SUR L'USAGE DES PRODUITS INFINIS

DANS

LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

CH. HERMITE et R. LIPSCHITZ.

1. Extrait d'une lettre de M. Hermite à M. Lipschitz.

..... Une remarque à cette occasion sur les formules 7, 8, 9, 10, 11 de la page 89 des *Fundamenta;* il me parait convenable d'introduire ces quatre produits infinis:

$$\begin{aligned} A &= (1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots \\ B &= (1-q)\,(1-q^3)(1-q^5)\ldots \\ C &= (1+q)\,(1+q^3)(1+q^5)\ldots \\ D &= (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots \end{aligned} \qquad (ABC = 1)$$

on a alors

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\sqrt[8]{q}A^2B, \qquad \sqrt[4]{k'} = B^2A$$

$$\sqrt{\frac{2kK}{\pi}} = 2\sqrt[4]{q}.A^2D, \qquad \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}} = B^2D, \qquad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = C^2D.$$

En évitant les dénominateurs j'obtiens comme vous voyez plus de symétrie.

Paris, 14 Décembre 1883.

2. Extrait d'une lettre de M. Lipschitz à M. Hermite.

. . . . . Si vous avez jugé convenable d'introduire les quatres produits infinis

$$A = \Pi_n(1 + q^{2n}), \qquad B = \Pi_n(1 - q^{2n-1})$$
$$C = \Pi_n(1 + q^{2n-1}), \qquad D = \Pi_n(1 - q^{2n})$$

où n parcourt tous les nombres depuis 1 jusqu'à l'infini, qui sont conjoints par l'équation

$$ABC = 1,$$

il me semble, que votre procédé se trouve confirmé par des considérations, que je me permets de vous expliquer.

Dans le mémoire posthume de Gauss, *Zur Theorie der transcendenten Functionen gehörig,* T. III des oeuvres complètes, l'auteur a exprimé les fonctions $\vartheta_0(0)$, $\vartheta_3(0)$ et quelques autres à l'aide du seul produit infini

$$\Pi_n(1 - q^n),$$

qu'il désigne par $[q]$, mais que je désignerai par la charactéristique $G(q)$. L'article 4, page 440, contient les représentations

$$\vartheta_0(0) = \frac{G^2(q)}{G(q^2)}, \qquad \vartheta_3(0) = \frac{G^5(q^2)}{G^2(q)G^2(q^4)}$$

et la relation remarquable

$$G(-q) = \frac{G^3(q^2)}{G(q)G(q^4)}.$$

Pour la fonction $\vartheta_2(0)$ on a d'abord l'expression

$$\vartheta_2(0) = 2q^{\frac{1}{4}}\frac{G^2(q^4)}{G(q^2)}.$$

Partant, en introduisant dans la formule mentionnée relative à $\vartheta_3(0)$ la fonction $G(-q)$, je parviens aux trois expressions symétriques

$$\vartheta_0(0) = \frac{G^2(q)}{G(q^2)}, \quad \vartheta_2(0) = 2q^{\frac{1}{4}}\frac{G^2(q^4)}{G(q^2)}, \quad \vartheta_3(0) = \frac{G^2(-q)}{G(q^2)}.$$

Mais pour les produits infinis A, B, C, D on a les formules

$$A = \frac{G(q^4)}{G(q^2)}, \quad B = \frac{G(q)}{G(q^2)}, \quad C = \frac{G(-q)}{G(q^2)}, \quad D = G(q^2),$$

qui mènent des dites expressions à celles que vous m'avez bien voulu communiquer. En même temps votre équation $ABC = 1$ coïncide avec l'équation citée de Gauss, que l'on peut écrire, comme il suit

$$\text{(I)} \qquad G(q)G(q^4)G(-q) = G^3(q^2),$$

et la relation $\vartheta_0^4(0) + \vartheta_2^4(0) - \vartheta_3^4(0) = 0$ se change dans celle-ci

$$\text{(II)} \qquad G^8(q) + 16qG^8(q^4) - G^8(-q) = 0,$$

qui ne diffère que par le facteur $G^8(q^2)$ de la formule (14) de l'article 36 des *Fundamenta.*

Ayant fait ces remarques sur l'usage du produit $G(q)$ je me suis proposé d'exprimer les quatre fonctions $\vartheta_0(w)$, $\vartheta_1(w)$, $\vartheta_2(w)$, $\vartheta_3(w)$ par le produit infini correspondant

$$P(w, q) = \prod_n(1 - q^n e^{2iw\pi})(1 - q^n e^{-2iw\pi}),$$

d'où suit l'équation

$$G(q) = \sqrt{P(0, q)}.$$

Alors les formules connues

$$\vartheta_0(w) = G(q^2)\prod_n(1 - 2q^{2n-1}\cos 2w\pi + q^{4n-2})$$

$$\vartheta_1(w) = G(q^2)\,2q^{\frac{1}{4}}\sin w\pi\prod_n(1 - 2q^{2n}\cos 2w\pi + q^{4n})$$

$$\vartheta_2(w) = G(q^2)\,2q^{\frac{1}{4}}\cos w\pi\prod_n(1 + 2q^{2n}\cos 2w\pi + q^{4n})$$

$$\vartheta_3(w) = G(q^2)\prod_n(1 + 2q^{2n-1}\cos 2w\pi + q^{4n-2})$$

sont transformées dans les suivantes

$$\vartheta_0(w) = \sqrt{P(0,\ q^2)}\,\frac{P(w,\ q)}{P(w,\ q^2)}$$

$$\vartheta_1(w) = \sqrt{P(0,\ q^2)}\ 2q^{\frac{1}{4}} \sin w\pi P(w,\ q^2)$$

$$\vartheta_2(w) = \sqrt{P(0,\ q^2)}\ 2q^{\frac{1}{4}} \cos w\pi \frac{P(2w,\ q^4)}{P(w,\ q^2)}$$

$$\vartheta_3(w) = \sqrt{P(0,\ q^2)}\,\frac{P(w,\ -q)}{P(w,\ q^2)}.$$

D'ailleurs la multiplication actuelle des produits infinis donne l'équation

$$\text{(III)} \qquad P(w,\ q)P(2w,\ q^4)P(w,\ -q) = P^2(w,\ q^2)P(2w,\ q^2).$$

De l'autre part, comme. on a les expressions

$$\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\,(2Kw) = \frac{\vartheta_1(w)}{\vartheta_0(w)}$$

$$\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k'}}\,\mathrm{cn}\,(2Kw) = \frac{\vartheta_2(w)}{\vartheta_0(w)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k'}}\,\mathrm{dn}\,(2Kw) = \frac{\vartheta_3(w)}{\vartheta_0(w)}$$

et en conséquence l'équation

$$\vartheta_1^4(w) - \vartheta_2^4(w) + \vartheta_3^4(w) - \vartheta_0^4(w) = 0,$$

on parvient à l'identité

$$\text{(IV)} \quad 16q\sin^4 w\pi P^8(w, q^2) - 16q\cos^4 w\pi P^4(2w, q^4) + P^4(w, -q) - P^4(w, q) = 0.$$

Or les équations (III) et (IV) se changent respectivement dans les équations (I) et (II) en supposant $w = 0$.

Bonn, 20 Décembre 1883.