UEBER GEWISSE DURCH DIE GAMMAFUNCTION AUSDRÜCKBARE UNENDLICHE PRODUCTE.

Aus einem Brief an Herrn G. Mittag-Leffler

VON

HJALMAR MELLIN
in HELSINGFORS.

Die Gleichung

$$\frac{\Gamma^{\nu}(z)}{\Gamma(z-\rho_1 x)\Gamma(z-\rho_2 x)\cdots\Gamma(z-\rho_\nu x)}=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{x^{\nu}}{(z+n)^{\nu}}\right),$$

welche in meinem in *Acta Mathematica* Band 3 Seite 102—104 publicirten Brief vorkommt, kann noch auf folgende Weise verallgemeinert werden.

Ist $R(x)$ eine beliebige ganze rationale Function, welche der Bedingung

$$R(0)=0$$

genügt, bezeichnet ferner α_1 den Coefficienten der ersten Potenz von x in $R(x)$:

$$R(x)=\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_\nu x^{\nu},$$

und bildet man das Product

$$\left(1+R\left(\frac{x}{z}\right)\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+R\left(\frac{x}{z+n}\right)\right)e^{-\alpha_1\frac{x}{n}},$$

so hat dieses für jeden Werth von x und jeden von z, der nicht gleich $0, -1, -2, \ldots$ ist, einen bestimmten endlichen Werth, und es ist

$$\frac{\Gamma^{\nu}(z)}{\Gamma(z-\rho_1 x)\Gamma(z-\rho_2 x)\cdots\Gamma(z-\rho_\nu x)} = e^{C\alpha_1 x}\left(1+R\left(\frac{x}{z}\right)\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+R\left(\frac{x}{z+n}\right)\right)e^{-\alpha_1\frac{x}{n}},$$

$$(C = 0{,}577\ldots)$$

wo $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ die Wurzeln der Gleichung

$$\rho^{\nu}\left(1+R\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) = \rho^{\nu} + \alpha_1\rho^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu = 0$$

bezeichnen.

Es scheint mir, dass diese Gleichung an die Seite der Gleichung

$$\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} = F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\underline{|2}\,\gamma(\gamma+1)} + \ldots$$

gestellt werden kann: durch diese werden gewisse unendliche Reihen, durch jene gewisse unendliche Producte bestimmt.

Die erwähnte Gleichung ergiebt sich auf folgende Weise. Weil $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ die Wurzeln der Gleichung

$$\rho^{\nu}\left(1+R\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) = \rho^{\nu} + \alpha_1\rho^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu = 0$$

bezeichnen, so ist

$$\left(\frac{z+n}{x}\right)^{\nu}\left(1+R\left(\frac{x}{z+n}\right)\right) = \left(\frac{z+n}{x} - \rho_1\right)\left(\frac{z+n}{x} - \rho_2\right)\cdots\left(\frac{z+n}{x} - \rho_\nu\right)$$

$$= \left(\frac{n}{x}\right)^{\nu}\left(1+\frac{z-\rho_1 x}{n}\right)\left(1+\frac{z-\rho_2 x}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{z-\rho_\nu x}{n}\right),$$

und mithin

$$1+R\left(\frac{x}{z+n}\right) = \frac{\left(1+\frac{z-\rho_1 x}{n}\right)\left(1+\frac{z-\rho_2 x}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{z-\rho_\nu x}{n}\right)}{\left(1+\frac{z}{n}\right)^{\nu}}$$

Hieraus folgt, weil $-\alpha_1 = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_\nu$ ist,

$$\left(1 + R\left(\frac{x}{z}\right)\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + R\left(\frac{x}{z+n}\right)\right)e^{-\alpha_1\frac{x}{n}}$$

$$= e^{-C\alpha_1 x}\frac{e^{-\nu C z}}{z^\nu\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^\nu e^{-\frac{\nu z}{n}}}\cdot\frac{(z-\rho_1 x)\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-\rho_1 x}{n}\right)e^{-\frac{z-\rho_1 x}{n}}}{e^{-C(z-\rho_1 x)}}\cdots$$

$$\cdots\frac{(z-\rho_\nu x)\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-\rho_\nu x}{n}\right)e^{-\frac{z-\rho_\nu x}{n}}}{e^{-C(z-\rho_\nu x)}},$$

welche gerade die in Frage stehende Gleichung ist.

Bezeichnet man die logarithmische Ableitung von $\Gamma(z)$ durch $\psi(z)$, so können noch folgende Gleichungen aufgestellt werden:

$$\frac{\Gamma^\nu(z)}{\Gamma(z-\rho_1 x)\Gamma(z-\rho_2 x)\ldots\Gamma(z-\rho_\nu x)} = e^{-\alpha_1\psi(z)x}\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 + R\left(\frac{x}{z+n}\right)\right)e^{-\alpha_1\frac{x}{z+n}},$$

$$\frac{\Gamma^\nu(z)}{\Gamma(z-\rho_1 x)\Gamma(z-\rho_2 x)\ldots\Gamma(z-\rho_\nu x)} = e^{-\sum\limits_{s=1}^{s=\nu}(-1)^{s-1}\alpha_s\frac{\psi^{(s-1)}(z)}{\lfloor s-1}x^s}\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 + R\left(\frac{x}{z+n}\right)\right)e^{-R\left(\frac{x}{z+n}\right)}.$$