
\end{aligned}
$$

De là on tire ce théorème bien connu que tous les quotients différentiels des fonctions $\mathrm{al}_\alpha(u_1, u_2)$, quand on ajoute les grandeurs al_α, peuvent s'exprimer d'une manière rationnelle par les grandeurs $\mathrm{al}_\alpha(u_1, u_2)$. Nous supposerons, dans la suite du présent travail, que l'on connaît ces expressions.

§ 2.

Nous passons maintenant à la transformation de $n^{\text{ème}}$ degré. Nous sommes donc autorisés à nous borner aux représentants de cette transformation. On peut les introduire de la manière suivante. Nous démontrons d'abord que chaque déterminant de transformation $(a_0 b_1 c_2 d_3)$ est équivalent à un autre où tous les éléments à droite des membres en diagonale sont égaux à zéro.

En effet, si on désigne par k un nombre entier positif et qu'on pose:

$$
\begin{aligned}
a_0^{k-1} &= a_0^k l_k + a_0^{k+1}. & a_0^{k+1} &= a_3^k. & a_0^0 &= a_0. & a_3^0 &= a_3\\
b_0^{k-1} &= b_0^k l_k + b_0^{k+1}. & b_0^{k+1} &= b_3^k. & b_0^0 &= b_0. & b_3^0 &= b_3\\
c_0^{k-1} &= c_0^k l_k + c_0^{k+1}. & c_0^{k+1} &= c_3^k. & c_0^0 &= c_0. & c_3^0 &= c_3\\
d_0^{k-1} &= d_0^k l_k + d_0^{k+1}. & d_0^{k+1} &= d_3^k. & d_0^0 &= d_0. & d_3^0 &= d_3;
\end{aligned}
$$

alors, si on suppose en outre que k est un nombre pair, chaque déterminant de transformation devient égal à:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0^k & a_1 & a_2 & a_0^{k+1} \\ b_0^k & b_1 & b_2 & b_0^{k+1} \\ c_0^k & c_1 & c_2 & c_0^{k+1} \\ d_0^k & d_1 & d_2 & d_0^{k+1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l_k & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} l_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Nous choisissons maintenant les grandeurs l de manière que pour un k pair, on ait:

$$a_0^{k+1} = 0.$$

Cette détermination est toujours possible. En effet, choisissons d'abord les grandeurs l, de telle sorte que les grandeurs a_0^k diminuent quand k augmente, le développement est fini et il y aura un k pour lequel on a:

$$a_0^{k+1} = 0.$$

Si alors k est un nombre pair, le théorème est démontré vrai. Dans le cas contraire posons, au lieu des deux dernières équations:

$$a_0^{k-2} = a_0^{k-1} l_{k-1} + a_0^k$$

$$a_0^{k-1} = a_0^k l_k$$

les trois suivantes:

$$a_0^{k-2} = a_0^{k-1}(l_{k-1} - 1) + a_0^{k-1} + a_0^k$$

$$a_0^{k-1} = a_0^{k-1} + a_0^k - a_0^k$$

$$a_0^{k-1} + a_0^k = -a_0^k(-l_k - 1);$$

ce qui démontre le théorème même pour ce second cas.

Comme d'ailleurs on a:

$$\begin{vmatrix} l & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l' & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l_1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

il s'ensuit que:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0^k & a_1 & a_2 & 0 \\ b_0^k & b_1 & b_2 & b_3^k \\ c_0^k & c_1 & c_2 & c_3^k \\ d_0^k & d_1 & d_2 & d_3^k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & l_k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdots\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l_1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

On obtient ensuite immédiatement:

$$\begin{vmatrix} a_0^k & a_1 & a_2 & 0 \\ b_0^k & b_1 & b_2 & b_3^k \\ c_0^k & c_1 & c_2 & c_3^k \\ d_0^k & d_1 & d_2 & d_3^k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0^k & 0 & a_2 \\ b_1 & b_0^k & b_3^k & b_2 \\ c_1 & c_0^k & c_3^k & c_2 \\ d_1 & d_0^k & d_3^k & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nous pouvons opérer avec le déterminant gauche sur le côté droit comme avec le déterminant primitif. On a alors:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0^k & 0 & a_2 \\ b_1 & b_0^k & b_3^k & b_2 \\ c_1 & c_0^k & c_3^k & c_2 \\ d_1 & d_0^k & d_3^k & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^s & a_0^k & 0 & 0 \\ b_1^s & b_0^k & b_3^k & b_2^s \\ c_1^s & c_0^k & c_3^k & c_2^s \\ d_1^s & d_0^k & d_3^k & d_2^s \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & l'_s \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l'_1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Des considérations tout à fait analogues montrent que, par un développement de fraction continue, de plus le déterminant gauche sur le côté droit peut être ramené à un autre où le premier élément de la première série horizontale est, seul, autre que zéro. On peut de même faire disparaître le troisième élément de la deuxième série horizontale. La vérité de notre assertion se trouve alors immédiatement démontrée à l'aide des équations conditionnelles que l'on a nécessairement entre les éléments d'un déterminant de transformation.

De là on tire, après quelques autres conclusions auxiliaires, le

Théorème. Tout déterminant (a_0, b_1, c_2, d_3) appartenant à une transformation de $n^{\text{ème}}$ degré, est équivalent à un autre déterminant $(\alpha_0, \beta_1, \gamma_2, \delta_3)$ où les éléments à droite de la diagonale sont égaux à zéro, les éléments en diagonale positifs, et chacun des éléments qui restent absolument plus petit que l'élément diagonal correspondant, de telle sorte toutefois que $\beta_0, \gamma_0, \delta_0, \gamma_1$ sont positifs ou nuls. Enfin les éléments satisfont aux équations:

$$\begin{aligned} \gamma_0\delta_3 + \gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1 &= 0 \\ \beta_0\delta_3 + \beta_1\delta_2 &= 0 \\ \alpha_0\delta_3 = \beta_1\gamma_2 &= n. \end{aligned}$$

Deux transformations de l'espèce dont nous venons de parler ne peuvent jamais être équivalentes l'une à l'autre, sans être identiques. DORN démontre un théorème analogue dans le tome 7^e des *Mathematische Annalen.* Sa méthode est différente de celle que nous avons employée ici.

De là suit ce théorème:

Théorème. Si on décompose le degré de transformation n en ses facteurs premiers, sous la forme:

$$n = a_1^{a_1} a_2^{a_2} \ldots a_k^{a_k}$$

et si on fait abstraction des classes où tous les nombres de transformation sont divisibles par un seul et même nombre, le nombre des représentants qui ne sont pas équivalents entre eux devient:

$$\prod_{r=1}^{k} \frac{a_r^{2a_r-3}(1 + a_r^2)(a_r^{a_r+2} + a_r^{a_r-1} - a_r - 1)}{a_r - 1}.$$

Une simple observation suffit pour ramener la démonstration de ce théorème au cas où n est la puissance d'un nombre premier. Pour ce dernier cas il faut faire une démonstration analogue, comme l'a fait DORN dans le travail déjà cité.

Les résultats que nous venons d'obtenir sont exacts pour toutes les valeurs positives entières de n. Si n est un nombre impair, nous poserons, au lieu des éléments à gauche des membres en diagonale, leurs produits par un seul et même multiple de huit.

Les représentants $(\alpha_0, \beta_1, \gamma_2, \delta_3)$ ainsi définis serviront de point de départ pour toutes les considérations qui vont suivre.

De même il résulte pour ces représentants, comme M. HERMITE l'a démontré pour une transformation de nombres premiers, qu'il y a une équation de la forme:

$$(1) \quad \vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = \sum_\varepsilon x_\varepsilon \vartheta_5(v_1, v_2)^{\varepsilon_1} \vartheta_1(v_1, v_2)^{\varepsilon_2} \vartheta_{02}(v_1, v_2)^{\varepsilon_3} \vartheta_{34}(v_1, v_2)^{\varepsilon_4}.$$

On a ici:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = n, \qquad \varepsilon_2 + \varepsilon_4 \equiv \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \equiv 0 \pmod 2, \qquad \varepsilon_4 < 4$$

$$v_1' = \alpha_0 v_1 + \beta_0 v_2, \qquad v_2' = \beta_1 v_2,$$

tandis qu'entre les grandeurs $\tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}', \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ on a les relations déjà connues.

Les grandeurs x_ε sont des constantes inconnues qui seront déterminées dans la suite.

En substituant des demi-périodes on tire de là les expressions correspondantes pour les 15 fonctions théta transformées qui restent, de la manière suivante:

si on substitue $v_1 + \frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{2} n_1 \tau_{11} + \frac{1}{2} n_2 \tau_{12}$ au lieu de v_1

et $v_2 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} n_1 \tau_{12} + \frac{1}{2} n_2 \tau_{22}$ au lieu de v_2

$\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$ prend la valeur $\varepsilon e^{ci\pi} \vartheta_\nu(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$, ou ε est la quantité exponentielle qui s'ajoute à la $n^{\text{ème}}$ puissance de la fonction ϑ primitive,

$$c = -\frac{1}{2}(n_1^\nu m_1^\nu + n_2^\nu m_2^\nu) + \nu_1 m_1^\nu + \nu_2 m_2^\nu,$$

et où on a les relations:

$$\alpha_0 m_1 = 2\mu_1 + m_1^\nu, \qquad \delta_3 n_1 = 2\nu_1 + n_1^\nu,$$

$$\beta_1 m_2 = 2\mu_2 + m_2^\nu, \qquad \gamma_2 n_2 = 2\nu_2 + n_2^\nu.$$

KOENIGSBERGER a donné ce résultat dans le tome 67 du Journal de CRELLE. Nous obtenons ainsi un système d'équations, composé de 16 équations de la forme:

$$(2)\quad \vartheta_a(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = \sum_s x_s i^{\eta_s} \vartheta_{\eta_1}(v_1, v_2)^{\varepsilon_1} \vartheta_{\eta_2}(v_1, v_2)^{\varepsilon_2} \vartheta_{\eta_3}(v_1, v_2)^{\varepsilon_3} \vartheta_{\eta_4}(v_1, v_2)^{\varepsilon_4}.$$

Imaginons ces 16 équations divisées par $\vartheta_5(v_1, v_2)^n$, et mettons, sur le côté gauche, au lieu de $\vartheta_a(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$:

$$\frac{\vartheta_a(v'_1, v'_2, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})}{\vartheta_5(v'_1, v'_2, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})} \vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}').$$

On pourra alors mettre sur le côté droit $\mathrm{al}_a(u_1, u_2)$ au lieu des quotients $\frac{\vartheta_a(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}$. Posons ensuite:

$$\frac{\vartheta_a(v'_1, v'_2, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})}{\vartheta_5(v'_1, v'_2, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})} = \mathrm{al}_a(u_1', u_2', k', \lambda', \mu')$$

$$u_1' = c_{11}v_1' + c_{12}v_2',$$

$$u_2' = c_{21}v_1' + c_{22}v_2'.$$

On obtient alors des relations de la forme:

$$u_1' = M_0 u_1 + M_1 u_2,$$

$$u_2' = M_2 u_1 + M_3 u_3.$$

Pour les valeurs spéciales $u_1' = 0$, $u_2' = 0$ nous désignons les fonctions transformées par Al_a, les quotients différentiels par $\mathrm{Al}_a'(u_i')_0$.

Les 16 équations de notre système peuvent alors toutes être mises sous la forme:

$$(3)\quad \mathrm{al}_a(u_1', u_2', k', \lambda', \mu') \frac{\vartheta_5(v'_1, v'_2, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})}{\vartheta_5(v_1, v_2)^n}$$

$$= \sum_s x_s i^{\eta_s} \mathrm{al}_{\eta_1}(u_1, u_2)^{\varepsilon_1} \mathrm{al}_{\eta_2}(u_1, u_2)^{\varepsilon_2} \mathrm{al}_{\eta_3}(u_1, u_2)^{\varepsilon_3} \mathrm{al}_{\eta_4}(u_1, u_2)^{\varepsilon_4}.$$

De ce système de 16 équations on peut déduire un autre système de 15 équations dont chacune a la forme:

$$(4)\quad \sum_{\varepsilon} x_\varepsilon [\mathrm{al}_a(u_1', u_2', k', \lambda', \mu')\,\mathrm{al}_5(u_1, u_2)^{\varepsilon_1}\mathrm{al}_1(u_1, u_2)^{\varepsilon_2}\mathrm{al}_{02}(u_1, u_2)^{\varepsilon_3}\mathrm{al}_{34}(u_1, u_2)^{\varepsilon_4}$$

$$- i^{\eta_\varepsilon}\mathrm{al}_{\eta_1}(u_1, u_2)^{\varepsilon_1}\mathrm{al}_{\eta_2}(u_1, u_2)^{\varepsilon_2}\mathrm{al}_{\eta_3}(u_1, u_2)^{\varepsilon_3}\mathrm{al}_{\eta_4}(u_1, u_2)^{\varepsilon_4}] = 0.$$

Imaginons, dans ces deux systèmes d'équations, les grandeurs $\mathrm{al}_\eta(u_1, u_2)$ développées d'aprés les puissances de u_1 et u_2. D'après les observations faites dans le paragraphe premier, les coefficients, dans ce développement, sont des fonctions rationelles de ϑ_a. De même imaginons les grandeurs $\mathrm{al}_a(u_1', u_2', k', \lambda', \mu')$ développées d'après les puissances de u_1 et u_2. Les coefficients sont alors des fonctions rationnelles connues des grandeurs O_a et des grandeurs M_0, M_1, M_2, M_3.

Proposons-nous enfin la même opération avec la grandeur:

$$\frac{\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')}{\vartheta_5(v_1, v_2)^n}.$$

Nous considérons, dans ce développement, les coefficients comme inconnus, à l'exception du membre constant.

En effet ils ne sont pas indépendants l'un de l'autre, mais nous faisons abstraction de cette dépendance. Nous les désignerons par la lettre y.

Si maintenant nous posons les coefficients de tous les membres $u_1^k . u_2^l$, jusqu'aux membres de $2r + 1$ ordre inclusiv., égaux entre eux, le système (3) donnera en tout $(r + 1)(16r + 22)$ équations linéaires avec les $(r + 1)^2 - 1 + \frac{n^2 + 1}{2}$ inconnues y et x_ε, et le système de 15 équations donnera $(r + 1)(15r + 21)$ équations linéaires avec les $\frac{n^2 + 1}{2}$ inconnues x_ε.

Nous devrons toujours être en état, en faisant croître r, de représenter les inconnues comme des fonctions rationnelles des grandeurs ϑ_a, O_a et M_0, M_1, M_2, M_3. En même temps on obtient autant de rapports rationnels que l'on veut entre les grandeurs désignées.

De là se tire le

Théorème. Tous les coefficients que l'on rencontre dans la transformation de $n^{\text{ème}}$ degré, sont des fonctions rationnelles des grandeurs

ϑ_a, O_a, M_0, M_1, M_2, M_3. On peut les représenter d'autant de manières que l'on veut. Entre les grandeurs que nous venons d'indiquer il y a par conséquent autant de rapports rationnels que l'on veut.

Cependant on peut encore réduire le problème.

Pour cela nous démontrons que tous les produits des constantes deux à deux peuvent s'exprimer comme des fonctions rationnelles des grandeurs ϑ_a et O_a.

En effet on sait que les carrés de toutes les fonctions théta peuvent s'exprimer linéairement par les carrés de 4 de ces fonctions, entre lesquelles il y a une relation bicarrée. Nous choisissons les fonctions $\vartheta_5(v_1, v_2)$, $\vartheta_{02}(v_1, v_2)$, $\vartheta_1(v_1, v_2)$, $\vartheta_{34}(v_1, v_2)$; on a alors:

$$N\vartheta_{23}^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = O_5^2 O_{23}^2 \vartheta_5^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') - O_5^2 O_{03}^2 \vartheta_{02}^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$$
$$- O_{34}^2 O_{03}^2 \vartheta_1^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') + O_{34}^2 O_{23}^2 \vartheta_{34}^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}').$$

$$N\vartheta_0^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = O_{23}^2 O_{14}^2 \vartheta_5^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') - O_{14}^2 O_{03}^2 \vartheta_{02}^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$$
$$+ O_4^2 O_{23}^2 \vartheta_1^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') - O_4^2 O_{03}^2 \vartheta_{34}^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}'). \tag{5}$$

$$N\vartheta_3^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = O_{34}^2 O_4^2 \vartheta_5^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') - O_5^2 O_{14}^2 \vartheta_{02}^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$$
$$- O_{34}^2 O_{14}^2 \vartheta_1^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') + O_5^2 O_4^2 \vartheta_{34}^2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}').$$

$$N = O_{23}^4 + O_{03}^4.$$

On obtient les neuf autres expressions en substituant des demi-périodes.

Imaginons qu'on divise ces équations par $\vartheta_5(v_1, v_2)^{2n}$ et qu'au lieu de $\dfrac{\vartheta_a(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2}{\vartheta_5(v_1, v_2)^{2n}}$ on introduise leurs valeurs tirées du système primitif d'équations. Nous obtenons alors 12 équations linéaires avec les inconnues $x_\varepsilon \cdot x_{\varepsilon_1}$. Les coefficients, si on ajoute ϑ_a et O_a, sont des fonctions rationnelles de $\mathrm{al}_a(u_1, u_2)$. En développant d'après les puissances de u_1 et u_2 on obtient alors immédiatement le résultat demandé.

Mais si on peut donner aux produits de toutes les constantes, deux à deux, l'expression de fonctions rationnelles des grandeurs ϑ_α et O_α, la même conséquence a lieu aussi pour les grandeurs M_0, M_1, M_2, M_3. En effet, nous n'avons guère qu'à former les deux produits

$$\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') \cdot \vartheta_{02}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$$

et

$$\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') \cdot \vartheta_1(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$$

et à les différencier pour voir se vérifier notre assertion. Et nous arrivons ainsi au

Théorème. On peut exprimer rationnellement par les grandeurs ϑ_α et O_α toutes les constantes que l'on rencontre dans la transformation de $n^{\text{ème}}$ degré, et d'autant de manières que l'on veut. Il y a donc entre les grandeurs ϑ_α et O_α autant de rapports rationnels que l'on veut.

Le nombre de ces relation peut d'abord être augmenté par une transformation linéaire. En outre, à chaque transformation appartient une autre transformation supplémentaire qui jointe à la première conduit à la multiplication. Supposons qu'on s'en serve et qu'on tire les mêmes conclusions que plus haut, on aura entre ϑ_α et O_α de nouvelles relations, qui en général seront différentes de celles qu'on a trouvées plus haut.

§ 3.

Il faut maintenant considérer d'abord plus en détail le cas $r = 0$. On est alors amené pour les cas $n = 3$ et $n = 5$ à la détermination des constantes et à la déduction d'une série de relations théta.

Soit d'abord $n = 3$.

On a alors:

$$(1) \quad \vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = x_1 \vartheta_5(v_1, v_2)^3 + x_2 \vartheta_5(v_1, v_2) \vartheta_1(v_1, v_2)^2 \\ + x_3 \vartheta_5(v_1, v_2) \vartheta_{02}(v_1, v_2)^2 + x_4 \vartheta_5(v_1, v_2) \vartheta_{34}(v_1, v_2)^2 \\ + x_5 \vartheta_1(v_1, v_2) \vartheta_{02}(v_1, v_2) \vartheta_{34}(v_1, v_2).$$

Si, dans cette équation et dans les 15 équations que nous obtenons en substituant des demi-périodes, nous posons $v_1 = v_2 = 0$, nous obtenons les 10 équations:

$$O_5\vartheta_5 = x_1\vartheta_5^4 + x_4\vartheta_5^2\vartheta_{34}^2, \qquad O_{34}\vartheta_{34} = x_1\vartheta_{34}^4 + x_4\vartheta_{34}^2\vartheta_5^2.$$

$$O_{03}\vartheta_{03} = x_1\vartheta_{03}^4 + x_3\vartheta_{03}^2\vartheta_{23}^2, \qquad O_{23}\vartheta_{23} = x_1\vartheta_{23}^4 - x_3\vartheta_{23}^2\vartheta_{03}^2.$$

$$O_4\vartheta_4 = x_1\vartheta_4^4 - x_2\vartheta_4^2\vartheta_{14}^2, \qquad \varepsilon O_{14}\vartheta_{14} = x_1\vartheta_{14}^4 + x_2\vartheta_{14}^2\vartheta_4^2.$$

(2)
$$O_0\vartheta_0 = x_1\vartheta_0^4 + x_2\vartheta_0^2\vartheta_{01}^2 + x_3\vartheta_0^2\vartheta_2^2 + x_4\vartheta_0^2\vartheta_{12}^2 + x_5\vartheta_0\vartheta_{01}\vartheta_2\vartheta_{12}.$$

$$O_{01}\vartheta_{01} = x_1\vartheta_{01}^4 - x_2\vartheta_{01}^2\vartheta_0^2 - x_3\vartheta_{01}^2\vartheta_{12}^2 + x_4\vartheta_{01}^2\vartheta_2^2 - x_5\vartheta_0\vartheta_{01}\vartheta_2\vartheta_{12}.$$

$$O_2\vartheta_2 = x_1\vartheta_2^4 - x_2\vartheta_2^2\vartheta_{12}^2 - x_3\vartheta_2^2\vartheta_0^2 + x_4\vartheta_2^2\vartheta_{01}^2 - x_5\vartheta_0\vartheta_{01}\vartheta_2\vartheta_{12}.$$

$$O_{12}\vartheta_{12} = x_1\vartheta_{12}^4 + x_2\vartheta_{12}^2\vartheta_2^2 + x_3\vartheta_{12}^2\vartheta_{01}^2 + x_4\vartheta_{12}^2\vartheta_0^2 + x_5\vartheta_0\vartheta_{01}\vartheta_2\vartheta_{12}.$$

Ici on a posé:

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{\gamma_2 + \delta_3 - 2}{2}}$$

En se servant de la transformation supplémentaire on obtient, après quelques conséquences auxiliaires:

(3)
$$\begin{aligned}\vartheta_5(nv_1, nv_2) = {} & x_1'\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^3 \\ & + x_2'\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')\vartheta_1(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2 \\ & + x_3'\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')\vartheta_{02}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2 \\ & + x_4'\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')\vartheta_{34}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')^2 \\ & + x_5'\vartheta_1(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')\vartheta_{02}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')\vartheta_{34}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}').\end{aligned}$$

Des opérations très simples montrent que les 10 équations ci-dessus restent invariables quand on pose x_a' au lieu de x_a, O_a au lieu de ϑ_a, et réciproquement.

Des équations on tire:

$$x_1 = \frac{O_{34}\vartheta_{34} - O_5\vartheta_5}{\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4} \tag{4}$$

$$x_2 = \frac{\varepsilon O_{14}\vartheta_4^3 - O_4\vartheta_{14}^3}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14}(\vartheta_4^4 + \vartheta_{14}^4)} \tag{5}$$

$$x_3 = \frac{O_{03}\vartheta_{23}^3 - O_{23}\vartheta_{03}^3}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23}(\vartheta_{23}^4 + \vartheta_{03}^4)} \tag{6}$$

$$x_4 = \frac{O_5\vartheta_{34}^3 - O_{34}\vartheta_5^3}{\vartheta_5\vartheta_{34}(\vartheta_{34}^4 - \vartheta_5^4)}. \tag{7}$$

x_5 est déterminé par une des quatre dernières équations (2), par exemple par la 7ᵉ. On en tire immédiatement les valeurs de x'_a.

On obtient en même temps les relations trouvées par Koenigsberger

$$\begin{aligned} O_{03}\vartheta_{03} + O_{23}\vartheta_{23} + O_{34}\vartheta_{34} &= O_5\vartheta_5 \\ O_{01}\vartheta_{01} + O_{12}\vartheta_{12} + \varepsilon O_{14}\vartheta_{14} &= O_5\vartheta_5 \\ O_4\vartheta_4 + \varepsilon O_{14}\vartheta_{14} + O_{34}\vartheta_{34} &= O_5\vartheta_5, \end{aligned} \tag{8}$$

puis les relations:

$$\begin{aligned} O_0\vartheta_0 + O_{01}\vartheta_{01} &= x_1(\vartheta_0^4 + \vartheta_{01}^4) - x_3\vartheta_{03}^2\vartheta_{23}^2 + x_4\vartheta_5^2\vartheta_{34}^2 \\ &= x'_1(O_0^4 + O_{01}^4) - x'_3 O_{03}^2 O_{23}^2 + x'_4 O_5^2 O_{34}^2 \\ O_0\vartheta_0 + O_2\vartheta_2 &= x_1(\vartheta_0^4 + \vartheta_2^4) + x_2\vartheta_4^2\vartheta_{14}^2 + x_4\vartheta_5^2\vartheta_{34}^2 \\ &= x'_1(O_0^4 + O_2^4) + x'_2 O_4^2 O_{14}^2 + x'_4 O_5^2 O_{34}^2 \\ O_0\vartheta_0 - O_{12}\vartheta_{12} &= x_1(\vartheta_0^4 - \vartheta_{12}^4) + x_2\vartheta_4^2\vartheta_{14}^2 - x_3\vartheta_{03}^2\vartheta_{23}^2 \\ &= x'_1(O_0^4 - O_{12}^4) + x'_2 O_4^2 O_{14}^2 - x'_3 O_{03}^2 O_{23}^2. \end{aligned} \tag{9}$$

En différenciant on obtient ensuite les équations:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_1 \frac{O_5}{\vartheta_5} \mathrm{Al}_3'(u_2')_0 M_{i+1} &&= (-x_3\vartheta_{14}^2 + x_4\vartheta_4^2)\,\mathrm{al}_3'(u_i)_0 \\
& &&\qquad + x_5\vartheta_4\vartheta_{14}\,\mathrm{al}_{13}'(u_i)_0. \\
&\varepsilon_2 \frac{O_5}{\vartheta_5} [\mathrm{Al}_{13}'(u_1')_0 M_{i-1} + \mathrm{Al}_{13}'(u_2')_0 M_{i+1}] &&= (x_3\vartheta_4^2 + x_4\vartheta_{14}^2)\,\mathrm{al}_{13}'(u_i)_0 \\
& &&\qquad - x_5\vartheta_4\vartheta_{14}\,\mathrm{al}_3'(u_i)_0. \\
&\varepsilon_1 \frac{O_5}{\vartheta_5} \mathrm{Al}_{24}'(u_1')_0 M_{i-1} &&= (-x_2\vartheta_{03}^2 + x_4\vartheta_{23}^2)\,\mathrm{al}_{24}'(u_i)_0 \\
& &&\qquad - x_5\vartheta_{23}\vartheta_{03}\,\mathrm{al}_{04}'(u_i)_0. \\
&\varepsilon_1 \frac{O_5}{\vartheta_5} [\mathrm{Al}_{04}'(u_1')_0 M_{i-1} + \mathrm{Al}_{04}'(u_2')_0 M_{i+1}] &&= (x_2\vartheta_{23}^2 + x_4\vartheta_{03}^2)\,\mathrm{al}_{04}'(u_i)_0 \\
& &&\qquad + x_5\vartheta_{23}\vartheta_{03}\,\mathrm{al}_{24}'(u_i)_0. \\
&\varepsilon_2 \frac{O_5}{\vartheta_5} [\mathrm{Al}_{02}'(u_1')_0 M_{i-1} + \mathrm{Al}_{02}'(u_2')_0 M_{i+1}] &&= (x_2\vartheta_{34}^2 + x_3\vartheta_5^2)\,\mathrm{al}_{02}'(u_i)_0 \\
& &&\qquad + x_5\vartheta_5\vartheta_{34}\,\mathrm{al}_1'(u_i)_0. \\
&\varepsilon_2 \frac{O_5}{\vartheta_5} [\mathrm{Al}_1'(u_1')_0 M_{i-1} + \mathrm{Al}_1'(u_2')_0 M_{i+1}] &&= (x_2\vartheta_5^2 + x_3\vartheta_{34}^2)\,\mathrm{al}_1'(u_i)_0 \\
& &&\qquad + x_5\vartheta_5\vartheta_{34}\,\mathrm{al}_{02}'(u_i)_0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Dans ces douze équations on a posé:

$$\varepsilon_1 = (-1)^{\frac{\gamma_2 - 1}{2}}, \qquad \varepsilon_2 = (-1)^{\frac{\delta_3 - 1}{2}}.$$

On en tire immédiatement les valeurs pour M_0, M_1, M_2, M_3:

$$\varepsilon_1 M_0 = \vartheta_{03}\vartheta_{14} \frac{O_{34}O_4O_5}{\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_5} \frac{(-x_2\vartheta_{03}^2 + x_4\vartheta_{23}^2)\vartheta_{12}\vartheta_0 + x_5\vartheta_{23}^2\vartheta_{01}\vartheta_2}{O_{03}O_{12}O_0O_{14}}. \tag{11}$$

$$\varepsilon_1 M_1 = \vartheta_{03}\vartheta_{23} \frac{O_{34}O_4O_5}{\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_5} x_5 \frac{\vartheta_{14}\vartheta_{p1}\vartheta_2\vartheta_{23}}{O_{03}O_{12}O_0O_{14}}. \tag{12}$$

$$\varepsilon_1 M_2 = \vartheta_4\vartheta_{14} \frac{O_{34}^2 O_4^2 O_5^2}{\vartheta_{34}^2\vartheta_4^2\vartheta_5^2} x_5 \frac{\vartheta_{23}\vartheta_{03}\vartheta_4\vartheta_5^2\vartheta_{34}^2}{O_{01}O_{12}O_{23}O_2O_{03}O_0O_{14}}. \tag{13}$$

$$\varepsilon_1 M_3 = \vartheta_{03}\vartheta_{14} \frac{\vartheta_{23}O_{34}^2O_4^2O_5^2}{O_{23}\vartheta_{34}^2\vartheta_4^2\vartheta_5^2} \cdot \frac{(-x_3\vartheta_{14}^2 + x_4\vartheta_4^2)\vartheta_{01}\vartheta_{12}\vartheta_2\vartheta_0 + x_5\mu^2\vartheta_{34}^2\vartheta_4^2\vartheta_5^2}{O_{01}O_{12}O_2O_{03}O_0O_{14}}. \tag{14}$$

On a en même temps, d'après le travail que l'auteur a publié dans le 20ᵉ volume des *Mathematische Annalen* sur les équations de multiplicateurs:

$$M_0 M_3 - M_1 M_2 = M = \alpha_0 \beta_1 \frac{O_{34}^3 \cdot O_4^3 \cdot O_5^3}{\vartheta_{34}^3 \cdot \vartheta_4^3 \cdot \vartheta_5^3} \cdot \frac{\vartheta_{01}\vartheta_{12}\vartheta_{23}\vartheta_2\vartheta_{03}\vartheta_0\vartheta_{14}}{O_{01}O_{12}O_{23}O_2O_{03}O_0O_{14}}. \tag{15}$$

Après cela il reste encore 8 relations entre les grandeurs ϑ_a et O_a. Les résultats apparaîtront plus nettement si nous introduisons les relations suivantes:

$$[\mathrm{Al}'_a(u'_1)_0 M_0 + \mathrm{Al}'_a(u'_2)_0 M_2]\,\mathrm{al}'_a(u_2)_0 - [\mathrm{Al}'_a(u'_1)_0 M_1 + \mathrm{Al}'_a(u'_2)_0 M_3]\,\mathrm{al}'_a(u_1)_0 = d_a.$$

$$[\mathrm{Al}'_a(u'_1)_0 M_0 + \mathrm{Al}'_a(u'_2) M_2]\,\mathrm{al}'_\beta(u_2)_0 - [\mathrm{Al}'_a(u'_1) M_1 + \mathrm{Al}'_a(u'_2)_0 M_3]\,\mathrm{al}'_\beta(u_1)_0 = d_a^\beta.$$

Les 12 équations ci-dessus prennent alors la forme:

$$x_5 \lambda_k^2 \frac{\vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{O_5 \cdot \vartheta_5} = \varepsilon_1 d_3 = \varepsilon_2 d_{13} = -\varepsilon_1 d_{24} = -\varepsilon_1 d_{04} = -\varepsilon_2 d_{02} = \varepsilon_2 d_1. \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 d_3^{13} &= (x_3 \vartheta_{14}^2 - x_4 \vartheta_4^2) \frac{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_5 \cdot O_5}. \\
\varepsilon_2 d_{13}^3 &= (x_3 \vartheta_4^2 + x_4 \vartheta_{14}^2) \frac{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_5 \cdot O_5}. \\
\varepsilon_1 d_{24}^{04} &= (x_2 \vartheta_{03}^2 - x_4 \vartheta_{23}^2) \frac{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_5 \cdot O_5}. \\
\varepsilon_1 d_{04}^{24} &= -(x_2 \vartheta_{23}^2 + x_4 \vartheta_{03}^2) \frac{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_5 \cdot O_5}. \\
\varepsilon_2 d_{02}^{1} &= (x_2 \vartheta_{34}^2 + x_3 \vartheta_5^2) \frac{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_5 \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_5 \cdot O_5}. \\
\varepsilon_2 d_1^{02} &= -(x_2 \vartheta_5^2 + x_3 \vartheta_{34}^2) \frac{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_5 \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_5 \cdot O_5}.
\end{aligned} \tag{17}$$

En employant la transformation supplémentaire on obtient un nouveau système de formules. On peut le tirer de celui qui précède, en posant x'_a au lieu de x_a, O_a au lieu de ϑ_a, et réciproquement,

$$\frac{+3M_3}{M}, \quad \frac{-3M_2}{M}, \quad \frac{-3M_1}{M}, \quad \frac{3M_0}{M}$$

respect. au lieu de M_0, M_1, M_2, M_3, et enfin ε_2, ε_1 respect. au lieu de ε_1, ε_2. En comparant on obtient alors les relations suivantes:

$$(18)\quad \begin{aligned}
3(-x_3\vartheta_{14}^2 + x_4\vartheta_4^2) &= N(x_3' O_4^2 + x_4' O_{14}^2)\frac{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14}}{O_4 \cdot \varepsilon O_{14}} \cdot \\
3(x_3\vartheta_4^2 + x_4\vartheta_{14}^2) &= N(-x_3' O_{14}^2 + x_4' O_4^2)\frac{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14}}{O_4 \cdot \varepsilon O_{14}} \cdot \\
3(x_2\vartheta_{23}^2 + x_4\vartheta_{03}^2) &= N(x_2' O_{03}^2 - x_4' O_{23}^2)\frac{\vartheta_{23} \cdot \vartheta_{03}}{O_{23} \cdot O_{03}} \cdot \\
3(x_2\vartheta_{03}^2 - x_4\vartheta_{23}^2) &= N(x_2' O_{23}^2 + x_4' O_{03}^2)\frac{\vartheta_{23} \cdot \vartheta_{03}}{O_{23} \cdot O_{03}} \cdot \\
3(x_2\vartheta_5^2 + x_3\vartheta_{34}^2) &= N(x_2' O_{34}^2 + x_3' O_5^2)\frac{\vartheta_5 \cdot \vartheta_{34}}{O_5 \cdot O_{34}} \cdot \\
3(x_2\vartheta_{34}^2 + x_3\vartheta_5^2) &= N(x_2' O_5^2 + x_3' O_{34}^2)\frac{\vartheta_5 \cdot \vartheta_{34}}{O_5 \cdot O_{34}} \cdot
\end{aligned}$$

On a posé ici:

$$N = \alpha_0\beta_1 \frac{O_{34} \cdot O_5 \cdot O_{03} \cdot O_{23} \cdot O_4 \cdot O_{14}}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_5 \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_{14}} \cdot$$

On a ainsi un grand nombre de relations. On peut facilement en développer une partie, mais non pas toutes, avec les formules de KOENIGSBERGER. Cela vient de ce que les équations proposées par KOENIGSBERGER sont valables pour les fonctions hyperelliptiques, tandis que quelques-unes de celles que nous avons données plus haut sont valables pour les fonctions théta. En employant la transformation linéaire on peut déduire une autre série de formules; toutefois nous n'en tenons pas compte.

Nous prenons maintenant le cas $n = 5$. Pour ce qui concerne ce cas on peut se reporter à deux travaux de l'auteur, qui se trouvent dans le 16^e^ et dans le 20^e^ volume des *Mathematische Annalen.*

Nous posons:

$$\vartheta_5(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = \tag{19}$$

$$x_1\vartheta_5(v_1, v_2)^3\vartheta_1(v_1, v_2)^2 + x_2\vartheta_5(v_1, v_2)^3\vartheta_{02}(v_1, v_2)^2$$

$$+ x_3\vartheta_5(v_1, v_2)^3\vartheta_{34}(v_1, v_2)^2 + x_4\vartheta_5(v_1, v_2)^2\vartheta_1(v_1, v_2)\vartheta_{02}(v_1, v_2)\vartheta_{34}(v_1, v_2)$$

$$+ x_5\vartheta_5(v_1, v_2)\vartheta_1(v_1, v_2)^4 + x_6\vartheta_5(v_1, v_2)\vartheta_{02}(v_1, v_2)^4 + x_7\vartheta_5(v_1, v_2)\vartheta_{34}(v_1, v_2)^4$$

$$+ x_8\vartheta_5(v_1, v_2)\vartheta_{02}(v_1, v_2)^2\vartheta_{34}(v_1, v_2)^2 + x_9\vartheta_5(v_1, v_2)\vartheta_{34}(v_1, v_2)^2\vartheta_1(v_1, v_2)^2$$

$$+ x_{10}\vartheta_5(v_1, v_2)\vartheta_1(v_1, v_2)^2\vartheta_{02}(v_1, v_2)^2 + x_{11}\vartheta_1(v_1, v_2)^3\vartheta_{02}(v_1, v_2)\vartheta_{34}(v_1, v_2)$$

$$+ x_{12}\vartheta_1(v_1, v_2)\vartheta_{02}(v_1, v_2)^3\vartheta_{34}(v_1, v_2) + x_{13}\vartheta_1(v_1\ v_2)\vartheta_{02}(v_1, v_2)\vartheta_{34}(v_1, v_2)^3.$$

En substituant des demi-périodes, on a, après quelques réductions faciles, les 10 équations:

$$x_1 = \frac{O_{14}\vartheta_{14}^3 - O_4\vartheta_4^3}{\vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{14}^2(\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}. \qquad x_5 = \frac{O_{14}\vartheta_4 + O_4\vartheta_{14}}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14}(\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}.$$

$$x_2 = \frac{O_{03}\vartheta_{03}^3 - O_{23}\vartheta_{23}^3}{\vartheta_{23}^2 \cdot \vartheta_{03}^2(\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}. \qquad x_6 = \frac{O_{03}\vartheta_{23} + O_{23}\vartheta_{03}}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23}(\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}.$$

$$x_3 = \frac{O_5\vartheta_5^3 - O_{34}\vartheta_{34}^3}{\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_5^2(\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}. \qquad x_7 = \frac{O_{34}\vartheta_5 - O_5\vartheta_{34}}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_5(\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}.$$

$$\frac{O_2}{\vartheta_2} - \frac{O_{01}}{\vartheta_{01}} + \frac{O_0}{\vartheta_0} - \frac{O_{12}}{\vartheta_{12}} = 2x_1\vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{14}^2 + (x_5 - x_6 - x_7)(\vartheta_4^4 - \vartheta_{14}^4) + 2x_8\vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{14}^2$$

$$+ x_{11}\frac{\vartheta_5^2 \cdot \vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{23}^2}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12}} + x_{12}\frac{\vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{14}^2(\vartheta_0^2\vartheta_{12}^2 - \vartheta_2^2 \cdot \vartheta_{01}^2)}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12}} - x_{13}\frac{\vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{14}^2(\vartheta_{01}^2\vartheta_{12}^2 + \vartheta_2^2\vartheta_0^2)}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12}}. \tag{20}$$

$$\frac{O_2}{\vartheta_2} - \frac{O_{01}}{\vartheta_{01}} - \frac{O_0}{\vartheta_0} + \frac{O_{12}}{\vartheta_{12}} = 2x_2\vartheta_{03}^2\vartheta_{23}^2 + (x_5 - x_6 - x_7)(\vartheta_{03}^4 - \vartheta_{23}^4) - 2x_9\vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{23}^2$$

$$+ x_{11}\frac{\vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{23}^2(\vartheta_0^2\vartheta_{12}^2 - \vartheta_{01}^2\vartheta_2^2)}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12}} + x_{12}\frac{\vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{14}^2 \cdot \vartheta_5^2 \cdot \vartheta_{34}^2}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12}} - x_{13}\frac{\vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{23}^2(\vartheta_2^2\vartheta_{12}^2 + \vartheta_0^2 \cdot \vartheta_{01}^2)}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12}}.$$

$$\frac{O_2}{\vartheta_2} + \frac{O_{01}}{\vartheta_{01}} + \frac{O_0}{\vartheta_0} + \frac{O_{12}}{\vartheta_{12}} = 2x_3\vartheta_5^2\vartheta_{34}^2 + (x_5 + x_6 + x_7)(\vartheta_5^4 + \vartheta_{34}^4) + 2x_{10}\vartheta_5^2\vartheta_{34}^2$$

$$+ x_{11}\frac{\vartheta_5^2 \cdot \vartheta_{34}^2(\vartheta_0^2\vartheta_2^2 + \vartheta_{01}^2\vartheta_{12}^2)}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12}} + x_{12}\frac{\vartheta_5^2 \cdot \vartheta_{34}^2(\vartheta_2^2\vartheta_{12}^2 + \vartheta_0^2\vartheta_{01}^2)}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12}} - x_{13}\frac{\vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{23}^2 \cdot \vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{14}^2}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12}}.$$

$$O_2 = -x_1\vartheta_2^3\vartheta_{12}^2 - x_2\vartheta_2^3\vartheta_0^2 + x_3\vartheta_2^3\vartheta_{01}^2 - x_4\vartheta_2^2\vartheta_{01}\vartheta_{12}\vartheta_0 + x_5\vartheta_2\vartheta_{12}^4 + x_6\vartheta_2\vartheta_0^4$$
$$+ x_7\vartheta_2\vartheta_{01}^4 - x_8\vartheta_2\vartheta_0^2\vartheta_{01}^2 - x_9\vartheta_2\vartheta_{12}^2\vartheta_{01}^2 + x_{10}\vartheta_2\vartheta_0^2\vartheta_{12}^2 + x_{11}\vartheta_{12}^3\vartheta_0\vartheta_{01}$$
$$+ x_{12}\vartheta_{12}\vartheta_0^3\vartheta_{01} - x_{13}\vartheta_{12}\vartheta_0\vartheta_{01}^3.$$

Ces équations font connaître les constantes $x_1, \ldots, x_{10}$, quand les trois constantes x_{11}, x_{12}, x_{13} sont données.

En employant la transformation supplémentaire on trouve des expressions analogues pour les grandeurs x'_a.

En différenciant on trouve d'abord, pour les constantes x_{11}, x_{12}, x_{13}, les expressions:

$$(21)\qquad \begin{aligned}
x_{11} &= \frac{O_5 \cdot \vartheta_5(d_1\vartheta_5^2 + d_{02}\vartheta_{34}^2)}{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0(\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)} \\
x_{12} &= \frac{O_5 \cdot \vartheta_5(d_{13}\vartheta_4^2 - d_3\vartheta_{14}^2)}{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0(\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)} \cdot \\
x_{13} &= \frac{O_5 \cdot \vartheta_5(d_{24}\vartheta_{23}^2 + d_{04}\vartheta_{03}^2)}{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0(\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}.
\end{aligned}$$

En même temps on obtient les neuf relations:

$$(22)\qquad \begin{aligned}
d_1\vartheta_5^2 + d_{02}\vartheta_{34}^2 &= d_{24}\vartheta_{03}^2 - d_{04}\vartheta_{23}^2 \\
d_3\vartheta_{14}^2 - d_{13}\vartheta_4^2 &= d_1\vartheta_{34}^2 + d_{02}\vartheta_5^2 \\
-d_{24}\vartheta_{23}^2 - d_{04}\vartheta_{03}^2 &= d_{13}\vartheta_{14}^2 + d_3\vartheta_4^2.
\end{aligned}$$

$$(23)\qquad \begin{aligned}
d_3^{13} &= -(x_6\vartheta_{14}^4 + x_7\vartheta_4^4 - x_8\vartheta_{14}^2\vartheta_4^2)\frac{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14} \cdot O_5 \cdot \vartheta_5} \cdot \\
d_{13}^3 &= (x_6\vartheta_4^4 + x_7\vartheta_{14}^4 + x_8\vartheta_{14}^2\vartheta_4^2)\frac{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14} \cdot O_5 \cdot \vartheta_5} \cdot \\
d_{24}^{04} &= -(x_5\vartheta_{03}^4 + x_7\vartheta_{23}^4 - x_9\vartheta_{23}^2\vartheta_{03}^2)\frac{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_{23} \cdot \vartheta_{03} \cdot O_5 \cdot \vartheta_5} \cdot \\
d_{04}^{24} &= (x_5\vartheta_{23}^4 + x_7\vartheta_{03}^4 + x_9\vartheta_{23}^2\vartheta_{03}^2)\frac{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_{23} \cdot \vartheta_{03} \cdot O_5 \cdot \vartheta_5} \cdot \\
d_{02}^1 &= (x_5\vartheta_{34}^4 + x_6\vartheta_5^4 + x_{10}\vartheta_5^2\vartheta_{34}^2)\frac{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_5 \cdot \vartheta_{34}\, O_5 \cdot \vartheta_5} \cdot \\
d_1^{02} &= -(x_5\vartheta_5^4 + x_6\vartheta_{34}^4 + x_{10}\vartheta_5^2\vartheta_{34}^2)\frac{\lambda_k^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_5 \cdot \vartheta_{34}\, O_5 \cdot \vartheta_5} \cdot
\end{aligned}$$

En employant la transformation supplémentaire on obtient d'abord trois expressions analogues pour les grandeurs x'_{11}, x'_{12}, x'_{13}, puis les trois relations:

$$(24)\qquad \begin{aligned} d_1 O_5^2 + d_{02} O_{34}^2 &= d_{24} O_{03}^2 - d_{04} O_{23}^2. \\ d_3 O_{14}^2 - d_{13} O_4^2 &= d_1 O_{34}^2 + d_{02} O_5^2. \\ -d_{24} O_{23}^2 - d_{04} O_{03}^2 &= d_{13} O_{14}^2 + d_3 O_4^2 \end{aligned}$$

et enfin six expressions pour les grandeurs d_α^β. En les comparant avec celles qu'on a trouvées plus haut on obtient les 6 relations:

$$(25)\qquad \begin{aligned} 5(x_6 \vartheta_{14}^4 + x_7 \vartheta_4^4 - x_8 \vartheta_{14}^2 \vartheta_4^2) &= N(x'_6 O_4^4 + x'_7 O_{14}^4 + x'_8 O_{14}^2 O_4^2) \frac{\vartheta_4 . \vartheta_{14}}{O_4 . O_{14}} . \\ 5(x_6 \vartheta_4^4 + x_7 \vartheta_{14}^4 + x_8 \vartheta_{14}^2 \vartheta_4^2) &= N(x'_6 O_{14}^4 + x'_7 O_4^4 - x'_8 O_{14}^2 O_4^2) \frac{\vartheta_4 . \vartheta_{14}}{O_4 . O_{14}} . \\ 5(x_5 \vartheta_{03}^4 + x_7 \vartheta_{23}^4 - x_9 \vartheta_{23}^2 \vartheta_{03}^2) &= N(x'_5 O_{23}^4 + x'_7 O_{03}^4 + x'_9 O_{23}^2 O_{03}^2) \frac{\vartheta_{23} . \vartheta_{03}}{O_{23} . O_{03}} . \\ 5(x_5 \vartheta_{23}^4 + x_7 \vartheta_{03}^4 + x_9 \vartheta_{23}^2 \vartheta_{03}^2) &= N(x'_5 O_{03}^4 + x'_7 O_{23}^4 - x'_9 O_{23}^2 O_{03}^2) \frac{\vartheta_{23} . \vartheta_{03}}{O_{23} . O_{03}} . \\ 5(x_5 \vartheta_{34}^4 + x_6 \vartheta_5^4 + x_{10} \vartheta_5^2 \vartheta_{34}^2) &= N(x'_5 O_5^4 + x'_6 O_{34}^4 + x'_{10} O_5^2 O_{34}^2) \frac{\vartheta_5 . \vartheta_{34}}{O_5 . O_{34}} . \\ 5(x_5 \vartheta_5^4 + x_6 \vartheta_{34}^4 + x_{10} \vartheta_5^2 \vartheta_{34}^2) &= N(x'_5 O_{34}^4 + x'_6 O_5^4 + x'_{10} O_5^2 O_{34}^2) \frac{\vartheta_5 . \vartheta_{34}}{O_5 . O_{34}} . \end{aligned}$$

On tire de là les équations données par l'auteur dans le 20[e] volume des *Mathematische Annalen*:

$$(26)\qquad \begin{aligned} 5\left(\frac{O_{34}}{\vartheta_{34}} - \frac{O_5}{\vartheta_5} + \frac{O_{23}}{\vartheta_{23}} + \frac{O_{03}}{\vartheta_{03}}\right) &= \alpha_0 \beta_1 \left(\frac{\vartheta_{34}}{O_{34}} - \frac{\vartheta_5}{O_5} + \frac{\vartheta_{23}}{O_{23}} + \frac{\vartheta_{03}}{O_{03}}\right) \frac{O_{34} . O_5 . O_{23} . O_{03}}{\vartheta_{34} . \vartheta_5 . \vartheta_{23} . \vartheta_{03}} . \\ 5\left(\frac{O_4}{\vartheta_4} + \frac{O_{14}}{\vartheta_{14}} + \frac{O_{34}}{\vartheta_{34}} - \frac{O_5}{\vartheta_5}\right) &= \alpha_0 \beta_1 \left(\frac{\vartheta_4}{O_4} + \frac{\vartheta_{14}}{O_{14}} + \frac{\vartheta_{34}}{O_{34}} - \frac{\vartheta_5}{O_5}\right) \frac{O_4 . O_{14} . O_{34} . O_5}{\vartheta_4 . \vartheta_{14} . \vartheta_{34} . \vartheta_5} . \\ -5\left(\frac{O_{23}}{\vartheta_{23}} + \frac{O_{03}}{\vartheta_{03}} - \frac{O_4}{\vartheta_4} - \frac{O_{14}}{\vartheta_{14}}\right) &= \alpha_0 \beta_1 \left(\frac{\vartheta_{23}}{O_{23}} + \frac{\vartheta_{03}}{O_{03}} - \frac{\vartheta_4}{O_4} - \frac{\vartheta_{14}}{O_{14}}\right) \frac{O_{23} . O_{03} . O_4 . O_{14}}{\vartheta_{23} . \vartheta_{03} . \vartheta_4 . \vartheta_{14}} . \end{aligned}$$

De cette manière les 13 constantes $x_1, \ldots, x_{13}$ sont exprimées par les grandeurs ϑ_a, O_a, M_0, M_1, M_2, M_3, tandis que nous avons trouvé entre ces grandeurs mêmes une série de relations. Il n'est pas difficile, d'après ces relations, d'exprimer les grandeurs M_0, M_1, M_2, M_3 par les grandeurs ϑ_a et O_a. Mais comme ces expressions ont une forme assez compliquée, nous ne faisons qu'indiquer la marche.

D'après les équations que nous avons trouvées pour les grandeurs d_a, on peut déterminer immédiatement les rapports entre elles et l'on a:

$$
\begin{aligned}
& d_3 : d_{13} : d_{24} : d_{04} : d_{02} : d_1 = \\
& O_4^2\vartheta_{03}^2 + O_{03}^2\vartheta_4^2 - O_5^2\vartheta_{12}^2 - O_{12}^2\vartheta_5^2 + O_0^2\vartheta_{34}^2 + O_{34}^2\vartheta_0^2 \quad : \\
& O_{14}^2\vartheta_{03}^2 + O_{03}^2\vartheta_{14}^2 + O_5^2\vartheta_2^2 + O_2^2\vartheta_5^2 - O_{01}^2\vartheta_{34}^2 - O_{34}^2\vartheta_{01}^2 \quad : \\
(27) \qquad & - O_{03}^2\vartheta_{23}^2 - O_{23}^2\vartheta_{03}^2 - O_0^2\vartheta_2^2 - O_2^2\vartheta_0^2 + O_{01}^2\vartheta_{12}^2 + O_{12}^2\vartheta_{01}^2 \quad : \\
& - O_{03}^2\vartheta_{03}^2 + O_{23}^2\vartheta_{23}^2 - O_{14}^2\vartheta_{14}^2 - O_4^2\vartheta_4^2 - O_0^2\vartheta_0^2 + O_2^2\vartheta_2^2 - O_{01}^2\vartheta_{01}^2 + O_{12}^2\vartheta_{12}^2 + O_5^2\vartheta_5^2 - O_{34}^2\vartheta_{34}^2 : \\
& O_{23}^2\vartheta_{34}^2 + O_{34}^2\vartheta_{23}^2 - O_{14}^2\vartheta_{12}^2 - O_{12}^2\vartheta_{14}^2 - O_4^2\vartheta_2^2 - O_2^2\vartheta_4^2 \quad : \\
& - O_{23}^2\vartheta_5^2 - O_5^2\vartheta_{23}^2 + O_{14}^2\vartheta_0^2 + O_0^2\vartheta_{14}^2 + O_4^2\vartheta_{01}^2 + O_{01}^2\vartheta_4^2 \quad .
\end{aligned}
$$

Mais alors les rapports entre les quantités M_0, M_1, M_2, M_3 sont aussi déterminés immédiatement puisqu'entre elles et les grandeurs d_a il y a les relations:

$$
(28) \quad
\begin{aligned}
d_3 &= \frac{\vartheta_{01} \cdot O_{01} \cdot \vartheta_{12} \cdot O_{12} \cdot \vartheta_{23} \cdot O_{23} \cdot \vartheta_2 \cdot O_2 \cdot \vartheta_{03} \cdot O_{03} \cdot \vartheta_0 \cdot O_0 \cdot \vartheta_{14} \cdot O_{14}}{\vartheta_{34}^2 \cdot O_{34}^2 \cdot \vartheta_4^2 \cdot O_4^2 \cdot \vartheta_5^2 \cdot O_5^2} M_2. \\
d_{13} &= \frac{\vartheta_{23} \cdot O_{23} \cdot \vartheta_{03} \cdot O_{03}}{\vartheta_4 \cdot O_4} (M_0\mu^2 + M_2\mu^2\mu'^2 - M_1 - M_3\mu'^2). \\
d_{24} &= -\frac{\vartheta_{03} \cdot O_{03} \cdot \vartheta_{12} \cdot O_{12} \cdot \vartheta_0 \cdot O_0 \cdot \vartheta_{14} \cdot O_{14}}{\vartheta_{34} \cdot O_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot O_4 \cdot \vartheta_5 \cdot O_5} M_1. \\
d_{04} &= \frac{\vartheta_{14} \cdot O_{14} \cdot \vartheta_{01} \cdot O_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot O_2 \cdot \vartheta_{23} \cdot O_{23}}{\vartheta_{34} \cdot O_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot O_4 \cdot \vartheta_5 \cdot O_5} (M_0 + M_2 - M_1 - M_3). \\
d_{02} &= \frac{\vartheta_{12} \cdot O_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot O_{01}}{\vartheta_5 \cdot O_5} (M_0\lambda^2 + M_2\lambda^2\lambda'^2 - M_1 - M_3\lambda'^2). \\
d_1 &= \frac{\vartheta_2 \cdot O_2 \cdot \vartheta_0 \cdot O_0}{\vartheta_{34} \cdot O_{34}} (M_0k^2 + M_2k^2k'^2 - M_1 - M_3k'^2).
\end{aligned}
$$

La détermination des quotients des grandeurs M d'après ces équations, n'est pas une seule. Il y aura donc en même temps plusieurs relations entre les grandeurs ϑ_a et O_a.

Mais une fois connus les rapports entre les grandeurs M, on peut facilement déterminer les grandeurs elles mêmes.

Par là sont déterminés, pour la transformation de 5[e] degré, les 13 coefficients et les grandeurs M_0, M_1, M_2, M_3 comme fonctions rationnelles des grandeurs ϑ_a et O_a, tandis qu'en même temps on a trouvé une série de relations entre les grandeurs ϑ_a et O_a elles-mêmes. Par une transformation linéaire on peut encore accroître considérablement le nombre de ces relations; mais nous ne nous en occupons pas.

§ 4.

La théorie des transformations a des rapports étroits avec la théorie des nombres. Je ne veux pas ici exposer en détail tous ces rapports, mais je me contenterai d'en signaler quelques-uns. Il faut montrer d'abord comment, par une méthode purement arithmétique, on peut arriver à des rapports entre les grandeurs ϑ_a et O_a, puis comment on peut réciproquement tirer de ces rapports des conclusions relatives à la théorie des nombres.

Si on pose:

$$(1)\qquad \mu = \frac{2i+1-(2j+1)}{4}, \qquad m = \frac{2i+1+3(2j+1)}{4}$$

on a réciproquement:

$$(2)\qquad 2i+1 = m+3\mu, \qquad 2j+1 = m-\mu$$

et:

$$(3)\qquad \frac{(2i+1)^2+3(2j+1)^2}{4} = m^2+3\mu^2.$$

Si nous y joignons comme condition que $m + \mu$ est un nombre impair, il s'ensuit qu'à chaque système de valeurs m, μ correspond un système de valeurs entières $2i + 1$, $2j + 1$. La réciproque n'a pas lieu. Il faut que:

$$2i + 1 \equiv 2j + 1 \pmod 4$$

pour qu'on ait des valeurs entières μ et m. Si donc nous nous restreignons au cas où $m + \mu \equiv 1 \pmod 2$, où m et μ aussi bien que i et j parcourent tous les nombres entiers, la forme:

$$\frac{(2i + 1)^2 + 3(2j + 1)^2}{4}$$

représentera les mêmes nombres que la forme $m^2 + 3\mu^2$ et chaque nombre représenté deux fois par l'une des formes le sera aussi par l'autre.

Si ensuite nous posons:

$$(4) \qquad \begin{aligned} 2n + 1 &= l + 3\lambda \\ 2\nu + 1 &= l - \lambda, \end{aligned}$$

la même chose sera vraie pour les formes:

$$\frac{(2n + 1)^2 + 3(2\nu + 1)^2}{4} \quad \text{et } l^2 + 3\lambda^2.$$

En même temps on obtient l'équation:

$$(5) \qquad m(2n + 1) + 3\mu(2\nu + 1) = l(2i + 1) + 3\lambda(2j + 1).$$

Par là, en supposant que $m + \mu \equiv l + \lambda \equiv 1 \pmod 2$, les deux séries de puissances deviennent égales l'une à l'autre:

$$\sum_{m,\mu,n,\nu} x^{m^2+3\mu^2} y^{m(2n+1)+3\mu(2\nu+1)} z^{\frac{(2n+1)^2+3(2\nu+1)^2}{4}}$$

et

$$\sum_{i,j,l,\lambda} x^{\frac{(2i+1)^2+3(2j+1)^2}{4}} y^{l(2i+1)+3\lambda(2j+1)} z^{l^2+3\lambda^2}.$$

Mais si l'on pose:

$$x = e^{\pi i \tau_{11}}, \qquad z = e^{\pi i \tau_{22}}, \qquad y = e^{\pi i \tau_{12}},$$

on a pour le représentant:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(6) \qquad \vartheta_4 O_4 - \vartheta_{03} O_{03}$$

$$= 2 \sum_{m,\mu,n,\nu} x^{m^2+3\mu^2} y^{m(2n+1)+3\mu(2\nu+1)} z^{\frac{(2n+1)^2+3(2\nu+1)^2}{4}} \qquad m + \mu \equiv 1 \pmod 2.$$

$$(7) \qquad \vartheta_{01} O_{01} - \vartheta_2 O_2$$

$$= 2 \sum_{i,j,l,\lambda} x^{\frac{(2i+1)^2+3(2j+1)^2}{4}} y^{l(2i+1)+3\lambda(2j+1)} z^{l^2+3\lambda^2} \qquad \lambda + l \equiv 1 \pmod 2.$$

Par là on obtient pour le représentant défini plus haut la relation:

$$(8) \qquad \vartheta_4 O_4 - \vartheta_{03} O_{03} = \vartheta_{01} O_{01} - \vartheta_2 O_2.$$

C'est une des équations données par KOENIGSBERGER.

On a ensuite par une transformation linéaire, d'après les relations données pour la transformation de 5^e degré, l'équation:

$$(9) \quad 5\left(\frac{O_2}{\vartheta_2} - \frac{O_{01}}{\vartheta_{01}} - \frac{O_{03}}{\vartheta_{03}} + \frac{O_4}{\vartheta_4}\right) = \alpha_0 \beta_1 \left(-\frac{O_2}{\vartheta_2} + \frac{O_{01}}{\vartheta_{01}} + \frac{O_{03}}{\vartheta_{03}} - \frac{O_4}{\vartheta_4}\right) \frac{O_2 \cdot O_{01} \cdot O_{03} \cdot O_4}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_4}.$$

Si nous nous bornons au représentant:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

cette équation peut être écrite comme il suit:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{a,b,c,d\\ \alpha,\beta,\gamma,\delta}} (-1)^{b}\left((-1)^{\delta}-(-1)^{\gamma}\right) x^{a^2+b^2+\frac{5(2c+1)^2+(2d+1)^2}{4}}\, y^{a(2\alpha+1)+b(2\beta+1)+5(2c+1)\gamma+(2d+1)\delta}\, z^{\frac{(2\alpha+1)^2+(2\beta+1)^2}{4}+5\gamma^2+\delta^2}\\
-&\sum_{\substack{a,b,c,d\\ \alpha,\beta,\gamma,\delta}} (-1)^{\delta}\left((-1)^{b}-(-1)^{a}\right) x^{5a^2+b^2+\frac{(2c+1)^2+(2d+1)^2}{4}}\, y^{5a(2\alpha+1)+b(2\beta+1)+(2c+1)\gamma+(2d+1)\delta}\, z^{\frac{5(2\alpha+1)^2+(2\beta+1)^2}{4}+\gamma^2+\delta^2}\\
=5&\sum_{\substack{a,b,c,d\\ \alpha,\beta,\gamma,\delta}} (-1)^{\delta}\left((-1)^{b}-(-1)^{a}\right) x^{a^2+5b^2+\frac{5(2c+1)^2+5(2d+1)^2}{4}}\, y^{a(2\alpha+1)+5b(2\beta+1)+5(2c+1)\gamma+5(2d+1)\delta}\, z^{\frac{(2\alpha+1)^2+5(2\beta+1)^2}{4}+5\gamma^2+5\delta^2}\\
-5&\sum_{\substack{a,b,c,d\\ \alpha,\beta,\gamma,\delta}} (-1)^{b}\left((-1)^{\delta}-(-1)^{\gamma}\right) x^{5a^2+5b^2+\frac{(2c+1)^2+5(2d+1)^2}{4}}\, y^{5a(2\alpha+1)+5b(2\beta+1)+(2c+1)\gamma+5(2d+1)\delta}\, z^{\frac{5(2\alpha+1)^2+5(2\beta+1)^2}{4}+\gamma^2+5\delta^2}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

La discussion plus approfondie de cette équation fournit diverses relations entre les formes quadratiques:

$$4u^2+4v^2+w^2+5z^2, \qquad 4u^2+v^2+w^2+20z^2$$

d'une part et:

$$20u^2+20v^2+5w^2+z^2, \qquad 20u^2+5v^2+5w^2+4z^2$$

d'autre part.

On peut établir de telles relations soit en attribuant des valeurs spéciales aux grandeurs x, y, z, ou en égalant les uns aux autres les coefficients des puissances de z à gauche et à droite.

Prenons, par exemple, le coefficient de $z^{\frac{b}{4}}$, nous obtenons l'équation:

$$
\begin{aligned}
&4\sum_{a,b,c,d} (-1)^{b} x^{a^2+b^2+\frac{5(2c+1)^2+(2d+1)^2}{4}}\, y^{a+b+2d+1}\\
&+\sum_{a,b,c,d} \left((-1)^{b}-(-1)^{a}\right) x^{5a^2+b^2+\frac{(2c+1)^2+(2d+1)^2}{4}}\, y^{5a+b}\\
&=-5\sum_{a,b,c,d} \left((-1)^{b}-(-1)^{a}\right) x^{a^2+5b^2+\frac{5(2c+1)^2+5(2d+1)^2}{4}}\, y^{a+5b}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Comme l'expression:

$$4a^2 + 20b^2 + 5(2c + 1)^2 + 5(2d + 1)^2$$

ne peut jamais être congruente à $\pm 2 \pmod 5$, on a l'équation:

$$(12) \qquad 4\sum_{a,b,c,d} (-1)^b x^{a^2+b^2+\frac{5(2c+1)^2+(2d+1)^2}{4}} y^{a+b+2d+1}$$

$$= \sum_{a,b,c,d} ((-1)^a - (-1)^b) x^{5a^2+b^2+\frac{(2c+1)^2+(2d+1)^2}{4}} y^{5a+b},$$

où il faut étendre la sommation à toutes les valeurs de a, b, c, d, pour lesquelles les exposants de x sont congruents à $\pm 2 \pmod 5$. Les résultats relatifs à la théorie des nombres qui découlent immédiatement de ces équations et que nous n'étudierons pas en détail, ne pourraient pas s'obtenir facilement par une méthode purement arithmétique.

Rostock, le 17 Avril 1883.