ABLEITUNG
EINER ALLGEMEINEN THETAFORMEL

VON

F. PRYM
in WÜRZBURG.

Die in der vorhergehenden Arbeit zur Ableitung der RIEMANN'schen Thetaformel angewandte Methode soll jetzt dazu benutzt werden, eine Thetaformel von allgemeinerem Charakter herzustellen. Man gelangt zu derselben, indem man von einem Producte von n Thetareihen ausgeht und zur Transformation der Variablen und der Summationsbuchstaben eine allgemeine mit rationalen Zahlen als Coefficienten versehene orthogonale Substitution verwendet. Die Anwendung einer derartigen Substitution erweist sich als nothwendig, sobald man die Bedingung stellt, dass durch die Transformation Thetareihen entstehen, welche dieselben Modulen besitzen, wie die ursprünglichen. Ein specieller Fall der so entstehenden Formel, welcher dadurch charakterisirt ist, dass die n^2 Coefficienten e der orthogonalen Substitution der Bedingung $e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}$ für jedes μ und ν von 1 bis n genügen, ist von mir schon früher, im zweiten Abschnitte meiner auf Seite 201 citirten Arbeit, mit Hülfe functionentheoretischer Betrachtungen abgeleitet worden, und es musste bei dem dort angewandten Verfahren die Bedingung $e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}$ gestellt werden, um eine directe Bestimmung der Constanten zu ermöglichen. Die nachfolgende Untersuchung zeigt, dass diese Bedingung eine unnöthige Beschränkung war, insofern als die jetzt entstehende, von dieser Bedingung freie Formel (Formel (θ) des Art. 2), sobald man nur allgemein die Grössen $c_{\mu\nu}$ und $c_{\nu\mu}$, die durch

r getheilt die Substitutionscoefficienten $e_{\mu\nu}$ beziehlich $e_{\nu\mu}$ repräsentiren, als identisch betrachtet, ohne Weiteres mit der früheren übereinstimmt. Nachdem so die allgemeinste Formel gewonnen ist, handelt es sich nur noch darum, aus ihr durch passende Verfügung über die Coefficienten e der orthogonalen Substitution solche specielle Formeln zu gewinnen, die von praktischer Bedeutung für die Theorie der allgemeinen Thetafunctionen sind. Untersuchungen dieser Art bilden den Gegenstand der dieser Arbeit unmittelbar folgenden Abhandlung. Die Ausdehnung der hier angewandten Methode auf die Herstellung von Relationen zwischen Thetafunctionen mit verschiedenen Modulen wird einer späteren Arbeit vorbehalten.

1.

Aus der in der vorhergehenden Arbeit zu Grunde gelegten p-fach unendlichen Thetareihe:

$$\vartheta(w_1\,|\ldots|\,w_p) = \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} m_\mu w_\mu}$$

$$a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu},$$

kann unter Benutzung von $2p$ willkürlichen Constanten $g_1, \ldots, g_p$, $h_1, \ldots, h_p$ die allgemeinere Reihe:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_p \end{bmatrix}(w_1\,|\ldots|\,w_p)$$

$$= \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}(m_\mu + g_\mu)(m_{\mu'} + g_{\mu'}) + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(m_\mu + g_\mu)(w_\mu + h_\mu \pi i)}$$

gebildet werden. Die dadurch definirte neue Function $\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_p \end{bmatrix}(w_1\,|\ldots|\,w_p)$ ist dann mit der ursprünglichen verknüpft durch die Gleichung:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}(w_1 \,|\, \dots \,|\, w_p) = \vartheta(w_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu a_{1\mu} + h_1 \pi i \,|\, \dots \,|\, w_p + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu a_{p\mu} + h_p \pi i)$$
$$\times\, e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} g_\mu g_{\mu'} + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu (w_\mu + h_\mu \pi i)}$$

und geht, wenn die Grössen g, h sämmtlich den Werth Null annehmen, in dieselbe über, d. h. es ist:

$$\vartheta\begin{bmatrix} 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix}(w_1 \,|\, \dots \,|\, w_p) = \vartheta(w_1 \,|\, \dots \,|\, w_p).$$

Ähnlich wie die ursprüngliche Function genügt die allgemeinere den Gleichungen:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}(w_1 |\dots| w_\nu + \pi i |\dots| w_p) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}(w_1 |\dots| w_\nu |\dots| w_p) e^{2 g_\nu \pi i},$$
$$(\nu = 1, 2, \dots, p)$$
$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}(w_1 + a_{1\nu} |\dots| w_p + a_{p\nu}) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}(w_1 |\dots| w_p) e^{-2 w_\nu - a_{\nu\nu} - 2 h_\nu \pi i},$$

welche sie zugleich bis auf einen von den Variablen $w_1, \dots, w_p$ freien Factor bestimmen.

Das Symbol $\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}$ wird die Charakteristik der Thetafunction genannt und soll, wenn dadurch kein Missverständniss zu befürchten, abgekürzt durch $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ bezeichnet werden. Dabei ist nicht zu übersehen, dass die hier gewählte und im Folgenden ausschliesslich zur Verwendung kommende Bezeichnungsweise von der in der vorhergehenden Arbeit angewandten verschieden ist, und dass entsprechend auch der Begriff der zu einer Thetafunction gehörigen Charakteristik sich geändert hat. Will man nämlich aus $\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}(w_1 \,|\, \dots \,|\, w_p)$ die in der vorhergehenden Arbeit mit $\vartheta\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p \end{bmatrix}(w_1 \,|\, \dots \,|\, w_p)$ bezeichnete Function erhalten, so hat man $g_1 = \frac{\varepsilon_1}{2}, \dots, g_p = \frac{\varepsilon_p}{2}$, $h_1 = \frac{\varepsilon'_1}{2}, \dots, h_p = \frac{\varepsilon'_p}{2}$ zu setzen. Man gelangt also in dem Falle, wo die Grössen g, h sämmtlich rationale Zahlen mit dem gemeinsamen Nenner 2 sind, von der hier angewandten Bezeichnungsweise zu der in der vorhergehenden Arbeit benutzten, indem man in der Charakteristik bei jedem Elemente den Nenner 2 unterdrückt. Eine ähnliche Vereinfachung wird man sich bei allen jenen Untersuchungen, bei denen die Elemente der auftretenden Charakteristiken sämmtlich rationale Zahlen mit einem gemeinsamen Nenner r sind, gestatten dürfen, in der Weise, dass man alsdann bei allen Charakteristikenelementen den Nenner r unterdrückt und das auf diese Weise entstehende, nur ganze Zahlen als Elemente enthaltende Symbol in neuer Definition wieder mit dem Namen Charakteristik belegt.

Ebenso wie in der vorhergehenden Arbeit soll auch hier, wenn die Ausdrücke für die Argumente einer Thetafunction sich nur durch untere Indices unterscheiden, hinter dem Functionszeichen nur der allgemeine Ausdruck für die Argumente, mit Weglassung des Index, in doppelte Klammern eingeschlossen geschrieben werden, also $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(w)\!)$ statt $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(w_1 | \ldots | w_p)$, und entsprechend soll ein Grössensystem $w_1 | \ldots | w_p$ einfacher durch (w) bezeichnet werden. Bezeichnet man endlich noch das System:

$$w_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g'_\mu a_{1\mu} + h'_1 \pi i \,|\, \ldots \,|\, w_p + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g'_\mu a_{p\mu} + h'_p \pi i,$$

wobei die g', h' beliebige Constanten bezeichnen, symbolisch mit $\left(w + \begin{vmatrix} g' \\ h' \end{vmatrix}\right)$, so ergeben sich durch Betrachtung der die Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(w)\!)$ definirenden Reihe leicht die im Späteren zur Anwendung kommenden Relationen:

$$\text{(A)} \quad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\left(\!\!\left(w + \begin{vmatrix} g' \\ h' \end{vmatrix}\right)\!\!\right) = \vartheta\begin{bmatrix} g + g' \\ h + h' \end{bmatrix}(\!(w)\!)\, e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} g'_\mu g'_{\mu'} - 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g'_\mu (w_\mu + h_\mu \pi i + h'_\mu \pi i)},$$

$$\text{(B}_1\text{)} \quad \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_\nu + 1 \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_\nu \ldots h_p \end{bmatrix}(\!(w)\!) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_\nu \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_\nu \ldots h_p \end{bmatrix}(\!(w)\!),$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

$$\text{(B}_2\text{)} \quad \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_\nu \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_\nu + 1 \ldots h_p \end{bmatrix}(\!(w)\!) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_\nu \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_\nu \ldots h_p \end{bmatrix}(\!(w)\!)\, e^{2 g_\nu \pi i},$$

$$\text{(C)} \quad \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_p \end{bmatrix}(\!(- w)\!) = \vartheta\begin{bmatrix} - g_1 \ldots - g_p \\ - h_1 \ldots - h_p \end{bmatrix}(\!(w)\!),$$

die für beliebige g, h, g', h' gelten. Sind dagegen die Grössen g', h' ganze Zahlen, so geht aus der Formel (A) durch Anwendung der Relationen (B) die folgende einfachere Formel hervor:

$$(D)\quad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\left(\!\!\left(w + \left|\begin{matrix} g' \\ h' \end{matrix}\right| \right)\!\!\right) = \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(w)\!)\, e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} g'_\mu g'_{\mu'} - 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g'_\mu w_\mu + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(g_\mu h'_\mu - g'_\mu h_\mu)\pi i}$$

2.

Unter $u_1^{(1)}, \ldots, u_p^{(1)};\ u_1^{(2)}, \ldots, u_p^{(2)};\ \ldots;\ u_1^{(n)}, \ldots\ u_p^{(n)}$ sollen n Systeme von je p beliebigen Grössen verstanden werden. Bildet man dann, indem man unter r eine noch unbestimmte positive ganze Zahl versteht, das Product der n in der Form:

$$\vartheta(\!(ru^{(\nu)})\!) = \sum_{m_1^{(\nu)}=-\infty}^{m_1^{(\nu)}=+\infty} \cdots \sum_{m_p^{(\nu)}=-\infty}^{m_p^{(\nu)}=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} m_\mu^{(\nu)} m_{\mu'}^{(\nu)} + 2r\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} m_\mu^{(\nu)} u_\mu^{(\nu)}}$$

enthaltenen, den Werthen $\nu = 1, 2, \ldots, n$ entsprechenden Functionen $\vartheta(\!(ru^{(1)})\!)$, $\vartheta(\!(ru^{(2)})\!)$, $\ldots$, $\vartheta(\!(ru^{(n)})\!)$, so erhält man zunächst:

$$(F)\qquad \vartheta(\!(ru^{(1)})\!)\,\vartheta(\!(ru^{(2)})\!) \ldots \vartheta(\!(ru^{(n)})\!)$$

$$= \sum_m^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\left(m_\mu^{(1)} m_{\mu'}^{(1)} + \ldots + m_\mu^{(n)} m_{\mu'}^{(n)}\right) + 2r\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(m_\mu^{(1)} u_\mu^{(1)} + \ldots + m_\mu^{(n)} u_\mu^{(n)}\right)},$$

wobei die Summation auf der rechten Seite in der Weise auszuführen ist, dass jede der np Grössen m unabhängig von den anderen die Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft. In die rechte Seite der Formel (F) sollen jetzt an Stelle der Grössen m und u neue Grössen eingeführt werden.

Es mögen $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}; c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2n}; \ldots; c_{n1}, c_{n2}, \ldots, c_{nn}$ n^2 ganze Zahlen bezeichnen, die für jedes μ und μ' von 1 bis n den Bedingungen:

$$c_{1\mu}c_{1\mu'} + c_{2\mu}c_{2\mu'} + \ldots + c_{n\mu}c_{n\mu'} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \mu' \gtrless \mu, \\ r^2, & \text{wenn } \mu' = \mu, \end{cases}$$

genügen, wobei die Grösse r, mit der das vorher eingeführte r jetzt zu identificiren ist, eine positive ganze Zahl sein soll. Es bilden dann die Grössen $\frac{c_{11}}{r}, \frac{c_{12}}{r}, \ldots, \frac{c_{1n}}{r}; \frac{c_{21}}{r}, \frac{c_{22}}{r}, \ldots, \frac{c_{2n}}{r}; \ldots; \frac{c_{n1}}{r}, \frac{c_{n2}}{r}, \ldots, \frac{c_{nn}}{r}$ die Coefficienten einer orthogonalen Substitution, und es ist daher, wenn man unter $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ beliebige Grössen versteht und

$$\text{(O)} \qquad \begin{aligned} c_{11}x^{(1)} + c_{12}x^{(2)} + \ldots + c_{1n}x^{(n)} &= ry^{(1)}, \\ c_{21}x^{(1)} + c_{22}x^{(2)} + \ldots + c_{2n}x^{(n)} &= ry^{(2)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot &\quad \cdot \quad \cdot \\ c_{n1}x^{(1)} + c_{n2}x^{(2)} + \ldots + c_{nn}x^{(n)} &= ry^{(n)}, \end{aligned}$$

setzt, das so gebildete Gleichungensystem ein orthogonales, oder, was dasselbe sagt, es ist stets:

$$x^{(1)^2} + x^{(2)^2} + \ldots + x^{(n)^2} = y^{(1)^2} + y^{(2)^2} + \ldots + y^{(n)^2};$$

auch finden weiter noch die mit den obigen äquivalenten Relationen:

$$c_{\mu 1}c_{\mu' 1} + c_{\mu 2}c_{\mu' 2} + \ldots + c_{\mu n}c_{\mu' n} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \mu' \gtrless \mu, \\ r^2, & \text{wenn } \mu' = \mu, \end{cases}$$

statt.

In die rechte Seite der Formel (F) führe man jetzt an Stelle von m_μ, u_μ allgemein, d. h. für $\mu = 1, 2, \ldots, p$, neue Grössen n_μ, v_μ ein, welche mit ihnen verknüpft sind durch die Gleichungen:

$$
(\mathrm{S})\qquad
\begin{array}{ll}
c_{11}m_\mu^{(1)} + c_{12}m_\mu^{(2)} + \dots + c_{1n}m_\mu^{(n)} = rn_\mu^{(1)}, & c_{11}u_\mu^{(1)} + c_{12}u_\mu^{(2)} + \dots + c_{1n}u_\mu^{(n)} = rv_\mu^{(1)}, \\
c_{21}m_\mu^{(1)} + c_{22}m_\mu^{(2)} + \dots + c_{2n}m_\mu^{(n)} = rn_\mu^{(2)}, & c_{21}u_\mu^{(1)} + c_{22}u_\mu^{(2)} + \dots + c_{2n}u_\mu^{(n)} = rv_\mu^{(2)}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
c_{n1}m_\mu^{(1)} + c_{n2}m_\mu^{(2)} + \dots + c_{nn}m_\mu^{(n)} = rn_\mu^{(n)}, & c_{n1}u_\mu^{(1)} + c_{n2}u_\mu^{(2)} + \dots + c_{nn}u_\mu^{(n)} = rv_\mu^{(n)},
\end{array}
$$

oder auch durch die damit äquivalenten Gleichungen:

$$
(\mathrm{S}')\qquad
\begin{array}{ll}
c_{11}n_\mu^{(1)} + c_{21}n_\mu^{(2)} + \dots + c_{n1}n_\mu^{(n)} = rm_\mu^{(1)}, & c_{11}v_\mu^{(1)} + c_{21}v_\mu^{(2)} + \dots + c_{n1}v_\mu^{(n)} = ru_\mu^{(1)}, \\
c_{12}n_\mu^{(1)} + c_{22}n_\mu^{(2)} + \dots + c_{n2}n_\mu^{(n)} = rm_\mu^{(2)}, & c_{12}v_\mu^{(1)} + c_{22}v_\mu^{(2)} + \dots + c_{n2}v_\mu^{(n)} = ru_\mu^{(2)}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
c_{1n}n_\mu^{(1)} + c_{2n}n_\mu^{(2)} + \dots + c_{nn}n_\mu^{(n)} = rm_\mu^{(n)}, & c_{1n}v_\mu^{(1)} + c_{2n}v_\mu^{(2)} + \dots + c_{nn}v_\mu^{(n)} = ru_\mu^{(n)}.
\end{array}
$$

In Folge dieser zwischen den Grössen m und n wie zwischen den Grössen u und v gesetzten Beziehungen wird das Gleichungensystem (O) erfüllt, wenn man allgemein, d. h. für $\nu = 1, 2, \dots, n$:

1) $x^{(\nu)}$ durch $m_\mu^{(\nu)}$ und gleichzeitig $y^{(\nu)}$ durch $n_\mu^{(\nu)}$,

2) $x^{(\nu)}$ durch $m_{\mu'}^{(\nu)}$ und gleichzeitig $y^{(\nu)}$ durch $n_{\mu'}^{(\nu)}$,

3) $x^{(\nu)}$ durch $u_\mu^{(\nu)}$ und gleichzeitig $y^{(\nu)}$ durch $v_\mu^{(\nu)}$

ersetzt. Dasselbe System wird daher auch erfüllt, wenn man

4) $x^{(\nu)}$ durch $m_\mu^{(\nu)} + m_{\mu'}^{(\nu)}$ und gleichzeitig $y^{(\nu)}$ durch $n_\mu^{(\nu)} + n_{\mu'}^{(\nu)}$,

5) $x^{(\nu)}$ durch $m_\mu^{(\nu)} + u_\mu^{(\nu)}$ und gleichzeitig $y^{(\nu)}$ durch $n_\mu^{(\nu)} + v_\mu^{(\nu)}$

ersetzt. Es bestehen daher, entsprechend den fünf soeben aufgestellten Lösungen, die Relationen:

$$m_\mu^{(1)2} + m_\mu^{(2)2} + \ldots + m_\mu^{(n)2} = n_\mu^{(1)2} + n_\mu^{(2)2} + \ldots + n_\mu^{(n)2},$$

$$m_{\mu'}^{(1)2} + m_{\mu'}^{(2)2} + \ldots + m_{\mu'}^{(n)2} = n_{\mu'}^{(1)2} + n_{\mu'}^{(2)2} + \ldots + n_{\mu'}^{(n)2},$$

$$u_\mu^{(1)2} + u_\mu^{(2)2} + \ldots + u_\mu^{(n)2} = v_\mu^{(1)2} + v_\mu^{(2)2} + \ldots + v_\mu^{(n)2},$$

$$(m_\mu^{(1)} + m_{\mu'}^{(1)})^2 + \ldots + (m_\mu^{(n)} + m_{\mu'}^{(n)})^2 = (n_\mu^{(1)} + n_{\mu'}^{(1)})^2 + \ldots + (n_\mu^{(n)} + n_{\mu'}^{(n)})^2,$$

$$(m_\mu^{(1)} + u_\mu^{(1)})^2 + \ldots + (m_\mu^{(n)} + u_\mu^{(n)})^2 = (n_\mu^{(1)} + v_\mu^{(1)})^2 + \ldots + (n_\mu^{(n)} + v_\mu^{(n)})^2,$$

aus denen durch passende Verbindung schliesslich die Gleichungen:

$$m_\mu^{(1)} m_{\mu'}^{(1)} + m_\mu^{(2)} m_{\mu'}^{(2)} + \ldots + m_\mu^{(n)} m_{\mu'}^{(n)} = n_\mu^{(1)} n_{\mu'}^{(1)} + n_\mu^{(2)} n_{\mu'}^{(2)} + \ldots + n_\mu^{(n)} n_{\mu'}^{(n)},$$

$$m_\mu^{(1)} u_\mu^{(1)} + m_\mu^{(2)} u_\mu^{(2)} + \ldots + m_\mu^{(n)} u_\mu^{(n)} = n_\mu^{(1)} v_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} v_\mu^{(2)} + \ldots + n_\mu^{(n)} v_\mu^{(n)}$$

hervorgehen, die für jedes μ und μ' von 1 bis p gelten. Mit Hülfe dieser beiden Gleichungen kann man nun auf der rechten Seite der Formel (F) die Grössen m und u durch die Grössen n und v ersetzen und erhält dann die neue Formel:

$$(\mathrm{F}_1) \qquad \vartheta((ru^{(1)}))\,\vartheta((ru^{(2)}))\ldots\vartheta((ru^{(n)}))$$

$$= \sum_n e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\left(n_\mu^{(1)} n_{\mu'}^{(1)} + \ldots + n_\mu^{(n)} n_{\mu'}^{(n)}\right) + 2r\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(n_\mu^{(1)} v_\mu^{(1)} + \ldots + n_\mu^{(n)} v_\mu^{(n)}\right)},$$

wobei jedoch die Art und Weise, wie über die Grössen n zu summiren ist, noch einer näheren Bestimmung bedarf.

Bei der Ausführung der auf der rechten Seite der Formel (F) angedeuteten Summation tritt im allgemeinen Gliede an Stelle des Systems der n einem beliebigen Index μ entsprechenden Grössen:

$$m_\mu^{(1)},\ m_\mu^{(2)},\ \ldots,\ m_\mu^{(n)}$$

jede Variation zur n^{ten} Classe mit Wiederholung, die man aus den überhaupt existirenden negativen und positiven ganzen Zahlen als Elementen bilden kann, und entsprechend muss daher bei der Ausführung der auf der rechten Seite der Formel (F_1) angedeuteten Summation — da das allgemeine Glied dieser Summe aus dem allgemeinen Gliede der auf der rechten Seite von (F) stehenden Summe durch Einführung der Grössen n, v unmittelbar erhalten wurde — an Stelle des Systems der n Grössen:

$$n_\mu^{(1)},\ n_\mu^{(2)},\ \ldots,\ n_\mu^{(n)}$$

jedes System von Werthen und jedes nur einmal gesetzt werden, welches sich aus den Gleichungen (S) ergibt, wenn man darin an Stelle des Systems der Grössen m die genannten Variationen treten lässt.

Denkt man sich nun für jedes μ von 1 bis p das System der n Zahlen $m_\mu^{(1)}, m_\mu^{(2)}, \ldots, m_\mu^{(n)}$ in die Form gebracht:

$$m_\mu^{(1)} = rm_\mu'^{(1)} + \rho_\mu^{(1)},\ m_\mu^{(2)} = rm_\mu'^{(2)} + \rho_\mu^{(2)},\ \ldots,\ m_\mu^{(n)} = rm_\mu'^{(n)} + \rho_\mu^{(n)},$$

indem man allgemein unter $\rho_\mu^{(\nu)}$ den kleinsten positiven Rest der Zahl $m_\mu^{(\nu)}$ nach dem Modul r versteht, und führt diese Ausdrücke an Stelle der m in die Gleichungen des Systems (S) ein, so ergibt sich zunächst, wenn man noch unter $\bar{\alpha}_\mu^{(1)}, \bar{\alpha}_\mu^{(2)}, \ldots, \bar{\alpha}_\mu^{(n)}$ Grössen versteht, welche sich aus n gegebenen Grössen $\alpha_\mu^{(1)}, \alpha_\mu^{(2)}, \ldots, \alpha_\mu^{(n)}$ den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}_\mu^{(1)} &= c_{11}\alpha_\mu^{(1)} + c_{12}\alpha_\mu^{(2)} + \ldots + c_{1n}\alpha_\mu^{(n)},\\
\bar{\alpha}_\mu^{(2)} &= c_{21}\alpha_\mu^{(1)} + c_{22}\alpha_\mu^{(2)} + \ldots + c_{2n}\alpha_\mu^{(n)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\bar{\alpha}_\mu^{(n)} &= c_{n1}\alpha_\mu^{(1)} + c_{n2}\alpha_\mu^{(2)} + \ldots + c_{nn}\alpha_\mu^{(n)},
\end{aligned}$$

gemäss linear zusammensetzen, dass die n Grössen:

$$n_\mu^{(1)},\ n_\mu^{(2)},\ \ldots,\ n_\mu^{(n)}$$

stets in der Form dargestellt werden können:

$$n_\mu^{(1)} = \hat{n}_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(1)}}{r},\ n_\mu^{(2)} = \hat{n}_\mu^{(2)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(2)}}{r},\ \ldots,\ n_\mu^{(n)} = \hat{n}_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(n)}}{r},$$

wobei die $\hat{n}$ ganze Zahlen bedeuten, die in den linearen Formen $\bar{\alpha}$ vorkommenden α aber ausschliesslich Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots, r-1$ bezeichnen, und dass *eine* solche Darstellung, wenn man zur Abkürzung:

$$\begin{gathered}
c_{11}m_\mu'^{(1)} + c_{12}m_\mu'^{(2)} + \ldots + c_{1n}m_\mu'^{(n)} = r_\mu^{(1)},\\
c_{21}m_\mu'^{(1)} + c_{22}m_\mu'^{(2)} + \ldots + c_{2n}m_\mu'^{(n)} = r_\mu^{(2)},\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
c_{n1}m_\mu'^{(1)} + c_{n2}m_\mu'^{(2)} + \ldots + c_{nn}m_\mu'^{(n)} = r_\mu^{(n)},
\end{gathered}$$

setzt, durch die Gleichungen:

$$\begin{gathered}
\hat{n}_\mu^{(1)} = r_\mu^{(1)},\ \ \hat{n}_\mu^{(2)} = r_\mu^{(2)},\ \ldots\ldots,\ \ \hat{n}_\mu^{(n)} = r_\mu^{(n)},\\
\alpha_\mu^{(1)} = \rho_\mu^{(1)},\ \ \alpha_\mu^{(2)} = \rho_\mu^{(2)},\ \ldots\ldots,\ \ \alpha_\mu^{(n)} = \rho_\mu^{(n)},
\end{gathered}$$

repräsentirt wird. Die weitere Frage ist dann, ob bei gegebenen m und dadurch bestimmten n die Grössen $\hat{n}$, α nicht auf mehrere den aufgestellten Bedingungen entsprechende Weisen bestimmt werden können.

Man nehme an, es existire eine zweite solche Bestimmung der Grössen $\hat{n}, \alpha$, und es sei dieselbe repräsentirt durch:

$$\begin{gathered}
\hat{n}_\mu^{(1)} = s_\mu^{(1)},\ \ \hat{n}_\mu^{(2)} = s_\mu^{(2)},\ \ldots\ldots,\ \ \hat{n}_\mu^{(n)} = s_\mu^{(n)},\\
\alpha_\mu^{(1)} = \sigma_\mu^{(1)},\ \ \alpha_\mu^{(2)} = \sigma_\mu^{(2)},\ \ldots\ldots,\ \ \alpha_\mu^{(n)} = \sigma_\mu^{(n)},
\end{gathered}$$

wobei die s also wieder ganze Zahlen, die σ Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots, r-1$ bezeichnen. Aus den beiden jetzt vorhandenen Darstellungen der Grössen n:

$$\begin{gathered}
n_\mu^{(1)} = r_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\rho}_\mu^{(1)}}{r},\ \ n_\mu^{(2)} = r_\mu^{(2)} + \frac{\bar{\rho}_\mu^{(2)}}{r},\ \ldots\ldots,\ \ n_\mu^{(n)} = r_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\rho}_\mu^{(n)}}{r},\\
n_\mu^{(1)} = s_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\sigma}_\mu^{(1)}}{r},\ \ n_\mu^{(2)} = s_\mu^{(2)} + \frac{\bar{\sigma}_\mu^{(2)}}{r},\ \ldots\ldots,\ \ n_\mu^{(n)} = s_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\sigma}_\mu^{(n)}}{r},
\end{gathered}$$

wobei die $\bar{\rho}, \bar{\sigma}$ von den ρ, σ beziehlich in derselben Weise abhängen, wie die $\bar{\alpha}$ von den α, ergeben sich dann unmittelbar die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_\mu^{(1)} &= \bar{\rho}_\mu^{(1)} - r(s_\mu^{(1)} - r_\mu^{(1)}),\\
\bar{\sigma}_\mu^{(2)} &= \bar{\rho}_\mu^{(2)} - r(s_\mu^{(2)} - r_\mu^{(2)}),\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
\bar{\sigma}_\mu^{(n)} &= \bar{\rho}_\mu^{(n)} - r(s_\mu^{(n)} - r_\mu^{(n)}),
\end{aligned}$$

und man erkennt daraus, indem man an Stelle der $\bar{\sigma}$ die ihnen entsprechenden linearen Functionen der σ setzt, dass die Grössen $\sigma_\mu^{(1)}, \sigma_\mu^{(2)}, \ldots, \sigma_\mu^{(n)}$ eine von der Lösung $\rho_\mu^{(1)}, \rho_\mu^{(2)}, \ldots, \rho_\mu^{(n)}$ verschiedene, d. h. derselben nach dem Modul r nicht congruente, Lösung des Congruenzensystems:

$$\text{(C)}\qquad\begin{aligned}
c_{11}x^{(1)} + c_{12}x^{(2)} + \ldots + c_{1n}x^{(n)} &\equiv \bar{\rho}_\mu^{(1)} \pmod r,\\
c_{21}x^{(1)} + c_{22}x^{(2)} + \ldots + c_{2n}x^{(n)} &\equiv \bar{\rho}_\mu^{(2)} \pmod r,\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
c_{n1}x^{(1)} + c_{n2}x^{(2)} + \ldots + c_{nn}x^{(n)} &\equiv \bar{\rho}_\mu^{(n)} \pmod r,
\end{aligned}$$

bilden müssen. Bezeichnet umgekehrt $\tau_\mu^{(1)}, \tau_\mu^{(2)}, \ldots, \tau_\mu^{(n)}$ eine beliebige von $\rho_\mu^{(1)}, \rho_\mu^{(2)}, \ldots, \rho_\mu^{(n)}$ verschiedene Lösung dieses Congruenzensystems, deren Elemente τ man sich auf ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul r reducirt zu denken hat, so kann man stets mit Hülfe der Grössen τ, indem man sie an Stelle der α treten lässt, eine von der ursprünglichen verschiedene Darstellung der Grössen n erhalten. Setzt man nämlich:

$$\begin{aligned}
c_{11}\tau_\mu^{(1)} + c_{12}\tau_\mu^{(2)} + \ldots + c_{1n}\tau_\mu^{(n)} &= \bar{\rho}_\mu^{(1)} + rf_\mu^{(1)},\\
c_{21}\tau_\mu^{(1)} + c_{22}\tau_\mu^{(2)} + \ldots + c_{2n}\tau_\mu^{(n)} &= \bar{\rho}_\mu^{(2)} + rf_\mu^{(2)},\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
c_{n1}\tau_\mu^{(1)} + c_{n2}\tau_\mu^{(2)} + \ldots + c_{nn}\tau_\mu^{(n)} &= \bar{\rho}_\mu^{(n)} + rf_\mu^{(n)},
\end{aligned}$$

oder in kürzerer Bezeichnung:

$$\bar{\tau}_\mu^{(1)} = \bar{\rho}_\mu^{(1)} + rf_\mu^{(1)},\quad \bar{\tau}_\mu^{(2)} = \bar{\rho}_\mu^{(2)} + rf_\mu^{(2)},\ \ldots\ldots,\ \bar{\tau}_\mu^{(n)} = \bar{\rho}_\mu^{(n)} + rf_\mu^{(n)},$$

so sind $f_\mu^{(1)}, f_\mu^{(2)}, \ldots, f_\mu^{(n)}$ ganze Zahlen, und es ergibt sich daher aus der ursprünglichen Darstellung:

$$n_\mu^{(1)} = r_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\rho}_\mu^{(1)}}{r}, \qquad n_\mu^{(2)} = r_\mu^{(2)} + \frac{\bar{\rho}_\mu^{(2)}}{r}, \qquad \ldots\ldots, n_\mu^{(n)} = r_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\rho}_\mu^{(n)}}{r},$$

mit Hülfe der letzten Gleichungen sofort die neue:

$$n_\mu^{(1)} = r_\mu^{(1)} - f_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\tau}_\mu^{(1)}}{r},\ n_\mu^{(2)} = r_\mu^{(2)} - f_\mu^{(2)} + \frac{\bar{\tau}_\mu^{(2)}}{r}, \ldots, n_\mu^{(n)} = r_\mu^{(n)} - f_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\tau}_\mu^{(n)}}{r},$$

bei welcher also die Grössen $\hat{n}, \alpha$ die Werthe:

$$\hat{n}_\mu^{(1)} = r_\mu^{(1)} - f_\mu^{(1)}, \qquad \hat{n}_\mu^{(2)} = r_\mu^{(2)} - f_\mu^{(2)}, \qquad \ldots\ldots, \hat{n}_\mu^{(n)} = r_\mu^{(n)} - f_\mu^{(n)},$$

$$\alpha_\mu^{(1)} = \tau_\mu^{(1)}, \qquad \alpha_\mu^{(2)} = \tau_\mu^{(2)}, \qquad \ldots\ldots, \alpha_\mu^{(n)} = \tau_\mu^{(n)},$$

besitzen. Daraus folgt aber, dass die n zu gegebenen Grössen $m_\mu^{(1)}, m_\mu^{(2)}, \ldots, m_\mu^{(n)}$ gehörigen, durch die Gleichungen (S) in jedem Falle eindeutig bestimmten Grössen $n_\mu^{(1)}, n_\mu^{(2)}, \ldots, n_\mu^{(n)}$ auf s verschiedene Weisen in die Form:

$$n_\mu^{(1)} = \hat{n}_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(1)}}{r}, \qquad n_\mu^{(2)} = \hat{n}_\mu^{(2)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(2)}}{r}, \qquad \ldots\ldots, n_\mu^{(n)} = \hat{n}_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(n)}}{r}$$

— wobei die $\hat{n}$ ganze Zahlen, die in den linearen Formen $\bar{\alpha}$ vorkommenden α aber Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots, r-1$ bezeichnen — gebracht werden können, wenn man unter s die Anzahl der ausschliesslich von Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots, r-1$ als Elementen gebildeten oder, was auf dasselbe hinauskommt, der nach dem Modul r incongruenten Lösungen des Congruenzensystems (C) versteht. Diese Anzahl s ist aber dieselbe, wie die Anzahl der nach dem Modul r incongruenten Lösungen des Congruenzensystems:

$$(C_0)\qquad \begin{aligned} &c_{11}x^{(1)} + c_{12}x^{(2)} + \ldots + c_{1n}x^{(n)} \equiv 0 \pmod r, \\ &c_{21}x^{(1)} + c_{22}x^{(2)} + \ldots + c_{2n}x^{(n)} \equiv 0 \pmod r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &c_{n1}x^{(1)} + c_{n2}x^{(2)} + \ldots + c_{nn}x^{(n)} \equiv 0 \pmod r; \end{aligned}$$

man erhält nämlich die sämmtlichen soeben erwähnten Lösungen des Systems (C) und zwar jede nur einmal, wenn man zu einer beliebigen von ihnen, z. B. zu $\rho_\mu^{(1)}, \rho_\mu^{(2)}, \ldots, \rho_\mu^{(n)}$, der Reihe nach die sämmtlichen nach dem Modul r incongruenten Lösungen des Systems (C_0) addirt und die dabei auftretenden Zahlen stets auf ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul r reducirt.

Auf welche der s möglichen Weisen man nun auch die zu gegebenen Grössen $m_\mu^{(1)}, m_\mu^{(2)}, \ldots, m_\mu^{(n)}$ gehörigen, durch die Gleichungen (S) bestimmten Grössen $n_\mu^{(1)}, n_\mu^{(2)}, \ldots, n_\mu^{(n)}$ in die Form:

$$n_\mu^{(1)} = \hat{n}_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(1)}}{r}, \qquad n_\mu^{(2)} = \hat{n}_\mu^{(2)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(2)}}{r}, \;\ldots\ldots,\; n_\mu^{(n)} = \hat{n}_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(n)}}{r}$$

bringen mag, es werden die bei irgend einer solchen Darstellung auftretenden ganzen Zahlen $\hat{n}_\mu^{(1)}, \hat{n}_\mu^{(2)}, \ldots, \hat{n}_\mu^{(n)}$ immer eine gewisse Bedingung erfüllen, die zudem vollständig unabhängig ist von dem speciellen Systeme der Grössen n, auf das sich die Darstellung bezieht. Führt man nämlich die soeben aufgestellten Ausdrücke an Stelle der Grössen n in die Gleichungen (S') ein, indem man zugleich die $\bar{\alpha}$ durch die ihnen entsprechenden linearen Functionen der α ersetzt, so erhält man unter Berücksichtigung der Relationen, denen die ganzen Zahlen c genügen, die Gleichungen:

$$(S'')\qquad \begin{aligned}
&(c_{11}\hat{n}_\mu^{(1)} + c_{21}\hat{n}_\mu^{(2)} + \ldots + c_{n1}\hat{n}_\mu^{(n)}) + r\alpha_\mu^{(1)} = rm_\mu^{(1)},\\
&(c_{12}\hat{n}_\mu^{(1)} + c_{22}\hat{n}_\mu^{(2)} + \ldots + c_{n2}\hat{n}_\mu^{(n)}) + r\alpha_\mu^{(2)} = rm_\mu^{(2)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(c_{1n}\hat{n}_\mu^{(1)} + c_{2n}\hat{n}_\mu^{(2)} + \ldots + c_{nn}\hat{n}_\mu^{(n)}) + r\alpha_\mu^{(n)} = rm_\mu^{(n)},
\end{aligned}$$

und erkennt daraus, dass für die n Grössen $\hat{n}_\mu^{(1)}, \hat{n}_\mu^{(2)}, \ldots, \hat{n}_\mu^{(n)}$ nur solche ganze Zahlen auftreten können, für welche die n Grössen:

$$c_{11}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n1}\hat{n}_\mu^{(n)},\; c_{12}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n2}\hat{n}_\mu^{(n)},\; \ldots\ldots,\; c_{1n}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{nn}\hat{n}_\mu^{(n)}$$

sämmtlich durch r theilbare ganze Zahlen sind. Setzt man umgekehrt in den Gleichungen (S″) an Stelle der n Grössen $\hat{n}_\mu^{(1)}, \hat{n}_\mu^{(2)}, \ldots, \hat{n}_n^{(n)}$ irgend welche ganze Zahlen, für welche die n Grössen:

$$c_{11}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n1}\hat{n}_\mu^{(n)},\; c_{12}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n2}\hat{n}_\mu^{(n)},\; \ldots,\; c_{1n}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{nn}\hat{n}_\mu^{(n)}$$

sämmtlich durch r theilbare ganze Zahlen sind, und zugleich an Stelle der n Grössen $\alpha_\mu^{(1)}, \alpha_\mu^{(2)}, \ldots, \alpha_\mu^{(n)}$ irgend welche Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots, r-1$, so liefern diese Gleichungen für die Grössen m immer ein System ganzer Zahlen $m_\mu^{(1)}, m_\mu^{(2)}, \ldots, m_\mu^{(n)}$, denen als Grössen n die aus den gewählten $\hat{n}$ und α gebildeten Grössen:

$$n_\mu^{(1)} = \hat{n}_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(1)}}{r},\quad n_\mu^{(2)} = \hat{n}_\mu^{(2)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(2)}}{r},\; \ldots,\; n_\mu^{(n)} = \hat{n}_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(n)}}{r}$$

entsprechen. Daraus folgt aber unter Berücksichtigung des früher gefundenen Resultates, wonach bei gegebenen m und dadurch bestimmten n die Grössen $\hat{n}$ und α auf s verschiedene Weisen bestimmt werden können, dass an Stelle des Systems der n Grössen $m_\mu^{(1)}, m_\mu^{(2)}, \ldots, m_\mu^{(n)}$, die mit den Grössen $\hat{n}$ und α immer durch die Gleichungen (S″) verknüpft sind, jede Variation zur n^{ten} Classe mit Wiederholung, die man aus den überhaupt existirenden positiven und negativen ganzen Zahlen als Elementen bilden kann, und zwar eine jede s-mal tritt, wenn man an Stelle des Systems der n Grössen $\alpha_\mu^{(1)}, \alpha_\mu^{(2)}, \ldots, \alpha_\mu^{(n)}$ der Reihe nach die sämmtlichen r^n Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, r-1$ zur n^{ten} Classe mit Wiederholung setzt und dabei jedesmal an Stelle des Systems der n Grössen $\hat{n}_\mu^{(1)}, \hat{n}_\mu^{(2)}, \ldots, \hat{n}_\mu^{(n)}$ jedes System von n ganzen Zahlen treten lässt, für welches die n Grössen:

$$c_{11}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n1}\hat{n}_\mu^{(n)},\; c_{12}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n2}\hat{n}_\mu^{(n)},\; \ldots,\; c_{1n}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{nn}\hat{n}_\mu^{(n)}$$

sämmtlich durch r theilbare ganze Zahlen sind.

Aus dem zuletzt gewonnenen Resultate ergibt sich nun schliesslich, dass man die auf der rechten Seite der Gleichung (F_1) angedeutete Summation in der Weise ausführen kann, dass man im allgemeinen Gliede für jedes μ von 1 bis p:

$$n_\mu^{(1)} = \hat{n}_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(1)}}{r},\quad n_\mu^{(2)} = \hat{n}_\mu^{(2)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(2)}}{r},\; \ldots,\; n_\mu^{(n)} = \hat{n}_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(n)}}{r}$$

setzt, hierauf an Stelle des Systems der n Grössen $\alpha_\mu^{(1)}, \alpha_\mu^{(2)}, \ldots, \alpha_\mu^{(n)}$ der Reihe nach die sämmtlichen r^n Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, r-1$ zur n^{ten} Classe mit Wiederholung treten lässt und zu jeder solchen Variation an Stelle des Systems der n Grössen $\hat{n}_\mu^{(1)}, \hat{n}_\mu^{(2)}, \ldots, \hat{n}_\mu^{(n)}$ jedes System von n ganzen Zahlen setzt, für welches die n Grössen:

$$c_{11}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n1}\hat{n}_\mu^{(n)},\ c_{12}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n2}\hat{n}_\mu^{(n)}, \ldots, c_{1n}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{nn}\hat{n}_\mu^{(n)}$$

sämmtlich durch r theilbare ganze Zahlen sind, endlich die Summe der so entstehenden Terme bildet und diese Summe noch durch s^p theilt.

Die in Bezug auf die Grössen $\hat{n}$ auszuführende Summation kann von der ihr anhaftenden Beschränkung auf folgende Weise befreit werden. Berücksichtigt man, dass das System der n Grössen:

$$c_{11}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n1}\hat{n}_\mu^{(n)},\ c_{12}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n2}\hat{n}_\mu^{(n)}, \ldots, c_{1n}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{nn}\hat{n}_\mu^{(n)}$$

zwar jedesmal in ein System ganzer Zahlen, aber nicht jedesmal in ein System durch r theilbarer ganzer Zahlen übergeht, wenn man an Stelle der Grössen $\hat{n}$ beliebige ganze Zahlen setzt, berücksichtigt auch, dass ein jeder der aus den n Grössen:

$$n_\mu^{(1)} = \hat{n}_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(1)}}{r}, \quad n_\mu^{(2)} = \hat{n}_\mu^{(2)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(2)}}{r}, \ldots, \quad n_\mu^{(n)} = \hat{n}_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(n)}}{r}$$

gebildeten analogen Ausdrücke:

$$c_{11}n_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n1}n_\mu^{(n)},\ c_{12}n_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n2}n_\mu^{(n)}, \ldots, c_{1n}n_\mu^{(1)} + \ldots + c_{nn}n_\mu^{(n)}$$

mit dem ihm entsprechenden, die Grössen $\hat{n}$ an Stelle der Grössen n enthaltenden Ausdrucke — da für jedes ν von 1 bis n:

$$c_{1\nu}n_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n\nu}n_\mu^{(n)} = c_{1\nu}\hat{n}_\mu^{(1)} + \ldots + c_{n\nu}\hat{n}_\mu^{(n)} + r\alpha_\mu^{(\nu)}$$

ist — immer gleichzeitig eine durch r theilbare oder eine durch r nicht theilbare ganze Zahl ist, so erkennt man, dass man die Summation in Bezug auf die Grössen $\hat{n}$ von der ihr anhaftenden Beschränkung dadurch befreien kann, dass man das in (F_1) hinter dem Summenzeichen stehende allgemeine Glied mit einer Function F der sämmtlichen pn Grössen $n_\mu^{(1)}, n_\mu^{(2)}, \ldots, n_\mu^{(n)}$, $\mu = 1, 2, \ldots, p$, multiplicirt, die so beschaffen ist, dass sie immer den Werth 0 besitzt, sobald auch nur eine der pn Grössen:

$$c_{11}n_\mu^{(1)} + \cdots + c_{n1}n_\mu^{(n)},\; c_{12}n_\mu^{(1)} + \cdots + c_{n2}n_\mu^{(n)},\; \ldots,\; c_{1n}n_\mu^{(1)} + \cdots + c_{nn}n_\mu^{(n)},$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

eine durch r nicht theilbare ganze Zahl ist, dass sie dagegen den Werth 1 hat, sobald diese pn Grössen sämmtlich durch r theilbare ganze Zahlen sind. Summirt man nämlich, nachdem man eine solche Function F hinter dem Summenzeichen als Factor eingeschoben hat, in Bezug auf jedes $\hat{n}$ von $-\infty$ bis $+\infty$, so wird der Werth der entstehenden Summe derselbe sein, wie der der ursprünglichen, da bei der neuen Summe alle diejenigen Glieder, für welche die pn Grössen:

$$c_{11}\hat{n}_\mu^{(1)} + \cdots + c_{n1}\hat{n}_\mu^{(n)},\; c_{12}\hat{n}_\mu^{(1)} + \cdots + c_{n2}\hat{n}_\mu^{(n)},\; \ldots,\; c_{1n}\hat{n}_\mu^{(1)} + \cdots + c_{nn}\hat{n}_\mu^{(n)},$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

oder, was dasselbe, die pn Grössen:

$$c_{11}n_\mu^{(1)} + \cdots + c_{n1}n_\mu^{(n)},\; c_{12}n_\mu^{(1)} + \cdots + c_{n2}n_\mu^{(n)},\; \ldots,\; c_{1n}n_\mu^{(1)} + \cdots + c_{nn}n_\mu^{(n)},$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

nicht sämmtlich durch r theilbare ganze Zahlen sind, und welchen daher auch keine Glieder der ursprünglichen Summe entsprechen, in Folge des bei ihnen stattfindenden Verschwindens des Factors F den Werth Null besitzen, während der Complex der übrig bleibenden Glieder, da bei jedem derselben der Factor F den Werth 1 besitzt, mit dem Complex der die ursprüngliche Summe bildenden Glieder identisch ist. Eine Function F mit den erwähnten Eigenschaften soll jetzt gebildet werden.

Man setze, indem man unter μ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$ versteht:

$$f_\mu =$$

$$\frac{1}{r^n}\left(\sum_{\beta_\mu^{(1)}=0}^{\beta_\mu^{(1)}=r-1} e^{\frac{2\beta_\mu^{(1)}\pi i}{r}\left(c_{11}n_\mu^{(1)}+\cdots+c_{n1}n_\mu^{(n)}\right)}\right)\cdots\left(\sum_{\beta_\mu^{(n)}=0}^{\beta_\mu^{(n)}=r-1} e^{\frac{2\beta_\mu^{(n)}\pi i}{r}\left(c_{1n}n_\mu^{(1)}+\cdots+c_{nn}n_\mu^{(n)}\right)}\right);$$

die so definirte Grösse f_μ besitzt dann immer den Werth 0, wenn auch nur eine der n Grössen:

$$c_{11}n_\mu^{(1)}+\ldots+c_{n1}n_\mu^{(n)},\ c_{12}n_\mu^{(1)}+\ldots+c_{n2}n_\mu^{(n)},\ \ldots,\ c_{1n}n_\mu^{(1)}+\ldots+c_{nn}n_\mu^{(n)}$$

eine durch r nicht theilbare ganze Zahl ist, dagegen den Werth 1, wenn diese n Grössen sämmtlich durch r theilbare ganze Zahlen sind. Bringt man nun, indem man zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}
c_{11}\beta_\mu^{(1)}+c_{12}\beta_\mu^{(2)}+\ \ldots\ +c_{1n}\beta_\mu^{(n)} &= \bar\beta_\mu^{(1)},\\
c_{21}\beta_\mu^{(1)}+c_{22}\beta_\mu^{(2)}+\ \ldots\ +c_{2n}\beta_\mu^{(n)} &= \bar\beta_\mu^{(2)},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
c_{n1}\beta_\mu^{(1)}+c_{n2}\beta_\mu^{(2)}+\ \ldots\ +c_{nn}\beta_\mu^{(n)} &= \bar\beta_\mu^{(n)},
\end{aligned}$$

setzt, die Grösse f_μ in die Form:

$$f_\mu = \frac{1}{r^n}\sum_{\beta_\mu^{(1)}=0}^{\beta_\mu^{(1)}=r-1}\cdots\sum_{\beta_\mu^{(n)}=0}^{\beta_\mu^{(n)}=r-1} e^{\frac{2\pi i}{r}\left(n_\mu^{(1)}\bar\beta_\mu^{(1)}+n_\mu^{(2)}\bar\beta_\mu^{(2)}+\cdots+n_\mu^{(n)}\bar\beta_\mu^{(n)}\right)}$$

und bildet das Product:

$$F = f_1 f_2 \ldots f_p = \frac{1}{r^{np}}\sum_{\beta}^{0,1,\ldots,r-1} e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(n_\mu^{(1)}\bar\beta_\mu^{(1)}+n_\mu^{(2)}\bar\beta_\mu^{(2)}+\cdots+n_\mu^{(n)}\bar\beta_\mu^{(n)}\right)}$$

wobei die auf der rechten Seite angedeutete Summation so auszuführen ist, dass jede der pn in den linearen Ausdrücken $\bar{\beta}$ vorkommenden Grössen β unabhängig von den anderen die Werthe $0, 1, \ldots, r - 1$ annimmt, so ist F eine Function mit den gewünschten Eigenschaften, und man darf daher, wenn man sie auf der rechten Seite der Formel (F_1) hinter dem Summenzeichen als Factor eingeschoben und auch bei ihr für jedes μ von 1 bis p die Grössen:

$$n_\mu^{(1)}, \qquad n_\mu^{(2)}, \qquad \ldots, n_\mu^{(n)}$$

durch die Grössen:

$$\hat{n}_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(1)}}{r}, \quad \hat{n}_\mu^{(2)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(2)}}{r}, \ldots, \hat{n}_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(n)}}{r}$$

beziehlich ersetzt hat, die Summation alsdann in der Weise ausführen, dass die $\hat{n}$ unabhängig von einander die Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, während gleichzeitig jede der pn in den linearen Ausdrücken $\bar{\alpha}$ vorkommenden Grössen α unabhängig von den anderen die Werthe $0, 1, \ldots, r - 1$ annimmt. Man gelangt auf diese Weise nach einfacher Umformung des allgemeinen Gliedes der Summe und passender Anordnung der Summation, wenn man zugleich noch linke und rechte Seite mit $r^{np} s^p$ multiplicirt, zunächst zu der Gleichung:

$$(\mathrm{F}_2) \qquad (r^n s)^p \vartheta(\!(ru^{(1)})\!) \vartheta(\!(ru^{(2)})\!) \ldots \vartheta(\!(ru^{(n)})\!) =$$

$$\sum_{\alpha, \beta}^{0,1,\ldots,r-1} \sum_{\hat{n}}^{-\infty,\ldots,+\infty} \left| \begin{array}{l} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \left[\left(\hat{n}_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(1)}}{r}\right)\left(\hat{n}_{\mu'}^{(1)} + \frac{\bar{\alpha}_{\mu'}^{(1)}}{r}\right) + \ldots + \left(\hat{n}_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(n)}}{r}\right)\left(\hat{n}_{\mu'}^{(n)} + \frac{\bar{\alpha}_{\mu'}^{(n)}}{r}\right) \right]} \\ \times e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \left[\left(\hat{n}_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(1)}}{r}\right)\left(rv_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\beta}_\mu^{(1)}}{r}\pi i\right) + \ldots + \left(\hat{n}_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\alpha}_\mu^{(n)}}{r}\right)\left(rv_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\beta}_\mu^{(n)}}{r}\pi i\right) \right]} \end{array} \right|$$

wobei also die durch $\sum\limits_{\hat{n}}^{-\infty,\ldots,+\infty}$ markirte innere Summation so auszuführen ist, dass die pn Grössen $\hat{n}$ unabhängig von einander die Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, die ebendaselbst vorkommende äussere Summation aber so, dass jede der $2pn$ in den linearen Ausdrücken $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ vorkommenden Grössen α, β unabhängig von den anderen die Werthe $0, 1, \ldots, r - 1$ annimmt.

Die auf der rechten Seite der Formel (F_2) hinter dem ersten Summenzeichen stehende np-fach unendliche Reihe ist aber, wie ein Blick auf die in Art. 1 aufgestellte, die Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(w)\!)$ definirende Reihe zeigt, identisch mit dem Producte der n die Functionen:

$$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(1)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(1)}}{r} \end{bmatrix}(\!(rv^{(1)})\!),\quad \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(2)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(2)}}{r} \end{bmatrix}(\!(rv^{(2)})\!),\quad \ldots,\quad \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(n)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(n)}}{r} \end{bmatrix}(\!(rv^{(n)})\!)$$

— bei denen die Charakteristiken, dem früher getroffenen Übereinkommen entsprechend, in abgekürzter Form geschrieben sind, sodass allgemein, d. h. für $\nu = 1, 2, \ldots, n$:

$$\text{das Symbol } \begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(\nu)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(\nu)}}{r} \end{bmatrix} \text{ die Charakteristik } \begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}_1^{(\nu)}}{r} \ldots \frac{\bar{\alpha}_p^{(\nu)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}_1^{(\nu)}}{r} \ldots \frac{\bar{\beta}_p^{(\nu)}}{r} \end{bmatrix}$$

vertritt — beziehlich darstellenden Reihen. Setzt man nun in (F_2) an Stelle der genannten np-fach unendlichen Reihe das Product dieser n Thetafunctionen ein, so erhält man schliesslich die folgende Hauptformel:

$$(\theta)\qquad (r^n s)^p\, \vartheta(\!(ru^{(1)})\!)\, \vartheta(\!(ru^{(2)})\!) \ldots \vartheta(\!(ru^{(n)})\!)$$

$$= \sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,r-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(1)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(1)}}{r} \end{bmatrix}(\!(rv^{(1)})\!)\, \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(2)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(2)}}{r} \end{bmatrix}(\!(rv^{(2)})\!) \ldots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(n)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(n)}}{r} \end{bmatrix}(\!(rv^{(n)})\!),$$

bei welcher die Summation in der Weise auszuführen ist, dass jede der $2np$ in den linearen Formen:

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}_\mu^{(1)} &= c_{11}\alpha_\mu^{(1)} + c_{12}\alpha_\mu^{(2)} + \ldots + c_{1n}\alpha_\mu^{(n)}, & \bar{\beta}_\mu^{(1)} &= c_{11}\beta_\mu^{(1)} + c_{12}\beta_\mu^{(2)} + \ldots + c_{1n}\beta_\mu^{(n)},\\
\bar{\alpha}_\mu^{(2)} &= c_{21}\alpha_\mu^{(1)} + c_{22}\alpha_\mu^{(2)} + \ldots + c_{2n}\alpha_\mu^{(n)}, & \bar{\beta}_\mu^{(2)} &= c_{21}\beta_\mu^{(1)} + c_{22}\beta_\mu^{(2)} + \ldots + c_{2n}\beta_\mu^{(n)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\bar{\alpha}_\mu^{(n)} &= c_{n1}\alpha_\mu^{(1)} + c_{n2}\alpha_\mu^{(2)} + \ldots + c_{nn}\alpha_\mu^{(n)}, & \bar{\beta}_\mu^{(n)} &= c_{n1}\beta_\mu^{(1)} + c_{n2}\beta_\mu^{(2)} + \ldots + c_{nn}\beta_\mu^{(n)},
\end{aligned}$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

vorkommenden Grössen α, β unabhängig von den anderen die Werthe $0, 1, \ldots, r-1$ annimmt. Da ferner die Grössen u und v nur den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
ru_\mu^{(1)} &= c_{11}v_\mu^{(1)} + c_{21}v_\mu^{(2)} + \ldots + c_{n1}v_\mu^{(n)},\\
ru_\mu^{(2)} &= c_{12}v_\mu^{(1)} + c_{22}v_\mu^{(2)} + \ldots + c_{n2}v_\mu^{(n)}, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
ru_\mu^{(n)} &= c_{1n}v_\mu^{(1)} + c_{2n}v_\mu^{(2)} + \ldots + c_{nn}v_\mu^{(n)},
\end{aligned}$$

zu genügen haben, im Übrigen aber vollständig willkürlich gewählt werden dürfen, so kann man in der gewonnenen Formel (θ) die Grössen v als unabhängige Veränderliche betrachten, und es vertreten dann die Grössen u die durch die soeben aufgestellten Gleichungen definirten linearen Functionen derselben. Der Werth von s endlich hängt, da s die Anzahl der nach dem Modul r incongruenten Lösungen des früher aufgestellten Congruenzensystems (C_0) bezeichnet, von den Werthen der Grössen c ab und muss in jedem Falle besonders bestimmt werden.

3.

Die gewonnene Formel (θ) ist einer bedeutenden Verallgemeinerung fähig. Um zu derselben zu gelangen, lasse man auf der rechten Seite dieser Formel die Systeme:

$$(rv^{(1)}), \ldots, (rv^{(n)}) \text{ übergehen in } \left(rv^{(1)} + \left|\begin{matrix}\rho^{(1)}\\ \sigma^{(1)}\end{matrix}\right|\right), \ldots, \left(rv^{(n)} + \left|\begin{matrix}\rho^{(n)}\\ \sigma^{(n)}\end{matrix}\right|\right),$$

indem man unter $\rho_1^{(1)}, \ldots, \rho_p^{(1)}; \ldots; \rho_1^{(n)}, \ldots, \rho_p^{(n)}; \sigma_1^{(1)}, \ldots, \sigma_p^{(1)}; \ldots; \sigma_1^{(n)}, \ldots, \sigma_p^{(n)}$ beliebige ganze Zahlen versteht; es gehen dann gleichzeitig die auf der linken Seite stehenden Systeme:

$$(ru^{(1)}), \ldots, (ru^{(n)}) \text{ über in } \left(ru^{(1)} + \left|\begin{matrix}\dfrac{\bar{\bar\rho}^{(1)}}{r}\\[2mm] \dfrac{\bar{\bar\sigma}^{(1)}}{r}\end{matrix}\right|\right), \ldots, \left(ru^{(n)} + \left|\begin{matrix}\dfrac{\bar{\bar\rho}^{(n)}}{r}\\[2mm] \dfrac{\bar{\bar\sigma}^{(n)}}{r}\end{matrix}\right|\right)$$

wenn man allgemein, d. h. für $\mu = 1, 2, \ldots, p$:

$$\begin{array}{ll}
c_{11}\rho_\mu^{(1)} + c_{21}\rho_\mu^{(2)} + \ldots + c_{n1}\rho_\mu^{(n)} = \overline{\overline{\rho}}_\mu^{(1)}, & c_{11}\sigma_\mu^{(1)} + c_{21}\sigma_\mu^{(2)} + \ldots + c_{n1}\sigma_\mu^{(n)} = \overline{\overline{\sigma}}_\mu^{(1)}, \\
c_{12}\rho_\mu^{(1)} + c_{22}\rho_\mu^{(2)} + \ldots + c_{n2}\rho_\mu^{(n)} = \overline{\overline{\rho}}_\mu^{(2)}, & c_{12}\sigma_\mu^{(1)} + c_{22}\sigma_\mu^{(2)} + \ldots + c_{n2}\sigma_\mu^{(n)} = \overline{\overline{\sigma}}_\mu^{(2)}, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
c_{1n}\rho_\mu^{(1)} + c_{2n}\rho_\mu^{(2)} + \ldots + c_{nn}\rho_\mu^{(n)} = \overline{\overline{\rho}}_\mu^{(n)}, & c_{1n}\sigma_\mu^{(1)} + c_{2n}\sigma_\mu^{(2)} + \ldots + c_{nn}\sigma_\mu^{(n)} = \overline{\overline{\sigma}}_\mu^{(n)},
\end{array}$$

setzt, und man erhält, wenn man auf die rechte Seite der so entstandenen Gleichung die Formel (D), auf die linke die Formel (A) des Art. 1 anwendet und unter Berücksichtigung der Relationen:

$$\frac{1}{r^2}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\overline{\overline{\rho}}_\mu^{(\nu)}\overline{\overline{\rho}}_{\mu'}^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\rho_\mu^{(\nu)}\rho_{\mu'}^{(\nu)}, \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\overline{\overline{\rho}}_\mu^{(\nu)}u_\mu^{(\nu)} = r\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\rho_\mu^{(\nu)}v_\mu^{(\nu)}, \qquad \frac{1}{r^2}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\overline{\overline{\rho}}_\mu^{(\nu)}\overline{\overline{\sigma}}_\mu^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\rho_\mu^{(\nu)}\sigma_\mu^{(\nu)}$$

die den beiden Seiten gemeinsamen Exponentialfactoren durch Division entfernt, die allgemeinere Formel:

$$(\theta') \qquad (r^n s)^p\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\overline{\overline{\rho}}^{(1)}}{r}\\ \frac{\overline{\overline{\sigma}}^{(1)}}{r}\end{bmatrix}(\!(ru^{(1)})\!)\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\overline{\overline{\rho}}^{(n)}}{r}\\ \frac{\overline{\overline{\sigma}}^{(n)}}{r}\end{bmatrix}(\!(ru^{(n)})\!)$$

$$= \sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,r-1}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\overline{\alpha}^{(1)}}{r}\\ \frac{\overline{\beta}^{(1)}}{r}\end{bmatrix}(\!(rv^{(1)})\!)\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\overline{\alpha}^{(n)}}{r}\\ \frac{\overline{\beta}^{(n)}}{r}\end{bmatrix}(\!(rv^{(n)})\!)\,e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\overline{\alpha}_\mu^{(\nu)}\sigma_\mu^{(\nu)} - \overline{\beta}_\mu^{(\nu)}\rho_\mu^{(\nu)})}$$

Lässt man jetzt weiter auf der rechten Seite dieser letzten Formel die Systeme:

$$(rv^{(1)}),\ \ldots,\ (rv^{(n)}) \text{ übergehen in } \left(rv^{(1)} + \left|\begin{matrix}\frac{\gamma^{(1)}}{r}\\ \frac{\delta^{(1)}}{r}\end{matrix}\right|\right),\ \ldots,\ \left(rv^{(n)} + \left|\begin{matrix}\frac{\gamma^{(n)}}{r}\\ \frac{\delta^{(n)}}{r}\end{matrix}\right|\right),$$

indem man unter $\gamma_1^{(1)}, \ldots, \gamma_p^{(1)}; \ldots; \gamma_1^{(n)}, \ldots, \gamma_p^{(n)}; \delta_1^{(1)}, \ldots, \delta_p^{(1)}; \ldots; \delta_1^{(n)}, \ldots, \delta_p^{(n)}$ zunächst beliebige ganze Zahlen versteht, so gehen dadurch die auf der linken Seite stehenden Systeme:

$$(ru^{(1)}), \ldots, (ru^{(n)}) \text{ über in } \left(ru^{(1)} + \begin{vmatrix} \frac{\gamma'^{(1)}}{r} \\ \frac{\delta'^{(1)}}{r} \end{vmatrix}\right), \ldots, \left(ru^{(n)} + \begin{vmatrix} \frac{\gamma'^{(n)}}{r} \\ \frac{\delta'^{(n)}}{r} \end{vmatrix}\right),$$

wenn man allgemein, d. h. für $\mu = 1, 2, \ldots, p$:

$$\begin{array}{ll} c_{11}\gamma_\mu^{(1)} + c_{21}\gamma_\mu^{(2)} + \cdots + c_{n1}\gamma_\mu^{(n)} = r\gamma_\mu'^{(1)}, & c_{11}\delta_\mu^{(1)} + c_{21}\delta_\mu^{(2)} + \cdots + c_{n1}\delta_\mu^{(n)} = r\delta_\mu'^{(1)}, \\ c_{12}\gamma_\mu^{(1)} + c_{22}\gamma_\mu^{(2)} + \cdots + c_{n2}\gamma_\mu^{(n)} = r\gamma_\mu'^{(2)}, & c_{12}\delta_\mu^{(1)} + c_{22}\delta_\mu^{(2)} + \cdots + c_{n2}\delta_\mu^{(n)} = r\delta_\mu'^{(2)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_{1n}\gamma_\mu^{(1)} + c_{2n}\gamma_\mu^{(2)} + \cdots + c_{nn}\gamma_\mu^{(n)} = r\gamma_\mu'^{(n)}, & c_{1n}\delta_\mu^{(1)} + c_{2n}\delta_\mu^{(2)} + \cdots + c_{nn}\delta_\mu^{(n)} = r\delta_\mu'^{(n)}, \end{array}$$

setzt. Die Änderungen, welche auf diese Weise die Systeme (ru), (rv) erfahren haben, kann man nun mit Hülfe der Formel (A) des Art. 1 durch entsprechende Änderungen der Charakteristiken unter Hinzufügung von Exponentialgrössen wieder wegschaffen. Stellt man dann die Bedingung, dass die auf der linken Seite entstehenden Charakteristiken denselben Typus besitzen wie die auf der rechten Seite auftretenden, d. h. dass ihre sämmtlichen Elemente sich in die Form von Brüchen mit dem gemeinsamen Nenner r und ganzzahligen Zählern bringen lassen, so müssen die Grössen γ', δ' ganze Zahlen sein. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ist aber, dass die ganzen Zahlen γ, δ die Eigenschaft besitzen, dass jedes der p, den Werthen $\mu = 1, 2, \ldots, p$ entsprechenden Systeme $\gamma_\mu^{(1)}, \gamma_\mu^{(2)}, \ldots, \gamma_\mu^{(n)}$, und ebenso jedes der p Systeme $\delta_\mu^{(1)}, \delta_\mu^{(2)}, \ldots, \delta_\mu^{(n)}$ eine Lösung des Congruenzensystems:

$$\begin{array}{l} c_{11}x^{(1)} + c_{21}x^{(2)} + \cdots + c_{n1}x^{(n)} \equiv 0 \pmod r, \\ c_{12}x^{(1)} + c_{22}x^{(2)} + \cdots + c_{n2}x^{(n)} \equiv 0 \pmod r, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_{1n}x^{(1)} + c_{2n}x^{(2)} + \cdots + c_{nn}x^{(n)} \equiv 0 \pmod r, \end{array}$$

ist, und es sollen die bis jetzt noch beliebigen ganzen Zahlen γ, δ von nun an dieser Bedingung unterworfen sein. Dann ist aber jedes der p, den Werthen $\mu = 1, 2, \ldots, p$ entsprechenden Systeme $\gamma_\mu'^{(1)}, \gamma_\mu'^{(2)}, \ldots, \gamma_\mu'^{(n)}$, und ebenso jedes der p Systeme $\delta_\mu'^{(1)}, \delta_\mu'^{(2)}, \ldots, \delta_\mu'^{(n)}$ eine Lösung des in Art. 2 aufgestellten Congruenzensystems (C_0). Wendet man jetzt, nachdem die γ, δ der angeführten Bedingung unterworfen sind, auf die linke wie rechte Seite der in angegebener Weise geänderten Gleichung (θ') die Formel (A) des Art. 1 an und entfernt unter Berücksichtigung der Relationen:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \gamma_\mu'^{(\nu)} \gamma_{\mu'}'^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \gamma_\mu^{(\nu)} \gamma_{\mu'}^{(\nu)}, \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \gamma_\mu'^{(\nu)} u_\mu^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \gamma_\mu^{(\nu)} v_\mu^{(\nu)}, \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \gamma_\mu'^{(\nu)} \delta_\mu'^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \gamma_\mu^{(\nu)} \delta_\mu^{(\nu)}$$

die den beiden Seiten gemeinsamen Exponentialfactoren durch Division, so erhält man schliesslich die Formel:

$$(\theta'') \quad (r^n s)^p \vartheta \begin{bmatrix} \dfrac{\bar{\bar{\rho}}^{(1)} + \gamma'^{(1)}}{r} \\ \dfrac{\bar{\bar{\sigma}}^{(1)} + \delta'^{(1)}}{r} \end{bmatrix} (\!(ru^{(1)})\!) \ldots \vartheta \begin{bmatrix} \dfrac{\bar{\bar{\rho}}^{(n)} + \gamma'^{(n)}}{r} \\ \dfrac{\bar{\bar{\sigma}}^{(n)} + \delta'^{(n)}}{r} \end{bmatrix} (\!(ru^{(n)})\!)\, e^{-\frac{2\pi i}{r^2} \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \gamma_\mu'^{(\nu)} \bar{\bar{\sigma}}_\mu^{(\nu)}}$$

$$= \sum_{\alpha, \beta}^{0,1,\ldots,r-1} \vartheta \begin{bmatrix} \dfrac{\bar{\alpha}^{(1)} + \gamma^{(1)}}{r} \\ \dfrac{\bar{\beta}^{(1)} + \delta^{(1)}}{r} \end{bmatrix} (\!(rv^{(1)})\!) \ldots \vartheta \begin{bmatrix} \dfrac{\bar{\alpha}^{(n)} + \gamma^{(n)}}{r} \\ \dfrac{\bar{\beta}^{(n)} + \delta^{(n)}}{r} \end{bmatrix} (\!(rv^{(n)})\!)\, e^{-\frac{2\pi i}{r^2} \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \gamma_\mu^{(\nu)} \bar{\beta}_\mu^{(\nu)}}$$

$$\times e^{\frac{2\pi i}{r} \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \left(\bar{\alpha}_\mu^{(\nu)} \sigma_\mu^{(\nu)} - \bar{\beta}_\mu^{(\nu)} \rho_\mu^{(\nu)}\right)}$$

Diese Formel umfasst die Formeln (θ), (θ') als specielle Fälle und ist zugleich die allgemeinste derartige Formel.

Die auf der rechten Seite der Gleichung (θ'') als Summanden auftretenden r^{2np} Thetaproducte können in $\frac{r^{2np}}{s^{2p}}$ Gruppen geordnet werden, indem man zu einer Gruppe jedesmal diejenigen Thetaproducte, immer s^{2p} an der Zahl, zusammenfasst, für welche sich die Werthe der $2np$ Grössen $\frac{\bar{\alpha}_\mu^{(\nu)}}{r}$, $\frac{\bar{\beta}_\mu^{(\nu)}}{r}$ nur um ganze Zahlen ändern, wenn man von einem dieser s^{2p} Thetaproducte zu einem anderen derselben übergeht. Man zeigt dann leicht, dass die s^{2p} in einer Gruppe vorkommenden Thetaproducte denselben Werth besitzen, und kann daher in obiger Summe jede solche Gruppe von Summanden durch das s^{2p}-fache eines beliebigen Summanden ersetzen. Führt man diese Vereinigung für jede der $\frac{r^{2np}}{s^{2p}}$ Gruppen aus, so geht die rechte Seite der Gleichung (θ'') in das s^{2p}-fache einer Summe von $\frac{r^{2np}}{s^{2p}}$ wesentlich verschiedenen, d. h. durch Anwendung der Formeln (B) des Art. 1 nicht auf einander reducirbaren, Thetaproducten über. Man erkennt auch leicht, dass die Formel (θ'') nichts von ihrer Allgemeinheit verliert, wenn man sämmtliche Grössen ρ, σ der Null gleich setzt, oder wenn man bei unbeschränkter Veränderlichkeit der ganzen Zahlen ρ, σ für die Grössen γ, δ, die im Übrigen stets den aufgestellten Bedingungen zu genügen haben, nur Zahlen aus der Reihe 0, 1, ..., $r-1$ zulässt.

Würzburg, im Januar 1883.