

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE LAGE DER
BRENNLINIEN EINES UNENDLICH DÜNNEN STRAHLENBÜNDELS
GEGENEINANDER UND GEGEN EINEN HAUPTSTRAHL
VON
LUDWIG MATTHIESSEN
in ROSTOCK.

Unter einer Brennlinie eines Strahlenbündels versteht man im Allgemeinen eine Gerade, welche sämtliche Strahlen des Bündels schneidet. Im Besonderen findet dieser Begriff Anwendung auf unendlich dünne Strahlenbündel, wenn es sich um die Betrachtung der Umhüllungsfläche sämtlicher Normalen eines unendlich kleinen Elements einer krummen Oberfläche oder der Form eines in einer continuirlich gekrümmten Fläche gebrochenen homocentrischen optischen Strahlenbündels handelt. STURM und KUMMER haben das Theorem aufgestellt, dass immer entweder zwei reelle oder zwei complexe Brennlinsen existiren und dass dieselben senkrecht auf dem Hauptstrahle des Bündels stehen. Neuerdings ist mehrfach darauf hingewiesen, dass dies Theorem streng keine allgemeine Gültigkeit haben könne, da schon von REUSCH (POGG. ANN. Bd. 130, S. 497 [1867]) gezeigt worden sei, dass, wenn man die Form eines an einer sphärischen Fläche gebrochenen oder gespiegelten homocentrischen Strahlenbündels betrachtet, man eine zur Axe des Bündels schiefe Brennlinsen erhält. ZECH zieht hieraus (SCHLÖMILCH, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 24 S. 168 [1879]) die Vermuthung, dass drei Strahlen zur Bestimmung der Brennlinsen eines dünnen Strahlenbündels nicht genügen, weil auch noch der Winkel derselben mit der Axe zu bestimmen übrig bleibe. Er untersucht deshalb

ein Strahlenbündel, welches durch seine Axe und irgend zwei diese Axe schneidende Gerade als Brennlinsen bestimmt ist, wenn noch eine unendlich kleine geschlossene Kurve, deren Mittelpunkt auf der Axe liegt, als Leitlinie gegeben ist. ZECH bemerkt mit Bezugnahme auf STEINER's Untersuchungen (*Systematische Entwicklung der Abhängigkeit* u. s. w. S. 253) dass Strahlenfächer, die auf einem einfachen Hyperboloide liegen, beliebig viele Brennlinsen haben können und ferner, dass, wenn die Leitlinie ein Kegelschnitt ist, die zu zwei Brennlinsen gehörige Kegelfläche so wie jeder Schnitt derselben mit einer beliebigen Ebene vom vierten Grade sei. Hieraus folgt, dass unendlich dünne Strahlenbündel Brennlinsen haben, welche mit dem Hauptstrahl im Allgemeinen beliebige spitze Winkel bilden. In einer späteren Abhandlung (Sitzungsber. d. math. u. phys. Kl. d. k. bayer. Akad. d. Wiss. 1883, H. 1) ist von mir gezeigt worden, wie man den Ort und die Lage der Brennlinsen eines dünnen Strahlenbündels berechnen kann, welches von sämtlichen Normalen eines unendlich kleinen Elements einer krummen Oberfläche z. B. der MALUS'schen Wellenfläche eines gebrochenen optischen Strahlenbündels gebildet wird. Für ein compactes Strahlenbündel d. h. ein solches, welches aus lauter Strahlenfächern zusammengesetzt ist, existiren im Allgemeinen immer nur zwei Brennlinsen, welche sich in folgender Weise geometrisch characterisiren lassen. Jede krumme Fläche hat im Allgemeinen zwei Krümmungsmittelpunctsflächen, die in jeder Normale auf einander senkrecht stehen, also Orthogonalflächen sind. Die durch die beiden Hauptnormalschnitte und die Normale eines Flächenelements bestimmten Ebenen nennt KUMMER die Focalebenen; die I. Focalebene tangirt die II. Krümmungsmittelpunctsfläche in der II. Brennlinie; die II. Focalebene tangirt die I. Krümmungsmittelpunctsfläche in der I. Brennlinie. Die I. Focalebene trifft die I. Brennlinie im I. Brennpuncte und ebenso trifft die II. Focalebene die II. Brennlinie im II. Brennpuncte. Die Schnittlinie der beiden Focalebenen ist der Hauptstrahl oder die Axe des Strahlenbündels. Es ist ferner bekannt, dass der geometrische Ort der Krümmungsmittelpuncte eines jeden der beiden Hauptnormalschnitte den Namen »Rückkehrkante« führt. Man kann also auch sagen: die I. Focalebene tangirt den geometrischen Ort aller Rückkehrkanten der nebeneinanderliegenden II. Hauptnormalschnitte eines Flächenelementes in der II. Brennlinie; die II. Focalebene tangirt den geometrischen Ort aller Rückkehrkanten der

nebeneinanderliegenden I. Hauptnormalschnitte in der I. Brennlinie. Es ergibt sich nun unmittelbar aus diesen Thatsachen, dass zwar die Brennlinien in zwei aufeinander senkrechten Ebenen, den beiden Focalebeneu liegen, damit aber keineswegs die Neigung der Brennlinien gegen den Hauptstrahl bestimmt ist, und hierin liegt eben die irrige Anschauung STURM's von der tetraedrischen Gestaltung eines astigmatischen Strahlenbündels, indem er annimmt oder vielmehr den Beweis führt, es sei diese Neigung eine senkrechte. Es gilt dies Theorem nur für einige specielle Fälle z. B. für den Scheitel eines dreiaxigen Ellipsoides.

Die Aufgabe der vorliegenden Untersuchung soll die sein; zu zeigen, dass man zur vollständigen Bestimmung des Ortes und der relativen Lage der beiden Brennlinien eines beliebigen, auch endlichen Strahlenbündels mindestens vier Strahlen kennen muss und dass alle übrigen Strahlen gewisse Bedingungen erfüllen müssen, um zu denselben Brennlinien zu gehören.

Wir gehen aus von der Betrachtung beliebiger Strahlen im Raume und beziehen ihre Gleichungen auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem. Zur Bestimmung der Constanten einer Brennlinie betrachten wir die Coordinaten ihrer Schnittpunkte mit sämtlichen Strahlen als Unbekannte. Sind n Strahlen gegeben, so lassen sich $4n$ Gleichungen mit $3n + 4$ Unbekannten aufstellen. Dieselben sind also nur dann bestimmt, wenn $n = 4$ ist. Wir haben demnach folgende sechszehn Gleichungen nach x, y, z aufzulösen:

a, die Gleichungen der Strahlen:

$$\begin{cases} x_1 + a_1 z_1 + \alpha_1 = 0, & x_2 + a_2 z_2 + \alpha_2 = 0, \\ y_1 + b_1 z_1 + \beta_1 = 0; & y_2 + b_2 z_2 + \beta_2 = 0; \\ x_3 + a_3 z_3 + \alpha_3 = 0, & x_4 + a_4 z_4 + \alpha_4 = 0, \\ y_3 + b_3 z_3 + \beta_3 = 0; & y_4 + b_4 z_4 + \beta_4 = 0. \end{cases}$$

b, die Gleichungen der Brennlinien:

$$\begin{cases} x_1 + a z_1 + \alpha = 0, & x_2 + a z_2 + \alpha = 0, \\ y_1 + b z_1 + \beta = 0; & y_2 + b z_2 + \beta = 0; \\ x_3 + a z_3 + \alpha = 0, & x_4 + a z_4 + \alpha = 0, \\ y_3 + b z_3 + \beta = 0; & y_4 + b z_4 + \beta = 0. \end{cases}$$

Damit diese Gleichungen zusammenbestehen, ist erforderlich, dass sei

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a_1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & b_1 & \beta_1 \\ 1 & 0 & a & \alpha \\ 0 & 1 & b & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_2 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & b_2 & \beta_2 \\ 1 & 0 & a & \alpha \\ 0 & 1 & b & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_3 & \alpha_3 \\ 0 & 1 & b_3 & \beta_3 \\ 1 & 0 & a & \alpha \\ 0 & 1 & b & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_4 & \alpha_4 \\ 0 & 1 & b_4 & \beta_4 \\ 1 & 0 & a & \alpha \\ 0 & 1 & b & \beta \end{vmatrix} = 0.$$

Daraus resultirt folgendes System von Bestimmungsgleichungen für a, α, b, β :

$$\begin{vmatrix} a - a_1 & \alpha - \alpha_1 \\ b - b_1 & \beta - \beta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - a_2 & \alpha - \alpha_2 \\ b - b_2 & \beta - \beta_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a - a_3 & \alpha - \alpha_3 \\ b - b_3 & \beta - \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - a_4 & \alpha - \alpha_4 \\ b - b_4 & \beta - \beta_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Elimination von $a\beta - \alpha b$ erhält man folgendes System von linearen Gleichungen bezüglich a, β, α und b :

$$\begin{vmatrix} a & \alpha_1 - \alpha_2 \\ b & \beta_1 - \beta_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & a_1 - a_2 \\ \beta & b_1 - b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ b_1 & \beta_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & \alpha_2 \\ b_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a & \alpha_1 - \alpha_3 \\ b & \beta_1 - \beta_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & a_1 - a_3 \\ \beta & b_1 - b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ b_1 & \beta_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & \alpha_3 \\ b_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a & \alpha_1 - \alpha_4 \\ b & \beta_1 - \beta_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & a_1 - a_4 \\ \beta & b_1 - b_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ b_1 & \beta_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_4 & \alpha_4 \\ b_4 & \beta_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichungen lassen sich kürzer schreiben durch

$$A_1 a + B_1 b + 1 = 0,$$

$$A_2 a + B_2 \alpha + 1 = 0,$$

$$A_3 a + B_3 \beta + 1 = 0.$$

Das vollständige System führt demnach auf eine quadratische Gleichung

$$M_1 a^2 + N_1 a + P_1 = 0.$$

Daraus ergeben sich die conjugirten Wurzelwerthe:

$$\begin{aligned} a &= m_1 \pm n_1, & b &= m_3 \pm n_3, \\ \alpha &= m_2 \pm n_2, & \beta &= m_4 \pm n_4. \end{aligned}$$

Das Strahlensystem hat also entweder zwei reelle oder zwei complexe Brennpunkte; dieselben sind im Allgemeinen zwei unter einem beliebigen Winkel sich kreuzende Gerade und ihre Gleichungen:

$$\begin{cases} x + (m_1 + n_1)z + (m_2 + n_2) = 0, \\ y + (m_3 + n_3)z + (m_4 + n_4) = 0; \\ x + (m_1 - n_1)z + (m_2 - n_2) = 0, \\ y + (m_3 - n_3)z + (m_4 - n_4) = 0. \end{cases}$$

Die Bedingung ihres Senkrechtstehens würde lauten

$$m_1^2 - n_1^2 + m_3^2 - n_3^2 + 1 = 0.$$

Für den Fall imaginärer Werthe von n_1 und n_3 würden die Brennpunkte unmöglich sein und folgeweise auch einen complexen Winkel mit einander und mit den Strahlen bilden müssen. Die Oerter der acht Brennpunkte findet man durch Auflösung des Gleichungensystemes:

$$\begin{aligned} x_i + a_i z_i + \alpha_i &= 0, \\ y_i + b_i z_i + \beta_i &= 0, \\ x_i + a z_i + \alpha &= 0, \end{aligned}$$

indem man i von 1 bis 4 schwanken lässt. Auch die Brennweiten auf den einzelnen Strahlen lassen sich leicht durch Rechnung finden; ebenso die Dimensionen der Brennpunkte.

Dass die Brennlilien im Allgemeinen schief gegeneinander stehen, erweist folgendes Zahlenbeispiel. Es sei

$$(a - 1)(\beta - 2) - (b - 3)(\alpha - 4) = 0,$$

$$(a - 2)(\beta - 5) - (b - 6)(\alpha - 1) = 0,$$

$$(a - 3)(\beta - 2) - (b - 1)(\alpha - 5) = 0,$$

$$(a - 2)(\beta - 3) - (b - 4)(\alpha - 6) = 0.$$

Die Finalgleichung ist

$$202a^2 - 861a + 89 = 0,$$

und die simultanen Wurzelwerthe

$$a' = 0,106 \qquad a'' = 4,156$$

$$b' = 5,445 \qquad b'' = 4,822$$

$$\alpha' = 2,720 \qquad \alpha'' = 5,212$$

$$\beta' = 5,502 \qquad \beta'' = 2,699.$$

Für die gegenseitige Neigung der beiden Brennlilien findet man daraus den Winkel $39^\circ 5' 40''$.

Wir wollen nunmehr diese Betrachtungen auf ein unendlich dünnes Bündel von vier Strahlen übertragen, indem wir die Grössen $a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1$ um unendlich kleine Grössen $\chi, \vartheta, \omega, \psi$ von derselben Ordnung der Kleinheit variiren. Wir setzen demgemäss voraus, es sei

$$\begin{array}{llll} a_2 = a_1 - \chi_1 & b_2 = b_1 + \vartheta_1 & \alpha_2 = \alpha_1 + \omega_1 & \beta_2 = \beta_1 - \psi_1 \\ a_3 = a_1 - \chi_2 & b_3 = b_1 + \vartheta_2 & \alpha_3 = \alpha_1 + \omega_2 & \beta_3 = \beta_1 - \psi_2 \\ a_4 = a_1 - \chi_3 & b_4 = b_1 + \vartheta_3 & \alpha_4 = \alpha_1 + \omega_3 & \beta_4 = \beta_1 - \psi_3. \end{array}$$

Das frühere System der drei linearen Gleichungen bezüglich a, b, α, β geht dadurch über in:

$$(a - a_1)\psi_1 + (b - b_1)\omega_1 + (\alpha - \alpha_1)\vartheta_1 + (\beta - \beta_1)\chi_1 + (\psi_1\chi_1 - \vartheta_1\omega_1) = 0,$$

$$(a - a_1)\psi_2 + (b - b_1)\omega_2 + (\alpha - \alpha_1)\vartheta_2 + (\beta - \beta_1)\chi_2 + (\psi_2\chi_2 - \vartheta_2\omega_2) = 0,$$

$$(a - a_1)\psi_3 + (b - b_1)\omega_3 + (\alpha - \alpha_1)\vartheta_3 + (\beta - \beta_1)\chi_3 + (\psi_3\chi_3 - \vartheta_3\omega_3) = 0.$$

Die Absolutglieder sind nun zwar unendlich kleine Grössen der II. Ordnung; es wird sich aber zeigen, dass sie selbst dann nicht gegen die vorangehenden Glieder vernachlässigt werden dürfen, wenn $a - a_1$, $b - b_1$, $\alpha - \alpha_1$ und $\beta - \beta_1$ endliche von Null verschiedene Werthe annehmen. Eliminirt man nun je zwei dieser Grössen, so wird man zu folgenden Gleichungen geführt:

$$(a - a_1) \begin{vmatrix} \psi_1 & \chi_1 & \vartheta_1 \\ \psi_2 & \chi_2 & \vartheta_2 \\ \psi_3 & \chi_3 & \vartheta_3 \end{vmatrix} + (b - b_1) \begin{vmatrix} \omega_1 & \chi_1 & \vartheta_1 \\ \omega_2 & \chi_2 & \vartheta_2 \\ \omega_3 & \chi_3 & \vartheta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\psi_1\chi_1 - \vartheta_1\omega_1) & \chi_1 & \vartheta_1 \\ (\psi_2\chi_2 - \vartheta_2\omega_2) & \chi_2 & \vartheta_2 \\ (\psi_3\chi_3 - \vartheta_3\omega_3) & \chi_3 & \vartheta_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(b - b_1) \begin{vmatrix} \omega_1 & \chi_1 & \psi_1 \\ \omega_2 & \chi_2 & \psi_2 \\ \omega_3 & \chi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} + (\alpha - \alpha_1) \begin{vmatrix} \vartheta_1 & \chi_1 & \psi_1 \\ \vartheta_2 & \chi_2 & \psi_2 \\ \vartheta_3 & \chi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\psi_1\chi_1 - \vartheta_1\omega_1) & \chi_1 & \psi_1 \\ (\psi_2\chi_2 - \vartheta_2\omega_2) & \chi_2 & \psi_2 \\ (\psi_3\chi_3 - \vartheta_3\omega_3) & \chi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\alpha - \alpha_1) \begin{vmatrix} \vartheta_1 & \omega_1 & \psi_1 \\ \vartheta_2 & \omega_2 & \psi_2 \\ \vartheta_3 & \omega_3 & \psi_3 \end{vmatrix} + (\beta - \beta_1) \begin{vmatrix} \chi_1 & \omega_1 & \psi_1 \\ \chi_2 & \omega_2 & \psi_2 \\ \chi_3 & \omega_3 & \psi_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\psi_1\chi_1 - \vartheta_1\omega_1) & \psi_1 & \omega_1 \\ (\psi_2\chi_2 - \vartheta_2\omega_2) & \psi_2 & \omega_2 \\ (\psi_3\chi_3 - \vartheta_3\omega_3) & \psi_3 & \omega_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Um eine Gleichung in $(a - a_1)$ zu erhalten, würde man mit Hülfe vorstehender Gleichungen $(b - b_1)$, $(\alpha - \alpha_1)$ und $(\beta - \beta_1)$ aus der Grundgleichung

$$(a - a_1)(\beta - \beta_1) - (b - b_1)(\alpha - \alpha_1) = 0$$

zu eliminiren haben. Zu diesem Zwecke bedient man sich mit Vortheil

folgender Relationen, in welchen das zweite Glied den gleichen Coefficienten hat:

$$(a - a_1) \begin{vmatrix} \phi_1 & \chi_1 & \vartheta_1 \\ \phi_2 & \chi_2 & \vartheta_2 \\ \phi_3 & \chi_3 & \vartheta_3 \end{vmatrix} + (b - b_1) \begin{vmatrix} \omega_1 & \chi_1 & \vartheta_1 \\ \omega_2 & \chi_2 & \vartheta_2 \\ \omega_3 & \chi_3 & \vartheta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\phi_1 \chi_1 - \vartheta_1 \omega_1) & \chi_1 & \vartheta_1 \\ (\phi_2 \chi_2 - \vartheta_2 \omega_2) & \chi_2 & \vartheta_2 \\ (\phi_3 \chi_3 - \vartheta_3 \omega_3) & \chi_3 & \vartheta_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(a - a_1) \begin{vmatrix} \omega_1 & \chi_1 & \phi_1 \\ \omega_2 & \chi_2 & \phi_2 \\ \omega_3 & \chi_3 & \phi_3 \end{vmatrix} + (\alpha - \alpha_1) \begin{vmatrix} \omega_1 & \chi_1 & \vartheta_1 \\ \omega_2 & \chi_2 & \vartheta_2 \\ \omega_3 & \chi_3 & \vartheta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\phi_1 \chi_1 - \vartheta_1 \omega_1) & \omega_1 & \chi_1 \\ (\phi_2 \chi_2 - \vartheta_2 \omega_2) & \omega_2 & \chi_2 \\ (\phi_3 \chi_3 - \vartheta_3 \omega_3) & \omega_3 & \chi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(a - a_1) \begin{vmatrix} \vartheta_1 & \omega_1 & \phi_1 \\ \vartheta_2 & \omega_2 & \phi_2 \\ \vartheta_3 & \omega_3 & \phi_3 \end{vmatrix} + (\beta - \beta_1) \begin{vmatrix} \omega_1 & \chi_1 & \vartheta_1 \\ \omega_2 & \chi_2 & \vartheta_2 \\ \omega_3 & \chi_3 & \vartheta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\phi_1 \chi_1 - \vartheta_1 \omega_1) & \vartheta_1 & \omega_1 \\ (\phi_2 \chi_2 - \vartheta_2 \omega_2) & \vartheta_2 & \omega_2 \\ (\phi_3 \chi_3 - \vartheta_3 \omega_3) & \vartheta_3 & \omega_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnen A, B, C, D und ebenso M, N, P unendlich kleine Grössen der III. Ordnung, ferner μ, ν, π solche der I. Ordnung oder derselben Ordnung wie $\phi, \chi, \vartheta, \omega$, so kann man die drei letzten Gleichungen der Kürze wegen schreiben:

$$(a - a_1)A + (b - b_1)B + M\mu = 0,$$

$$(a - a_1)C + (\alpha - \alpha_1)B + N\nu = 0,$$

$$(a - a_1)D + (\beta - \beta_1)B + P\pi = 0.$$

Die Finalgleichung in $(a - a_1)$ ist

$$(a - a_1)^2(AC + BD) + (a - a_1)(CM\mu + AN\nu + BP\pi) + MN\mu\nu = 0.$$

Bei willkürlichen Annahmen der Elemente $\phi, \chi, \vartheta, \omega$ ist nun der Coefficient von $(a - a_1)^2$ eine unendlich kleine Grösse der 6. Ordnung, der von $(a - a_1)$ eine von der 7. Ordnung, das Absolutglied eine von der 8. Ordnung; und ähnlich wird es sich mit den Finalgleichungen in $(b - b_1), (\alpha - \alpha_1)$ und $\beta - \beta_1$ verhalten. Wenn demnach $a - a_1$ auch nur *einen* von Null verschiedenen endlichen Werth haben soll, so muss $AC + BD$ eine kleine

Grösse der 7. Ordnung oder überhaupt die beiden grössten Coefficienten von gleicher Ordnung sein; entweder wird dann der andere Wurzelwerth eine kleine Grösse der 1. Ordnung, oder unendlich gross, oder die Gleichung hat zwei gleiche Wurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen. Die *eine* Brennlinie schneidet alsdann sämtliche Strahlen unter einem endlichen von Null verschiedenen Winkel, wogegen die andere mit dem Hauptstrahle coincidirt, wenn der zweite Wurzelwerth verschwindet. Wenn dagegen $a - a_1$ zwei von Null verschiedene endliche Werthe haben soll, so müssen die drei Coefficienten der quadratischen Finalgleichung unendlich kleine Grössen der 8. oder einer höheren Ordnung sein. Bezeichnet demnach $(\psi)^1$ eine Grösse der 1. Ordnung, so ist die Bedingung, dass $a - a_1$ mindestens *einen* endlichen von Null verschiedenen Wert habe:

$$\frac{1}{\psi_1^6} \begin{vmatrix} \psi_1 & \chi_1 & \vartheta_1 \\ \psi_2 & \chi_2 & \vartheta_2 \\ \psi_3 & \chi_3 & \vartheta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_1 & \chi_1 & \psi_1 \\ \omega_2 & \chi_2 & \psi_2 \\ \omega_3 & \chi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{\psi_1^6} \begin{vmatrix} \omega_1 & \chi_1 & \vartheta_1 \\ \omega_2 & \chi_2 & \vartheta_2 \\ \omega_3 & \chi_3 & \vartheta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \vartheta_1 & \omega_1 & \psi_1 \\ \vartheta_2 & \omega_2 & \psi_2 \\ \vartheta_3 & \omega_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = (\psi)^1.$$

Es ergibt sich daraus die bemerkenswerthe Thatsache, dass wenn eine Brennlinie den Hauptstrahl eines unendlich dünnen Strahlenbündels unter einem spitzen Winkel schneiden soll, die Summe der beiden voranstehenden endlichen Grössen zwar unendlich klein, aber nicht gleich Null werden darf, vorausgesetzt, dass die Coefficienten der beiden andern Glieder der Finalgleichung resp. von 7. und 8. Ordnung der Kleinheit sind; und ferner dass, wenn die Summe gleich Null wird, die Brennlinien mit dem Hauptstrahl coincidiren. Der Werth $a - a_1$ verschwindet auch, wenn $AC + BD$ eine kleine Grösse der 6. Ordnung bleibt. Es braucht kaum hinzugefügt zu werden, dass wenn $a - a_1$ gleich Null wird, im Allgemeinen auch $(b - b_1)$, $(\alpha - \alpha_1)$ und $(\beta - \beta_1)$ verschwinden.

Wenn man das unendlich dünne Strahlenbündel als den Complex sämtlicher Normalen eines unendlich kleinen Elementes einer krummen Oberfläche ansieht, so ist, wie früher von mir gezeigt worden ist,

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \left(\frac{r}{\rho} - 1 \right) \frac{\partial s}{\partial r},$$

$$\operatorname{tg} \vartheta_2 = \left(1 - \frac{\rho}{r} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \rho},$$

wo ϑ_1 und ϑ_2 die Neigungswinkel der Brennlilien gegen den Hauptstrahl, r und ρ die Hauptkrümmungsradien, ∂s und $\partial \sigma$ die Differentiale der Hauptnormalschnitte der Fläche oder die rechtwinkligen Halbmesser der indicatorischen Linie bezeichnen. Die Analogie zwischen diesen und den vorangehenden Formeln besteht darin, dass auch ϑ_1 und ϑ_2 gleich Null werden, wenn die Differenzen $(a - a_1)$ u. s. w. verschwinden.

Zur Erläuterung des ersten Falles, in welchem die eine Brennlilie mit dem Hauptstrahle einen von Null verschiedenen Winkel bildet, die andere mit demselben coincidirt, möge ein Zahlenbeispiel gewählt werden, indem wir für die Variationen $x, \vartheta, \omega, \psi$ etwa Tausendstel annehmen. Es sei

$$\begin{array}{cccc} a_1 = 2,000 & \beta_1 = 5,000 & b_1 = 1,000 & \alpha_1 = 3,000 \\ a_2 = 1,998 & \beta_2 = 4,9995 & b_2 = 0,999 & \alpha_2 = 2,999 \\ a_3 = 1,997 & \beta_3 = 4,99749975 & b_3 = 0,998 & \alpha_3 = 2,996 \\ a_4 = 1,996 & \beta_4 = 4,99750050 & b_4 = 0,997 & \alpha_4 = 2,997. \end{array}$$

Daraus folgt

$$\begin{array}{cccc} \chi_1 = 0,002 & \psi_1 = 0,0005 & \vartheta_1 = -0,001 & \omega_1 = -0,001 \\ \chi_2 = 0,003 & \psi_2 = 0,00250025 & \vartheta_2 = -0,002 & \omega_2 = -0,004 \\ \chi_3 = 0,004 & \psi_3 = 0,00249950 & \vartheta_3 = -0,003 & \omega_3 = -0,003. \end{array}$$

Die Rechnungen ergeben daraus weiter

$$A = \frac{2,001}{1000^3}, \quad C = \frac{3,997}{1000^3}, \quad B = -\frac{4,000}{1000^3}, \quad D = \frac{1,999}{1000^3},$$

also den Anforderungen gemäss

$$1000^6(AC + BD) = 0,001997 = (\psi)^1.$$

Es sind demnach A, B, C, D sehr kleine Grössen 3. Ordnung, die Coefficienten der beiden ersten Glieder der Finalgleichung von der 7. Ordnung, das Absolutglied von der 8. Ordnung. Setzt man der Kürze wegen $a - a_1 = x, \beta - \beta_1 = y, b - b_1 = z, \alpha - \alpha_1 = t$, so erhält man folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{array}{r} xy - zt = 0, \\ 0,5x + 2y - z - t = 0, \\ 2,50025x + 3y - 4z - 2t - 0,0005 = 0, \\ 2,49950x + 4y - 3z - 3t + 0,0010 = 0. \end{array}$$

Daraus resultiren die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0,49975x - y + 0,0005 &= 0, \\ 0,50025x - z - 0,0005 &= 0, \\ 0,99925x - t + 0,0015 &= 0. \end{aligned}$$

Die Finalgleichung in x ist

$$0,49925x^2 - 0,997x - 0,003 = 0,$$

und ihre Wurzeln $x_1 = 2$, $x_2 = -0,003$. Daraus ergeben sich die simultanen Werthe:

$$\begin{array}{cccc} a_1 = 2 & \beta_1 = 5 & b_1 = 1 & \alpha_1 = 3 \\ a' = 4 & \beta' = 6 & b' = 2 & \alpha' = 5 \\ a'' = 1,997 & \beta'' = 4,999 & b'' = 0,998 & \alpha'' = 2,9985. \end{array}$$

Wir können weiter die Winkel berechnen, welche die Brennpunkte mit dem Hauptstrahl und mit einander bilden. Da das Strahlenbündel sehr dünn ist, so können wir den ersten Strahl als den Hauptstrahl betrachten und die Neigungswinkel δ_1 und δ_2 gegen diesen suchen; dieselben werden nur um sehr kleine Grössen von den übrigen drei Paaren abweichen; man findet $\delta_1 = 11^\circ 29' 30''$ und δ_2 nahezu gleich Null, den Winkel der Brennpunkte mit einander gleich $11^\circ 31' 30''$. Die Coordinaten der beiden Brennpunkte sind

$$x_1 = -1, y_1 = -4, z_1 = -1; x_2 = -2, y_2 = -4,5, z_2 = -0,5;$$

endlich die Brennweite gleich $\sqrt{1,5}$.

Auch der allgemeinere Fall, in welchem beide Winkel δ_1 und δ_2 von 0 und $\frac{\pi}{2}$ verschieden sind, möge hier als besonders lehrreich durch ein Zahlenbeispiel illustriert werden. Wir nehmen an, es sei

$$\begin{array}{cccc} a_1 = 2,000 & \beta_1 = 3,000 & b_1 = -1,000 & \alpha_1 = 3,000 \\ a_2 = 1,998 & \beta_2 = 2,99775057 & b_2 = -1,00374981 & \alpha_2 = 2,999 \\ a_3 = 1,997 & \beta_3 = 2,99224859 & b_3 = -1,00625047 & \alpha_3 = 2,996 \\ a_4 = 1,996 & \beta_4 = 2,99375132 & b_4 = -1,00774956 & \alpha_4 = 2,997. \end{array}$$

Daraus ergeben sich folgende Werthe der Variationen:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= 0,002 & \psi_1 &= 0,00224943 & \vartheta_1 &= -0,00374981 & \omega_1 &= -0,001 \\ \chi_2 &= 0,003 & \psi_2 &= 0,00775141 & \vartheta_2 &= -0,00625047 & \omega_2 &= -0,004 \\ \chi_3 &= 0,004 & \psi_3 &= 0,00624868 & \vartheta_3 &= -0,00774956 & \omega_3 &= -0,003. \end{aligned}$$

Die Berechnung der Determinanten ergibt weiter

$$A = -\frac{0,00181}{1000^3}, \quad C = -\frac{0,00543}{1000^3}, \quad B = \frac{0,00181}{1000^3}, \quad D = -\frac{0,00905}{1000^3}.$$

Es ist demnach der Anforderung gemäss

$$1000^6(AC + BD) = -0,0000065522 = (\psi)^2.$$

Die Determinanten A, B, C, D sind kleine Grössen der 4. Ordnung, mithin alle drei Coefficienten der quadratischen Finalgleichung von 8. also gleicher Ordnung. Für x, y, z, t erhält man die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} 2,24943x + 2y - z - 3,74981t + 0,00076 &= 0, \\ 7,75141x + 3y - 4z - 6,25047t - 0,00188 &= 0, \\ 6,24868x + 4y - 3z - 7,74956t + 0,00176 &= 0. \end{aligned}$$

Daraus resultiren die Gleichungen

$$\begin{aligned} 5x - y - 7 &= 0, \\ x - z + 1 &= 0, \\ 3x - t - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Die Finalgleichungen werden folgende:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &= 0, & x_1 &= 2, & x_2 &= 1, \\ y^2 - y - 6 &= 0, & y_1 &= 3, & y_2 &= -2, \\ z^2 - 5z + 6 &= 0, & z_1 &= 3, & z_2 &= 2, \\ t^2 - t - 2 &= 0, & t_1 &= 2, & t_2 &= -1. \end{aligned}$$

Die Constanten der beiden Brennpunkte und des Hauptstrahles sind demzufolge:

$$\begin{aligned} a' &= 4 & \beta' &= 6 & b' &= 2 & \alpha' &= 5 \\ a'' &= 3 & \beta'' &= 1 & b'' &= 1 & \alpha'' &= 2 \\ a_1 &= 2 & \beta_1 &= 3 & b_1 &= -1 & \alpha_1 &= 3. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir den Winkel, welchen die beiden Brennpunkte mit einander bilden, durch ε , so finden wir

$$\vartheta_1 = 51^\circ 25' 10'', \quad \vartheta_2 = 42^\circ 23' 40'', \quad \varepsilon = 9^\circ 16' 30''.$$

Die Coordinaten der beiden Brennpunkte sind

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -1, & \eta_1 &= 0,5, & \zeta_1 &= -1 \\ \xi_2 &= -5, & \eta_2 &= -2, & \zeta_2 &= 1. \end{aligned}$$

Die Brennweite hat die Grösse

$$\sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2} = \sqrt{26,25}.$$

Unsere Untersuchungen haben also zu dem beachtenswerthen Resultate geführt, dass die beiden Brennpunkte unendlich dünner Strahlenbündel durch vier einzelne Strahlen bestimmt sind und dass dieselben unter sich und mit dem Hauptstrahle sehr verschiedene Winkel bilden können.

Wenn nun neue Strahlen hinzutreten, welche zu denselben Brennpunkten gehören, so müssen sie gewisse Bedingungen erfüllen. Die Variationen $\chi_n, \vartheta_n, \omega_n, \psi_n$ müssen offenbar so gewählt werden, dass das oben aufgestellte System von linearen Gleichungen bestehen bleibt. Durch die Variationen der Constanten muss folgendem Systeme von Gleichungen Genüge geschehen:

$$\begin{aligned} (a - a_1)\psi_1 + (b - b_1)\omega_1 + (\alpha - \alpha_1)\vartheta_1 + (\beta - \beta_1)\chi_1 + (\psi_1\chi_1 - \vartheta_1\omega_1) &= 0, \\ (a - a_1)\psi_2 + (b - b_1)\omega_2 + (\alpha - \alpha_1)\vartheta_2 + (\beta - \beta_1)\chi_2 + (\psi_2\chi_2 - \vartheta_2\omega_2) &= 0, \\ (a - a_1)\psi_3 + (b - b_1)\omega_3 + (\alpha - \alpha_1)\vartheta_3 + (\beta - \beta_1)\chi_3 + (\psi_3\chi_3 - \vartheta_3\omega_3) &= 0, \\ (a - a_1)\psi_n + (b - b_1)\omega_n + (\alpha - \alpha_1)\vartheta_n + (\beta - \beta_1)\chi_n + (\psi_n\chi_n - \vartheta_n\omega_n) &= 0. \end{aligned}$$

Die Bedingungsgleichungen sind offenbar die folgenden zwei:

$$\begin{vmatrix} \chi_n & \vartheta_n & \omega_n & \psi_n \\ \chi_1 & \vartheta_1 & \omega_1 & \psi_1 \\ \chi_2 & \vartheta_2 & \omega_2 & \psi_2 \\ \chi_3 & \vartheta_3 & \omega_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

wofür man kürzer schreiben kann

$$D\chi_n + C\vartheta_n + A\omega_n + B\psi_n = 0;$$

ausserdem

$$\begin{vmatrix} (\psi_n\chi_n - \vartheta_n\omega_n) & \vartheta_n & \omega_n & \psi_n \\ (\psi_1\chi_1 - \vartheta_1\omega_1) & \vartheta_1 & \omega_1 & \psi_1 \\ (\psi_2\chi_2 - \vartheta_2\omega_2) & \vartheta_2 & \omega_2 & \psi_2 \\ (\psi_3\chi_3 - \vartheta_3\omega_3) & \vartheta_3 & \omega_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Durch willkürliche Annahmen von χ_n und ϑ_n erhält man daraus zwei lineare Gleichungen in ω_n und ψ_n , woraus diese berechnet werden können. Die beiden Relationen bringen zugleich eine bemerkenswerthe Eigenschaft sämtlicher Normalen eines unendlich kleinen Elements einer krummen Oberfläche zum Ausdruck. Wenn die Constanten der beiden Brennpunkte bereits bekannt sind, wird man sich mit Vortheil der beiden linearen Gleichungen

$$(a' - a_n)\psi_n + (b' - b_n)\omega_n + (\alpha' - \alpha_1)\vartheta_n + (\beta' - \beta_1)\chi_n = 0,$$

$$(a'' - a_n)\psi_n + (b'' - b_n)\omega_n + (\alpha'' - \alpha_1)\vartheta_n + (\beta'' - \beta_1)\chi_n = 0$$

bedienen können. Die Rechnung ist selbstverständlich bis auf kleine Grössen der 2. Ordnung incl. genau auszuführen.

Es lässt sich nun noch zeigen, dass es unendlich viele reelle unendlich dünne Strahlenbündel giebt, welche sich zu einem gegebenen Paare imaginärer Brennpunkte construiren lassen. Wir nehmen an, die Constanten derselben seien

$$a = m_1 \pm n_1 \sqrt{-1}, \quad \beta = m_2 \pm n_2 \sqrt{-1}, \quad b = m_3 \pm n_3 \sqrt{-1}, \quad \alpha = m_4 \pm n_4 \sqrt{-1};$$

und setzen zunächst voraus, es sei der Hauptstrahl durch die Elemente a_1 b_1 α_1 β_1 bestimmt; alsdann gelten folgende Gleichungen:

$$(m_1 + n_1 \sqrt{-1} - a_n) \phi_n + (m_3 + n_3 \sqrt{-1} - b_n) \omega_n + (m_4 + n_4 \sqrt{-1} - \alpha_1) \vartheta_n \\ + (m_2 + n_2 \sqrt{-1} - \beta_1) \chi_n = 0,$$

$$(m_1 - n_1 \sqrt{-1} - a_n) \phi_n + (m_3 - n_3 \sqrt{-1} - b_n) \omega_n + (m_4 - n_4 \sqrt{-1} - \alpha_1) \vartheta_n \\ + (m_2 - n_2 \sqrt{-1} - \beta_1) \chi_n = 0.$$

Daraus folgt

$$(m_1 - a_n) \phi_n + (m_3 - b_n) \omega_n + (m_4 - \alpha_1) \vartheta_n + (m_2 - \beta_1) \chi_n = 0, \\ n_1 \phi_n + n_3 \omega_n + n_4 \vartheta_n + n_2 \chi_n = 0.$$

Durch willkürliche Annahmen von χ_n und ϑ_n erhält man also zwei lineare Gleichungen in ϕ_n und ω_n , woraus diese berechnet werden können.

Wenn der Hauptstrahl nicht bekannt ist, so lässt sich ein solcher demnach immer finden auf folgende Art:

Indem man z. B. b_1 und α_1 willkürlich wählt, lassen sich die zugehörigen Werthe a_1 und β_1 berechnen aus folgenden Gleichungen:

$$(m_1 + n_1 \sqrt{-1} - \alpha_1)(m_2 + n_2 \sqrt{-1} - \beta_1) \\ - (m_3 + n_3 \sqrt{-1} - b_1)(m_4 + n_4 \sqrt{-1} - \alpha_1) = 0, \\ (m_1 - n_1 \sqrt{-1} - \alpha_1)(m_2 - n_2 \sqrt{-1} - \beta_1) \\ - (m_3 - n_3 \sqrt{-1} - b_1)(m_4 - n_4 \sqrt{-1} - \alpha_1) = 0.$$

Führt man die Multiplicationen aus, und setzt der Kürze wegen

$$(m_1 m_2 - n_1 n_2) + (m_1 n_2 + m_2 n_1) \sqrt{-1} = A_1 + B_1 \sqrt{-1}, \\ (m_3 m_4 - n_3 n_4) + (m_3 n_4 + m_4 n_3) \sqrt{-1} = A_2 + B_2 \sqrt{-1},$$

so findet man

$$a_1 \beta_1 - m_2 a_1 - m_1 \beta_1 + A_1 - A_2 - \alpha_1 b_1 + m_3 \alpha_1 + m_4 b_1 = 0, \\ n_2 a_1 + n_1 \beta_1 - B_1 + B_2 - n_3 \alpha_1 - n_4 b_1 = 0.$$

Eliminirt man β_1 , so erhält man die Finalgleichung

$$a_1^2 + f(\alpha_1, b_1)a_1 + F(\alpha_1, b_1) = 0,$$

wo f eine lineare, F eine quadratische Function ist. Es lassen sich dann α_1 und b_1 allemal so wählen, dass a_1 reell wird; dadurch wird auch β_1 reell. Mit Hülfe der Gleichungen

$$\begin{aligned} (m_1 - a_n)\phi_n + (m_3 - b_n)\omega_n + (m_4 - \alpha_1)\vartheta_n + (m_2 - \beta_1)\chi_n &= 0, \\ n_1\phi_n + n_3\omega_n + n_4\vartheta_n + n_2\chi_n &= 0 \end{aligned}$$

lassen sich alsdann unendlich viele unendlich nahe Strahlen des Bündels berechnen.

Sämtliche oben aufgestellte Gleichungen gelten natürlich auch für endlich dicke Strahlensysteme mit gemeinschaftlichen Brennlinien. Es treten aber Abkürzungen der linearen Gleichungen selbst dann nicht ein, wenn die Variationen χ , ϑ , ω , ϕ unendlich klein, also die Absolutglieder unendlich kleine Grössen der 2. Ordnung werden. In einem derartigen Fehler dürfte die Ursache zu suchen sein, in Folge deren STURM und KUMMER in ihren bekannten Untersuchungen (POGG. ANN. Bd. 65 und BORCH. Journ. Bd. 57) so wie auch HELMHOLTZ (*Physiol. Opt.* S. 246) zu einem abweichenden Fundamentaltheoreme des Astigmatismus gelangt sind.

Rostock, 22 September 1883.
