NOTE
SUR CERTAINES
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

PAR

ADOLPH STEEN

À COPENHAGUE.

1. Soit proposée l'équation différentielle de l'ordre n

$$f(x,\ y,\ n,\ p) = 0, \tag{1}$$

dont le premier membre se réduit à

$$f(x,\ y,\ n,\ n) = y^{(n)} - \frac{ax^n}{[n-1]}\, y^{(n-1)} = 0,$$

lorsque $p = n$, tandis qu'en supposant des p entier et plus grand que n il contient une suite de termes, représentée par

$$\sum_{r=2}^{r=n}(-1)^r \frac{(p-n)(p-n+1)\ldots.(p-n+r-2)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\ldots\,.\,r-1}\, \frac{ax^{n-r}}{[n-r]}\, y^{(n-r)}. \tag{2}$$

Cette équation jouit de la propriété remarquable de ne pas changer essentiellement de forme par des différentiations successives. C'est ce qui se voit par la différentiation des deux termes consécutifs contenant $x^{n-r+1}y^{(n-r+1)}$ et $x^{n-r}y^{(n-r)}$ en tant qu'elle contribue à former le terme général de la nouvelle équation, savoir

$$(-1)^r \frac{(p-n+1)(p-n)\ldots.(p-n+r-3)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,.\,r-1}\, \frac{ax^{n-r}}{[n-r]}\, y^{(n-r+1)},$$

qui provient aussi du terme général de la proposée par le changement de p en $p - 1$, de y en y'. *Donc en différentiant l'équation* (1) *on trouve*

$$f(x,\ y',\ n,\ p-1) = 0. \tag{3}$$

De même par $p - n$ différentiations on parvient à

$$f(x,\ y^{(p-n)},\ n,\ n) = y^{(p)} - \frac{ax^{n-1}}{[n-1]}\, y^{(p-1)} = 0, \tag{4}$$

en supposant seulement que p soit plus grand que $n - 1$.

Or l'intégration de l'équation (1) dépend de celle de l'équation (4), pour laquelle on trouve

$$y^{(p-1)} = 0 \text{ et } y^{(p-1)} = c_p e^{\frac{ax^n}{1.2\ldots n}},$$

on a par suite

$$y = c_1 + c_2 x + \ldots . + c_{p-1} x^{p-1} \text{ et } y = c_p \int^{p-1} e^{\frac{ax^n}{1.2\ldots n}}\, dx^{p-1}, \tag{5}$$

ce qui donne l'intégrale complète de la proposée, si $p = n$. Pour des valeurs plus grandes de p elle contient $p - n$ constantes de trop. On en réduit le nombre au moyen des conditions à remplir, pour que la première intégrale particulière (5) rende la proposée identique. Ainsi par exemple l'équation

$$f(x,\ y,\ 3,\ 7) = 0$$

a les intégrales particulières

$$y = x^4 + \frac{4x}{a},\ y = x^5 + \frac{20x^2}{a},\ y = \int\int e^{\frac{1}{6}ax^3}\, dx^2.$$

C'est pour traiter la première intégrale (5) à part, que nous l'avons séparée de la dernière, à laquelle les constantes arbitraires de l'intégration l'auraient attachée.

2. Pour des valeurs de p depuis 0 jusqu'à $n - 1$ les derniers termes de la suite (2) du premier membre de la proposée s'évanouissent, dès

que $n - r = p - 2$, et de plus les termes restants peuvent être transformés en

$$(6)\qquad -\sum_{r=2}^{r=n-p+1} \frac{(n-p)(n-p+1)\ldots.(n-p-r+2)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,r-1} \frac{ax^{n-r}}{[n-r]}.$$

Mais cette transformation n'affecte en rien la démonstration de la propriété, que nous venons de reconnaître. Seulement il faut faire de cette propriété un autre emploi que plus haut. La proposée étant une intégrale première de l'équation (3), une nouvelle intégration donnera

$$f(x,\ y^{(-1)},\ n,\ p+1) = c_n,$$

et ainsi de suite, de sorte qu'après $n-p$ intégrations on parvient à

$$(7)\qquad f(x,\ y^{(-n+p)},\ n,\ n) = c_{p+1} + c_{p+2}x + \ldots. + c_n x^{n-p-1}.$$

L'intégrale de cette équation étant

$$y^{(p-1)} = e^{\frac{ax^n}{1.2\ldots n}}\left(c_p + \int e^{\frac{-ax^n}{1.2\ldots n}}(c_{p+1} + c_{p+2}x + \ldots. + c_n x^{n-p-1})\,dx\right),$$

l'équation (1) sera donc dans ce cas complètement integrée par

$$y = c_1 + c_2 x + \ldots. + c_{p-1}x^{p-2} +$$

$$+ \int^{p-2} dx^{p-2} \int e^{\frac{ax^n}{1.2\ldots n}} dx\left(c_p + \int e^{\frac{-ax^n}{1.2\ldots n}}(c_{p+1} + c_{p+2}x\ \ldots. + c_n x^{n-p-1})\,dx\right).$$

Remarquons par exemple que, p étant l'unité, l'équation

$$f(x,\ y,\ n,\ 1) = 0$$

a l'intégrale complète

$$(8)\qquad y = e^{\frac{ax^n}{1.2\ldots n}}\left(c_1 + \int e^{\frac{-ax^n}{1.2\ldots n}}(c_2 + c_3 x + \ldots. + c_n x^{n-2})\,dx\right),$$

dont nous nous servirons plus tard.

3. En dernier lieu, considérons les cas de $p = 0$ et de p entier négatif et changeons p en $-p$ dans la proposée, qui sera alors représentée par

$$(9)\qquad f(x,\ y,\ n,\ -p) = 0.$$

Le premier membre ne sera encore changé que quant à la suite (2), qui deviendra

$$-\sum_{r=2}^{r=n} \frac{(p+n)(p+n-1)\ldots(p+n-r+2)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\ldots\, r-1} \frac{ax^{n-r}}{[n-r]} y^{(n-r)}.$$

C'est donc par $p+n$ intégrations qu'il faut remonter à l'équation intégrable de la forme (7), savoir

$$f(x,\ y^{(-p-n)},\ n,\ n) = c_1 + c_2 x + \ldots + c_n x^{n-1} + \ldots + c_{p+n} x^{p+n-1}.$$

Avant d'aller plus loin, observons, qu'en faisant toutes les constantes égales à zéro nous trouvons dans ce cas de cette équation l'intégrale

$$y^{(-p-1)} = c e^{\frac{ax^n}{1.2\ldots n}},$$

par conséquent pour celle de l'équation (9)

$$(10) \qquad y = c \frac{d^{p+1} e^{\frac{ax^n}{1.2\ldots n}}}{dx^{p+1}},$$

ce qui est bien identique à la dernière intégrale (5), lorsque nous y changeons p en $-p$.

Maintenant pour arriver à l'intégrale complète de l'équation (9), il faut faire varier la constante c de l'intégrale particulière (10), puis déterminer les constantes superflues. Cependant on parvient au résultat, en verité bien simple, d'une manière beaucoup plus expéditive. Commençons par l'intégration de

$$(11) \qquad f(x,\ y,\ n,\ 0) = 0$$

au moyen de

$$f(x,\ y^{(-1)},\ n,\ -1) = 0,$$

dont l'intégrale résulte de l'expression (8) par le changement de y en $y^{(-1)}$. Donc nous en concluons l'intégrale suivante de (11)

$$y = \frac{d}{dx} e^{\frac{ax^n}{1.2\ldots n}} \left(c_1 + \int e^{\frac{-ax^n}{1.2\ldots n}} (c_2 + c_3 x + \ldots + c_n x^{n-2})\, dx\right).$$

De même on remonte successivement aux intégrales de l'équation (9) dans les cas de $p = 1, 2, 3 \ldots.$, en différentiant toujours celle qui repond à la valeur précédente de p. Partant l'intégrale complète est

$$y = \frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}} e^{\frac{ax^n}{1.2\ldots n}} \left(c_1 + \int e^{\frac{ax^n}{1.2\ldots n}} (c_2 + c_3 x + \ldots . + c_n x^{n-2})\, dx\right).$$

Donc on sait intégrer la proposée pour toutes les valeurs de p qui sont des nombres entiers.

4. L'intégrale multiple (5) transformée en intégrale définie devient

$$(12) \qquad y = \frac{1}{[p-2]} \int_k^x (x-a)^{p-2} e^{\frac{a a^n}{1.2\ldots n}}\, da,$$

étant $k^n = -\infty$. Par différentiation on en tire

$$y^{(r)} = \frac{1}{[p-r-2]} \int_k^x (x-a)^{p-r-2} e^{\frac{a a^n}{1.2\ldots n}}\, da,$$

en supposant $p > r + 1$, ce qui substitué dans la proposée, r étant 0, 1, 2 .... n, lui donnera la forme

$$\frac{1}{[p-n-1]} \int_k^x \left(p - n - 1 - \frac{a a^{n-1}}{[n-1]} (x-a)\right) (x-a)^{p-n-2} e^{\frac{a a^n}{1.2\ldots n}}\, da = 0$$

L'expression sous le signe d'intégration se réduisant à

$$e^{\frac{a a^n}{1.2\ldots n}}\, d(x-a)^{p-n-1} + (x-a)^{p-n-1}\, d e^{\frac{a a^n}{1.2\ldots n}},$$

on n'a qu'à satisfaire à la condition:

$$\left| e^{\frac{a a^n}{1.2\ldots n}} (x-a)^{p-n-1} \right|_k^x = 0.$$

Maintenant il faut et il suffit, pour obtenir une identité, qu'on ait $k^n = -\infty$ et $p > n + 1$.

Donc l'intégrale définie (12) est une intégrale particulière de la proposée pour toutes les valeurs de $p > n + 1$, même celles qui ne sont pas des nombres entiers.

5. Ajoutons enfin qu'on peut dans l'exposition précédente changer partout $\frac{ax^{n-r}}{[n-r]}$ en $X^{(r)}$, étant

$$X = ax^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

et parvenir aux mêmes résultats.