SUR L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TROISIÈME ORDRE

DES SYSTÈMES ORTHOGONAUX

PAR

GASTON DARBOUX

à PARIS.

On sait que si

$$\rho = \varphi(x, y, z)$$

est l'équation d'une famille de surfaces, la condition nécessaire et suffisante pour que cette famille fasse partie d'un système triple orthogonal s'exprime par une équation aux dérivées partielles du troisième ordre à laquelle doit satisfaire le paramètre ρ considéré comme fonction de x, y, z. Je me propose de montrer que la théorie de LAMÉ conduit à un moyen rapide de former cette équation et même de l'écrire avec un système de variables quelconques.

Soient ρ, ρ_1, ρ_2 les paramètres de trois familles de surfaces orthogonales; les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point de l'espace considérées comme fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2 donneront naissance à l'équation

$$(1) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2.$$

Il résulte immédiatement de la théorie de LAMÉ que si l'on considère l'équation linéaire

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_2} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \rho_1} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_2}$$

elle admettra les solutions particulières

$$\theta = H, \qquad \theta = x, \qquad \theta = y, \qquad \theta = z, \qquad \theta = x^2 + y^2 + z^2.$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante.

Il existe une équation linéaire du second ordre à laquelle satisfont les solutions particulières

$$1, \; H, \; x, \; y, \; z, \; x^2 + y^2 + z^2$$

et qui jouit de plus de la propriété que, si elle admet une solution u, elle admet aussi la solution $u\varphi(\rho)$, $\varphi(\rho)$ désignant une fonction quelconque de ρ. Elle admettra donc également les solutions

$$\rho, \; \rho x, \; \rho y, \; \rho z.$$

Cette remarque permet de former immédiatement l'équation quand on choisit x, y, z comme variables indépendantes au lieu de ρ, ρ_1, ρ_2.

En effet l'équation en θ prendra évidemment la forme

$$A\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + A'\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + A''\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} + 2B\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} + 2B'\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z} + 2B''\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}$$

$$+ 2C\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2C'\frac{\partial\theta}{\partial y} + 2C''\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0.$$

En exprimant qu'elle admet les 8 solutions

$$x, \; y, \; z, \; \rho, \; \rho x, \; \rho y, \; \rho z, \; x^2 + y^2 + z^2$$

on obtient les équations de condition

$$C = C' = C'' = 0$$

$$A\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + A'\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} + A''\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2} + 2B\frac{\partial^2\rho}{\partial y\partial z} + 2B'\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial z} + 2B''\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y} = 0$$

$$A\frac{\partial\rho}{\partial x} + B'\frac{\partial\rho}{\partial z} + B''\frac{\partial\rho}{\partial y} = 0$$

$$A'\frac{\partial\rho}{\partial y} + B\frac{\partial\rho}{\partial z} + B''\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0$$

$$A''\frac{\partial\rho}{\partial z} + B\frac{\partial\rho}{\partial y} + B'\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0$$

$$A + A' + A'' = 0$$

qui déterminent les rapports mutuels des coefficients. L'équation en θ est donc, sous la forme d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} & \frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\rho}{\partial z^2} & \frac{\partial^2\rho}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial\rho}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial\rho}{\partial z} & \frac{\partial\rho}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial\rho}{\partial y} & 0 & \frac{\partial\rho}{\partial z} & 0 & \frac{\partial\rho}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial\rho}{\partial z} & \frac{\partial\rho}{\partial y} & \frac{\partial\rho}{\partial x} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Il suffit de remplacer θ par la 9$^{\text{e}}$ solution

$$\theta = H = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2}}$$

pour retrouver l'équation du troisième ordre à laquelle satisfait ρ.

Prenons maintenant comme variables indépendantes x, y, ρ. L'équation en θ sera de la forme

$$a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + a'\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + a''\frac{\partial^2\theta}{\partial \rho^2} + 2b\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial\rho} + 2b'\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial\rho} + 2b''\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}$$
$$+ 2c\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2c'\frac{\partial\theta}{\partial y} + 2c''\frac{\partial\theta}{\partial\rho} = 0.$$

En écrivant qu'elle admet les solutions particulières

$$x,\ y,\ \rho,\ x\rho,\ y\rho,\ \varphi(\rho)$$

on voit qu'elle se réduit à la forme très simple

$$a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + a'\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + 2b''\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} = 0.$$

Les rapports mutuels de a, a', b'' se déterminent par la condition que l'équation précédente admette les deux solutions nouvelles

$$z, \quad x^2 + y^2 + z^2$$

et si l'on désigne, suivant l'usage, par p, q, r, s, t les dérivées de z considerée comme fonction de x et de y on trouve

$$[s(1+q^2) - tpq]\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}[t(1+p^2) - r(1+q^2)] + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}[rpq - s(1+p^2)] = 0$$

pour la forme définitive de l'équation en θ.

La neuvième solution particulière $\theta = H$ de cette équation a, dans ce cas, pour expression

$$H = \frac{\frac{\partial z}{\partial \rho}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

En écrivant qu'elle vérifie l'équation précédente, on retrouvera l'équation du troisième ordre des systèmes orthogonaux, sous la forme élégante que nous devons à M. Maurice Lévy.