SUR LES FONCTIONS DE TROIS VARIABLES
RÉELLES
SATISFAISANT À L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $\Delta F = 0$

PAR

P. APPELL

À PARIS.

Nous nous occupons dans ce mémoire des fonctions les plus simples de trois variables réelles x, y, z satisfaisant à l'équation différentielle

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0,$$

en considérant x, y, z comme les coordonnées rectilignes rectangulaires d'un point de l'espace. Dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, les fonctions qui se présentent tout d'abord sont celles qui sont uniformes et ne possèdent que des points singuliers isolés. Il nous a paru intéressant d'étudier de même les fonctions satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$ qui ne cessent d'être finies et continues qu'en certains *points* isolés les uns des autres.

La première partie de ce travail a pour objet l'étude générale de ces fonctions: elle contient une extension du théorème de M. MITTAG-LEFFLER et plusieurs applications du théorème de GREEN parmi lesquelles se trouvent des développements en série propres à représenter une fonction F uniforme et admettant des dérivées en tous les points d'un volume limité par des portions de surfaces sphériques.

Dans la deuxième partie nous étudions en particulier les fonctions $F(x, y, z)$ satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$ et admettant trois groupes de périodes conjuguées (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'') c'est à dire vérifiant les trois équations

$$F(x+a\ , y+b\ , z+c\ ) = F(x, y, z)$$
$$F(x+a'\ , y+b'\ , z+c'\ ) = F(x, y, z)$$
$$F(x+a'', y+b'', z+c'') = F(x, y, z).$$

Ces fonctions qui reprennent les mêmes valeurs aux points homologues d'un réseau de parallélépipèdes possèdent des propriétés semblables à celles de la partie réelle d'une fonction doublement périodique d'une variable imaginaire. Nous avons laissé de côté, pour le moment, l'étude des fonctions $F(x, y, z)$ à un ou deux groupes de périodes conjuguées, étude qui pourrait se faire par les mêmes méthodes.

Quelques-uns des résultats contenus dans ce mémoire ont été indiqués dans une Note présentée à l'Académie des sciences de Paris le 5 Février 1883.

Première partie.

1. Soit n un entier positif; désignons avec MM. Thomson et Tait,[1] par $V_n(x, y, z)$ le polynôme le plus général homogène et du degré n en x, y, z satisfaisant à l'équation

$$\Delta V_n = \frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2} = 0;$$

dans l'expression de ce polynôme entrent linéairement $2n+1$ constantes arbitraires: ainsi

$$V_1(x, y, z) = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z$$

---

[1] Voir: *Handbuch der theoretischen Physik von* Thomson *und* Tait; deutsche Uebersetzung von Helmholtz und Wertheim; erster Band, erster Theil, p. 156 et suivantes.

avec trois constantes λ_1, λ_2, λ_3,

$$V_2(x, y, z) = \lambda_1(x^2 - z^2) + \lambda_2(y^2 - z^2) + \lambda_3 yz + \lambda_4 zx + \lambda_5 xy$$

avec cinq constantes; et ainsi de suite. Lorsque différentes fonctions V_n avec des constantes différentes se présenteront dans un calcul, nous les distinguerons les unes des autres par un indice supérieur. Par exemple $V_1^{(1)}(x, y, z)$ sera $\lambda_1^{(1)}x + \lambda_2^{(1)}y + \lambda_3^{(1)}z$ avec d'autres constantes $\lambda_1^{(1)}$, $\lambda_2^{(1)}$, $\lambda_3^{(1)}$; et de même pour V_n en général.

Si l'on substitue aux coordonnées rectilignes rectangulaires x, y, z, les coordonnées polaires dans l'espace à l'aide des formules de transformation:

$$(1) \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad z = r\sin\theta\sin\varphi$$

la fonction $V_n(x, y, z)$ devient

$$V_n(r\cos\theta,\ r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi) = r^n Y_n(\theta, \varphi),$$

Y_n désignant une fonction de LAPLACE.

L'on sait [1] que si une fonction $F(x, y, z)$ satisfait à l'équation $\Delta F = 0$, la fonction

$$\frac{1}{r}F\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right), \qquad (r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

y satisfait également. En appliquant ce théorème à la fonction $V_n(x, y, z)$, nous voyons que la fonction

$$\frac{1}{r}V_n\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right) = \frac{1}{r^{2n+1}}V_n(x, y, z)$$

satisfait à l'équation $\Delta F = 0$; cette fonction qui est homogène du degré $-(n+1)$ en x, y, z est désignée dans l'ouvrage déjà cité de MM. THOMSON et TAIT par

$$V_{-(n+1)}(x, y, z).$$

---

[1] Voir Journal de LIOUVILLE, T. 12, p. 256—264: Extraits de lettres adressées à M. LIOUVILLE par M. W. THOMSON. Voir aussi *Handbuch der Kugelfunktionen* von E. HEINE, zweite Auflage, zweiter Band, p. 251 et suivantes.

L'on a, par exemple,

$$V_{-1} = \frac{\lambda_0}{r}$$

$$V_{-2} = \frac{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z}{r^3}, \ldots \text{ etc.};$$

on démontre[1] que la fonction $V_{-(n+1)}$ est une combinaison linéaire homogène à coefficients constants des dérivés partielles d'ordre n de $\frac{1}{r}$; ainsi, par exemple,

$$V_{-2} = -\lambda_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \lambda_3 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}.$$

Nous avons ainsi une suite de fonctions $V_\nu(x, y, z)$ définies pour toutes les valeurs entières positives ou négatives de l'indice ν. La fonction V_0 est une constante et la fonction V_ν est homogène et du degré ν en x, y, z. Ces fonctions jouent dans la présente théorie le même rôle que la partie réelle de l'expression

$$(a + bi)(x + yi)^\nu$$

dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire.

2. *Séries entières.*[2] Soit une série de la forme

$$V_0 + V_1 + V_2 + \ldots + V_n(x, y, z) + \ldots + \ldots \tag{2}$$

ordonnée suivant les fonctions V à indices positifs; les constantes arbitraires qui figurent dans $V_n(x, y, z)$ sont supposées avoir des valeurs numériques déterminées. Il est facile de voir qu'une pareille série est convergente en tous les points situés à l'intérieur d'une certaine sphère ayant pour centre l'origine des coordonnées et qui sera appelée sphère de convergence. Si nous remplaçons les coordonnées rectilignes par des

---

[1] THOMSON et TAIT, *Theoretische Physik*, p. 162.

[2] Les remarques que nous faisons relativement aux séries (2) s'étendent à toute série ordonnée suivant des polynômes homogènes en x, y, z. Il peut se faire, bien entendu, que la série converge en certains points situés en dehors de la sphère de convergence.

coordonnées polaires dans l'espace à l'aide des formules (1) la série (2) prend la forme

$$(2') \qquad \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} r^\nu Y_\nu(\theta, \varphi).$$

Désignons par A_ν la plus grande valeur absolue que puisse prendre Y_ν quand θ varie entre o et π, φ entre o et 2π, et considérons la série à termes positifs

$$(3) \qquad \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu r^\nu;$$

cette dernière série (3) est convergente pour toutes les valeurs de r inférieures à un nombre déterminé R; il en est de même a fortiori des séries (2) et (2') dont les termes sont en valeur absolue au plus égaux à ceux de la série (3). Donc la série (2) est convergente en tous les points situés à l'intérieur d'une sphère de rayon R.

Soit ε un nombre positif plus petit que l'unité et α un nombre positif aussi petit que l'on veut; l'on peut assigner un nombre positif entier m tel que, pour toutes les valeurs de x, y, z vérifiant l'inégalité

$$\frac{r}{R} \leqq \varepsilon,$$

l'on ait [1]

$$\left| \sum_{\nu=n}^{\nu=\infty} V_\nu(x, y, z) \right| < \alpha, \text{ si } n \geqq m.$$

Pour le montrer suivons la méthode indiquée par M. WEIERSTRASS; [2] désignons par ε_0 un nombre positif plus petit que 1 mais plus grand que ε; la série (3) est convergente pour $r = R\varepsilon_0$; soit g un nombre au moins égal à la somme de cette série

$$g \geqq \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} R^\nu \varepsilon_0^\nu A_\nu$$

on aura évidemment

$$g \geqq R^\nu \varepsilon_0^\nu A_\nu, \qquad A_\nu \leqq g R^{-\nu} \varepsilon_0^{-\nu}.$$

---

(1) La notation $|a|$ empruntée à M. WEIERSTRASS signifie *valeur absolue de a*.

(2) Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Gesammtsitzung vom 5 August 1880, p. 710.

Maintenant, pour toutes les valeurs de x, y, z telles que $\frac{r}{R} \leqq \varepsilon$, on a

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\nu=\infty} V_\nu(x, y, z)\right| \leqq \sum_{\nu=n}^{\nu=\infty} R^\nu \varepsilon^\nu A_\nu \leqq g \sum_{\nu=n}^{\nu=\infty} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^\nu$$

Or la dernière somme est égale a $\frac{g}{1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n$; il suffira donc de déterminer m par la condition

$$\frac{g}{1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m < \alpha.$$

C. Q. F. D.

On conclut facilement de cette proposition que la série (2) définit dans l'intérieur de la sphère de convergence une fonction $F(x, y, z)$ uniforme; continue, admettant des dérivées partielles de tous les ordres et satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$. Il suffit pour le voir d'employer les mêmes raisonnements que pour les séries entières dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire. [1]

On verra de même qu'une série de la forme

$$V_0 + V_{-1} + V_{-2} + \ldots + V_{-n}(x, y, z) + \ldots$$

ordonnée par rapport aux fonctions V à indices négatifs est convergente en tous les points situés à l'extérieur d'une sphère ayant pour centre l'origine, et définit en ces points une fonction uniforme, continue, admettant des dérivées partielles et satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$.

Enfin une double série de la forme

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} V_\nu(x, y, z)$$

définira une fonction jouissant des mêmes propriétés dans l'espace compris entre deux sphères concentriques ayant pour centre l'origine.

Remarque. Si l'on considère des séries ordonnées par rapport aux

---

[1] Voir par exemple *Théorie des fonctions elliptiques* de MM. Briot et Bouquet, Livre II, Chapitre I.

fonctions $V_\nu(x - x', y - y', z - z')$, les sphères de convergence ont pour centre le point (x', y', z'), comme on le voit en portant l'origine en ce point.

3. Les réciproques de ces propositions sont bien connues. Ainsi:

1°) Une fonction $F(x, y, z)$ uniforme, continue, admettant des dérivées partielles premières et secondes et satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$ en tous les points de l'espace situés à l'intérieur d'une sphère de rayon R et de centre (x', y', z') est développable en une série de la forme

$$F(x, y, z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} V_\nu(x - x', y - y', z - z'),$$

uniformément convergente en tous les points pour lesquels

$$\frac{r'}{R} = \frac{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}{R} \leqq \varepsilon, \qquad \varepsilon < 1.$$

2°) Une fonction satisfaisant aux mêmes conditions en tous les points situés à l'extérieur d'une sphère de rayon R' et de centre (x', y', z'), et ayant, pour les valeurs infiniment grandes de (x, y, z) une valeur déterminée $F(\infty)$, est développable en une série de la forme

$$F(x, y, z) = F(\infty) + \sum_{\nu=-1}^{\nu=-\infty} V_\nu(x - x', y - y', z - z')$$

uniformément convergente en tous les points pour lesquels

$$\frac{R'}{r'} \leqq \varepsilon', \qquad \varepsilon' < 1.$$

3°) Une fonction satisfaisant aux mêmes conditions dans l'espace compris entre deux sphères de rayons R et R', $R > R'$, et de même centre (x', y', z'), est développable en une série de la forme

$$F(x, y, z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} V_\nu(x - x', y - y', z - z')$$

uniformément convergente en tous les points pour lesquels on a, à la fois,

$$\frac{r'}{R} \leqq \varepsilon, \qquad \frac{R'}{r'} \leqq \varepsilon'.$$

La démonstration de ces théorèmes repose sur le théorème de GREEN. L'on peut calculer les coefficients des fonctions V_ν qui figurent dans ces développements quand on connaît la fonction $F(x, y, z)$ sur les sphères limites. (Voir, par exemple, HEINE, *Handbuch der Kugelfunctionen*, zweite Auflage, zweiter Band, p. 54 n° 3.)

Ces théorèmes seront d'ailleurs généralisés plus loin (§ 7 et suivants). Il est clair que l'on peut supposer, dans le $3^{\text{ème}}$ cas, le rayon R' de la sphère intérieure infiniment petit, ou le rayon R de la sphère extérieure infiniment grand.

4. Toutes les fonctions $F(x, y, z)$ dont il est question dans la suite satisfont à l'équation $\Delta F = 0$ en tous les points où elles sont définies. Étant donné un point P de coordonnées (a, b, c) nous appellerons domaine δ du point P l'intérieur d'une sphère de centre P et de rayon δ; les points appartenant au domaine δ du point P sont les points dont les coordonnées vérifient l'inégalité

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \leqq \delta.$$

Une fonction $F(x, y, z)$ est dite régulière au point $P(a, b, c)$ si l'on peut assigner un nombre positif δ tel que, dans le domaine δ du point P, la fonction F soit développable en une série convergente de la forme

$$F(x, y, z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} V_\nu(x-a,\ y-b,\ z-c).$$

Une fonction $F(x, y, z)$ est dite régulière au point ∞ si l'on peut assigner un nombre positif R tel que la fonction soit développable en une série de la forme

$$F(x, y, z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=-\infty} V_\nu(x, y, z) = V_0 + V_{-1} + \ldots + V_{-n} + \ldots$$

en tous les points situés à l'extérieur d'une sphère de centre o et de rayon R.

Théorème I. Une fonction uniforme régulière en tous les points de l'espace (y compris le point ∞) *est une constante.* (Théorème démontré par M. PICARD, Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris T. XC, p. 601.)

5. *Points singuliers d'une fonction uniforme.* Considérons maintenant une fonction $F(x, y, z)$ uniforme dans tout l'espace et régulière en tous les points de l'espace excepté en certains points qui seront appelés points singuliers. Soit P un de ces points ayant pour coordonnées (a, b, c), nous dirons que ce point est un pôle de degré n de la fonction F s'il existe une fonction φ de la forme

$$(4)\quad \varphi(x-a,\ y-b,\ z-c) = V_{-1}(x-a,\ y-b,\ z-c) \\ + V_{-2}(x-a,\ y-b,\ z-c) + \ldots + V_{-n}(x-a,\ y-b,\ z-c)$$

telle que la différence

$$F(x,\ y,\ z) - \varphi(x-a,\ y-b,\ z-c)$$

soit régulière au point P. Cette fonction φ sera appelée partie principale de la fonction F relative au pôle P; le premier terme de φ est de la forme

$$V_{-1}(x-a,\ y-b,\ z-c) = \frac{\lambda}{+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}};$$

le coefficient λ sera appelé le *résidu* relatif au pôle P.

Si au contraire il n'existe pas de fonction φ de la forme (4) telle que $F - \varphi$ soit régulière au point P, ce point P sera un point singulier essentiel. Deux cas peuvent alors se présenter.

1°) Ou bien un domaine quelconque δ du point P renferme d'autres points singuliers que P quelque petit que soit δ;

2°) ou bien l'on peut assigner un nombre δ tel que, dans le domaine δ du point P, il n'y ait plus d'autre point singulier que P. Nous dirons alors que P est un point singulier essentiel *isolé*. Décrivons de P comme centre avec un rayon $\delta' < \delta$ une sphère; la fonction F remplira les conditions du théorème du § 3 dans l'espace compris entre les deux sphères concentriques de rayons δ et δ' et l'on aura, dans cet espace,

$$(5)\quad F = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} V_\nu(x-a,\ y-b,\ z-c) + \sum_{\nu=-1}^{\nu=-\infty} V_\nu(x-a,\ y-b,\ z-c);$$

comme l'on peut supposer δ' infiniment petit, le développement précédent est valable dans tout le domaine δ du point P excepté au point P lui-même. Posons

$$(6) \qquad G(x, y, z \mid a, b, c) = \sum_{\nu=-1}^{\nu=-\infty} V_\nu(x-a, y-b, z-c),$$

la série du second membre étant la seconde série du développement (5). Comme cette seconde série est convergente dans le domaine δ du point P, elle l'est a fortiori en dehors de ce domaine; par conséquent l'équation (6) définit une fonction G régulière en tous les points de l'espace excepté au point P; et, d'après l'équation (5) la différence $F - G$ est régulière au point P. Ainsi, si le point P est un point singulier essentiel isolé, il existe une fonction G de la forme (6) telle que la différence $F - G$ soit régulière au point P. Cette fonction G sera encore appelée la partie principale relative au point singulier essentiel isolé P, et le coefficient de

$$\frac{1}{+\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

dans le premier terme V_{-1} de G sera le résidu relatif à ce point.

Dans ce qui précède nous avons supposé le point P à distance finie. Supposons maintenant que la fonction F ne soit pas régulière à l'infini; alors le point ∞ sera un point singulier. Nous dirons que le point ∞ est un pôle de degré n de la fonction F, s'il existe une fonction Ψ de la forme

$$(7) \qquad \Psi(x, y, z) = V_1(x, y, z) + V_2(x, y, z) + \dots + V_n(x, y, z)$$

telle que la différence $F - \Psi$ soit régulière au point ∞. S'il n'existe pas de fonction Ψ possédant cette propriété, le point ∞ sera un point singulier essentiel et deux cas pourront se présenter.

1°) Si l'on décrit une sphère de l'origine comme centre avec un rayon R, il y a toujours des points singuliers hors de cette sphère quelque grand que soit R.

2°) L'on peut assigner un rayon R tel qu'en dehors de la sphère de rayon R il n'y ait plus d'autre point singulier que le point ∞; ce point sera alors un point essentiel isolé. Décrivons une autre sphère ayant également pour centre l'origine et ayant un rayon $R' > R$ aussi grand qu'on le veut. La fonction F satisfait aux conditions du théorème du § 3 dans l'espace compris entre les deux sphères R et R' et l'on aura dans cet espace

$$F = \sum_{\nu=-1}^{\nu=-\infty} V_\nu(x,\ y,\ z) + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} V_\nu(x,\ y,\ z); \tag{8}$$

la seconde série qui procède suivant les V_ν à indices positifs est convergente dans l'intérieur de la sphère de rayon R' quelque grand que soit R'; si donc on pose

$$G(x,\ y,\ z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} V_\nu(x,\ y,\ z) \tag{9}$$

cette équation définit une fonction uniforme dans tout l'espace ayant un seul point singulier à savoir le point ∞; et, d'après la relation (8), la différence $F - G$ est régulière à l'infini. Cette fonction G sera appelée la partie principale de F relativement au point singulier essentiel isolé ∞.

Remarque. L'on pourrait ramener l'étude d'une fonction dans le voisinage du point ∞ à l'étude d'une autre fonction dans le voisinage de l'origine par la méthode des rayons vecteurs réciproques. En effet considérons une fonction $F(x,\ y,\ z)$ et posons

$$x = \frac{x'}{r'^2}, \qquad y = \frac{y'}{r'^2}, \qquad z = \frac{z'}{r'^2}$$

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad r' = +\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

$$rr' = 1;$$

la fonction

$$F_1(x',\ y',\ z') = \frac{1}{r'} F\left(\frac{x'}{r'^2},\ \frac{y'}{r'^2},\ \frac{z'}{r'^2}\right)$$

satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z'^2} = 0,$$

et quand le point $(x,\ y,\ z)$ est à l'infini le point $(x',\ y',\ z')$ est à l'origine. Nous n'avons pas suivi cette méthode parce qu'il peut arriver que la fonction $F(x, y, z)$ soit régulière à l'infini tandis que $F_1(x', y', z')$ admette pour pôle du premier degré l'origine. Ainsi la fonction

$$F(x, y, z) = \frac{A}{r} + B$$

est régulière à l'infini et

$$F_1(x', y', z') = A + \frac{B}{r'}$$

a pour pôle l'origine.

Théorème II. Une fonction qui n'a d'autres points singuliers que des pôles est égale à une somme de fonctions φ telles que la fonction (4) *augmentée d'une fonction Ψ* (7) *et d'une constante.* (Une telle fonction n'ayant que des pôles est analogue à la partie réelle d'une fonction rationnelle d'une variable imaginaire.)

Remarquons d'abord que, si une fonction $F(x, y, z)$ n'a que des pôles, le nombre de ces pôles est nécessairement limité. En effet, la fonction est régulière au point ∞ ou admet ce point pour pôle: dans les deux cas on pourra décrire de l'origine comme centre une sphère S de rayon assez grand pour qu'il n'y ait plus à distance finie aucun pôle à *l'extérieur* de cette sphère. Si donc il y avait une infinité de pôles, il y en aurait une infinité dans l'intérieur de cette sphère S; mais alors il faudrait qu'il existât dans l'intérieur de S au moins un point P tel que, dans tout domaine δ de ce point, il y eût une infinité de pôles quelque petit que soit δ, et ce point P serait un point singulier essentiel; ce qui est contre l'hypothèse.

Soient alors $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ les pôles en nombre fini ν ayant pour coordonnées respectives $(a_1, b_1, c_1), \ldots, (a_\nu, b_\nu, c_\nu)$, et

$$\varphi_k = V_{-1}^{(k)}(x - a_k, y - b_k, z - c_k) + \ldots + V_{-n_\nu}^{(k)}(x - a_k, y - b_k, z - c_k)$$

la partie principale de F relative au pôle P_k. (L'indice supérieur (k) dont sont affectées les fonctions V signifie que les constantes arbitraires qui figurent dans ces fonctions ont des valeurs particulières relatives au pôle P_k.) Soit de même

$$\Psi = V_1(x, y, z) + V_2(x, y, z) + \ldots + V_n(x, y, z)$$

la partie principale de F relative au point ∞, partie principale qui peut être nulle si la fonction F est régulière à l'infini. Alors, d'après la définition même des pôles, la différence

$$F - \varphi_1 - \varphi_2 - \ldots - \varphi_\nu - \Psi$$

sera une fonction uniforme régulière en tous les points de l'espace c'est à dire une constante C en vertu du théorème I. On a donc

$$F = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_\nu + \Psi + C;$$

ce qui démontre le théorème II.

Théorème III. La fonction F la plus générale possédant n points singuliers est la somme de n fonctions ne possédant chacune qu'un seul point singulier.

Supposons, pour plus de généralité, que les n points singuliers $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de coordonnées $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \ldots, (a_n, b_n, c_n)$ soient des points essentiels, ce seront *des points singuliers essentiels isolés.* Désignons par

$$G_k(x, y, z \mid a_k, b_k, c_k) = \sum_{\nu=-1}^{\nu=-\infty} V_\nu^{(k)}(x - a_k, y - b_k, z - c_k)$$

la partie principale de la fonction F relative au point P_k. Comme nous l'avons déjà dit, cette fonction G_k est régulière en tous les points de l'espace excepté au seul point P_k. Si nous prenons la différence

$$F - \sum_{k=1}^{k=n} G_k(x, y, z \mid a_k, b_k, c_k),$$

cette différence sera une fonction partout régulière c'est à dire une constante: donc

$$F = C^{te} + \sum_{k=1}^{k=n} G_k(x, y, z \mid a_k, b_k, c_k);$$

ce qui démontre le théorème.

Si l'un des points singuliers, par exemple (a_n, b_n, c_n), est à l'infini il faut remplacer la fonction correspondante

$$G_n(x, y, z \mid a_n, b_n, c_n),$$

par une fonction entière $G(x, y, z)$ de la forme (9) régulière en tous les points à distance finie.

Théorème IV. (Extension du théorème de M. MITTAG-LEFFLER.)

Soient

$$P_\nu(a_\nu, b_\nu, c_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty)$$

des points en nombre infini situés à distance finie tous différents les uns des autres et tels qu'en posant

$$r_\nu = + \sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2 + c_\nu^2}$$

l'on ait

$$\lim_{\nu=\infty} r_\nu = \infty.$$

Soient données d'autre part une suite indéfinie de fonctions

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$$

satisfaisant à l'équation $\Delta\varphi = 0$, *la fonction* φ_ν *étant uniforme et régulière en tous les points de l'espace excepté au point* $P_\nu(a_\nu, b_\nu, c_\nu)$ *qui est un pôle de degré* n_ν *de cette fonction.* (1)

L'on peut alors former une fonction $F(x, y, z)$ *ayant un point singulier essentiel à l'infini et admettant pour pôles les points* P_ν *de telle façon que la différence*

$$F - \varphi_\nu$$

soit régulière au point P_ν.

Nous démontrerons ce théorème en employant la méthode donnée par M. WEIERSTRASS pour le théorème de M. MITTAG-LEFFLER.

Prenons une quantité positive $\varepsilon < 1$ et une suite indéfinie de quantités positives

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$$

---

(1) Ces fonctions φ_ν sont donc de la forme (4).

ayant une somme finie; faisons de plus, comme précédemment,

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Si parmi les points P_ν se trouve l'origine; si par exemple pour $\nu = \nu'$

$$a_{\nu'} = b_{\nu'} = c_{\nu'} = 0,$$

nous poserons

$$F_{\nu'}(x, y, z) = \varphi_{\nu'}.$$

Supposons maintenant $r_\nu > 0$; alors la fonction uniforme φ_ν est régulière en tous les points de l'espace satisfaisant à la condition

$$r < r_\nu;$$

elle est donc en tous ces points développable en une série convergente de la forme

$$\varphi_\nu = \sum_{m=0}^{m=+\infty} V_m^{(\nu)}(x, y, z) \tag{10}$$

où l'indice (ν) dont sont affectées les fonctions V_m sert à indiquer que ce sont les fonctions provenant du développement de φ_ν.

Puisque cette série (10) est convergente en tous les points pour lesquels $r < r_\nu$, on peut d'après les théorèmes rappelés dans le § 3, assigner un entier positif m_ν tel que, pour toutes les valeurs de x, y, z satisfaisant à l'inégalité

$$\frac{r}{r_\nu} \leqq \varepsilon, \tag{11}$$

la valeur absolue de la somme

$$\sum_{m=m_\nu}^{m=+\infty} V_m^{(\nu)}(x, y, z)$$

soit moindre que ε_ν. Posons alors

$$F_\nu(x, y, z) = \varphi_\nu - \sum_{m=0}^{m=m_\nu-1} V_m^{(\nu)}(x, y, z),$$

on aura

$$|F_\nu(x, y, z)| < \varepsilon_\nu$$

sous la condition (11). On en conclut que la série

$$(12) \qquad F_\nu(x, y, z) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} F_\nu(x, y, z)$$

est convergente en tous les points de l'espace excepté aux points P_ν et définit une fonction satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

En effet, soit $P'(x', y', z')$ un point ne coïncidant avec aucun des points P_ν et δ un nombre positif assez petit pour que dans le domaine δ du point P' il n'y ait aucun point P_ν; l'on pourra alors, en désignant par α un nombre donné à l'avance aussi petit que l'on veut, déterminer un nombre entier μ tel que si

$$\nu \geqq \mu$$

on ait

$$\frac{r}{r_\nu} \leqq \varepsilon, \qquad |F_\nu(x, y, z)| < \varepsilon_\nu$$

pour tous les points du domaine δ de P' et de plus

$$\sum_{\nu=\mu}^{\nu=\infty} \varepsilon_\nu < \alpha, \qquad \left|\sum_{\nu=\mu}^{\nu=\infty} F_\nu(x, y, z)\right| < \alpha.$$

La série (12) est donc uniformément convergente en tous les points du domaine δ de P'; on en conclut immédiatement qu'elle définit une fonction $F(x, y, z)$ régulière au point P'.

Soit maintenant P_λ un des points P_ν et δ un nombre tel que, dans le domaine δ du point P_λ, il n'y ait pas d'autre point P_ν; alors d'après ce qui précède on a, dans ce domaine δ,

$$F(x, y, z) = F_\lambda(x, y, z) + F'(x, y, z)$$

où $F'(x, y, z)$ désigne une fonction régulière au point P_λ; et d'après la forme de $F_\lambda(x, y, z)$ on voit que la différence

$$F(x, y, z) - \varphi_\lambda$$

est régulière au point P_λ.

La fonction F définie par la série (12) satisfait donc bien aux conditions de l'énoncé. La fonction la plus générale satisfaisant à ces conditions est

$$F(x, y, z) + G(x, y, z),$$

G étant une fonction entière de la forme (9).

Théorème de Green. Soient U et V deux fonctions quelconques de x, y, z finies continues et admettant des dérivées premières et secondes en tous les points situés dans l'intérieur d'une surface fermée S et sur cette surface elle-même; on a l'équation

$$(13) \qquad \iiint (U\Delta V - V\Delta U)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_S \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) d\sigma$$

où la première intégrale est étendue à tout le volume limité par la surface S, la deuxième à toute la surface S; le symbole $d\sigma$ désigne un élément de la surface S, $\frac{\partial V}{\partial n}$ la dérivée de V prise suivant la portion de normale extérieure à S, et $\frac{\partial U}{\partial n}$ la dérivée de U suivant cette même normale. En appelant α, β, γ les cosinus directeurs de la portion de normale à la surface S dirigée vers l'extérieur du volume limité par S, on a

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \alpha\frac{\partial V}{\partial x} + \beta\frac{\partial V}{\partial y} + \gamma\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \alpha\frac{\partial U}{\partial x} + \beta\frac{\partial U}{\partial y} + \gamma\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Théorème V. Si une fonction $F(x, y, z)$ satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$ est uniforme dans l'intérieur d'une surface S et régulière en tous les points situés dans l'intérieur de cette surface et sur la surface, l'intégrale double

$$\iint\limits_S \frac{\partial F}{\partial n}\, d\sigma$$

étendue à toute la surface S est nulle.

Pour le voir, il suffit de faire dans l'équation générale (13)

$$V = 1, \qquad U = F$$

et par suite

$$\Delta V = 0, \qquad \Delta U = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial n} = 0;$$

l'on obtient immédiatement l'équation

$$\iint\limits_S \frac{\partial F}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Théorème VI. Si une fonction $F(x, y, z)$ satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$ admet un point P pour pôle ou pour point singulier essentiel isolé, l'intégrale double

$$(14) \qquad \iint \frac{\partial F}{\partial n} d\sigma$$

étendue à la surface d'une sphère ayant pour centre P et ne contenant pas d'autre point singulier que P est égale au résidu de F rélatif au point P multiplié par -4π.

Soient (a, b, c) les coordonnées du point P et S une sphère de centre P et de rayon ρ dans l'intérieur et sur la surface de laquelle il n'y ait pas d'autres points singuliers que P; on a pour tous les points du domaine ρ du point P

$$(15) \qquad F(x, y, z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} V_\nu(x-a, y-b, z-c).$$

Sur la sphère S

$$x - a = \rho \cos\theta$$

$$y - b = \rho \sin\theta \cos\varphi$$

$$z - c = \rho \sin\theta \sin\varphi$$

$$0 \leqq \theta \leqq \pi, \qquad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi.$$

Portant ces valeurs dans le développement (15), ce développement prend la forme

$$F = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \rho^\nu Y_\nu(\theta, \varphi) + \sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} \rho^{-\nu} Y_{\nu-1}^{(1)}(\theta, \varphi);$$

par suite puisque la normale à S est le rayon

$$(15') \qquad \frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial \rho} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \nu\rho^{\nu-1} Y_\nu(\theta, \varphi) - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \nu\rho^{-(\nu+1)} Y_{\nu-1}^{(1)}(\theta, \varphi).$$

Portons ce développement de $\frac{\partial F}{\partial n}$ dans l'intégrale double (14) en remplaçant $d\sigma$ par sa valeur

$$\rho^2 \sin\theta d\theta d\varphi;$$

et rappelons-nous que l'on a

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y_\nu(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta = 0$$

tant que ν est différent de zéro, Y_ν désignant une fonction quelconque de LAPLACE. Nous voyons alors que dans l'intégrale (14) tous les termes du développement (15') qui contiennent des fonctions Y_ν avec un indice différent de zéro disparaissent, et il reste

$$\iint \frac{\partial F}{\partial n} d\sigma = -\iint Y_0^{(1)}(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Mais $Y_0^{(1)}(\theta, \varphi)$ est une constante qui n'est autre chose que le ***résidu*** de F relatif au point P; on a donc

$$\iint \frac{\partial F}{\partial n} d\sigma = - Y_0^{(1)} \iint \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = - Y_0^{(1)} . 4\pi;$$

ce qui démontre le théorème.

Théorème VII. Soit $F(x, y, z)$ une fonction vérifiant l'équation $\Delta F = 0$ uniforme dans l'intérieur d'une surface S et régulière en tous les *points situés dans l'intérieur de S et sur S excepté en p points intérieurs $P_1, P_2, \ldots, P_p$; l'intégrale double*

$$\iint_S \frac{\partial F}{\partial n} d\sigma$$

étendue à la surface S est égale à la somme des résidus relatifs aux points singuliers $P_1, P_2, \ldots, P_p$ multipliée par -4π.

Entourons chaque point P_k d'une sphère S_k située à l'intérieur de S ayant pour centre le point P_k et un rayon assez petit pour qu'elle ne rencontre aucune des autres sphères S_i ayant pour centres les autres points P_i. Si nous considérons le volume V situé à l'intérieur de S et à l'extérieur des sphères $S_1, S_2, \ldots, S_p$, la fonction F est régulière en tous les points de ce volume et, d'après le théorème V, l'intégrale double

$$\iint \frac{\partial F}{\partial n} d\sigma$$

étendue à la surface limitant ce volume c'est à dire aux surfaces

$$S,\ S_1,\ S_2, \ldots, S_p \tag{16}$$

est égale à zéro. Or cette intégrale double est la somme de $(p+1)$ intégrales étendues respectivement aux surfaces (16); on a donc

$$\iint_S \frac{\partial F}{\partial n} d\sigma + \sum_{k=1}^{k=p} \iint_{S_k} \frac{\partial F}{\partial n} d\sigma = 0 \tag{17}$$

les indices dont sont affectées les intégrales indiquant les surfaces auxquelles elles sont étendues. Mais d'après le théorème précédent VI, on a

$$\iint_{S_k} \frac{\partial F}{\partial n} d\sigma = 4\pi R_k, \tag{18}$$

R_k étant le résidu relatif au point P_k; cette intégrale (18) est ici égale à $+4\pi R_k$, car, dans cette intégrale, la dérivée $\frac{\partial F}{\partial n}$ est prise vers l'extérieur du volume V, c'est à dire vers *l'intérieur* de la sphère S_k. L'on a donc enfin, d'après l'équation (17),

$$\iint\limits_S \frac{\partial F}{\partial n} d\sigma = -4\pi(R_1 + R_2 + \ldots + R_p);$$

ce qui démontre la proposition.

6. *Application.* Soit une fonction $F(x, y, z)$ uniforme dans tout l'espace ayant à distance finie p points singuliers $P_1, P_2, \ldots, P_p$ de résidus respectifs $R_1, R_2, \ldots, R_p$; pour des valeurs suffisamment grandes de

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

cette fonction est développable en une double série de la forme

$$F = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} V_\nu(x, y, z) \tag{19}$$

où la fonction $V_{-1}(x, y, z)$ est égale à $\frac{R}{r}$, R étant une constante. L'on a alors la relation

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_p. \tag{20}$$

En effet décrivons de l'origine o comme centre une sphère S avec un rayon ρ assez grand pour que tous les points $P_1, P_2, \ldots, P_p$ soient à l'intérieur de cette sphère. D'après le théorème précédent, on a

$$\iint\limits_S \frac{\partial F}{\partial n} d\sigma = -4\pi(R_1 + R_2 + \ldots + R_p). \tag{21}$$

Mais si l'on décrit une sphère S' de centre o passant par celui des points P_k qui est le plus éloigné de o, la fonction F sera, à l'extérieur de cette sphère S', représentée par la série (19); ce développement (19) conviendra donc en tous les points de la sphère S qui est extérieure à S' par hypothèse. Or, sur la sphère S, on a

$$x = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\theta \cos\varphi, \qquad z = \rho \sin\theta \sin\varphi$$

$$d\sigma = \rho^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

(19′)
$$F = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \rho^\nu Y_\nu(\theta, \varphi) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \rho^{-\nu} Y^{(1)}_{\nu-1}(\theta, \varphi);$$

dans ce développement (19′) la fonction $Y^{(1)}_0(\theta, \varphi)$ est égale précisément à R. On a de plus sur cette sphère S

(19″)
$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial \rho} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \nu\rho^{\nu-1} Y_\nu(\theta, \varphi) - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \nu\rho^{-(\nu+1)} Y^{(1)}_{\nu-1}(\theta, \varphi).$$

Portant ce développement dans l'intégrale (21) nous verrons comme précédemment (Théorème VI) que cette intégrale se réduit à

$$-4\pi Y^{(1)}_0(\theta, \varphi) = -4\pi R.$$

L'on en conclut la relation (20) qu'il s'agissait de démontrer. Cette relation est entièrement semblable à une relation bien connue qui se présente dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire et que j'ai démontrée précédemment (Acta Mathematica T. 1, p. 109, Théorème I).

Théorème VIII. Soit $F(x, y, z)$ une fonction vérifiant l'équation $\Delta F = 0$ uniforme dans l'intérieur d'une surface fermée S et régulière en tous les points situés dans l'intérieur de S et sur S; l'on a la relation

(22)
$$F(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(T \frac{\partial F}{\partial n} - F \frac{\partial T}{\partial n} \right) d\sigma$$

où (a, b, c) est un point fixe quelconque situé à l'intérieur de S et où

(22′)
$$T = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

On trouvera, par exemple, la démonstration de cette formule dans le *Handbuch der Kugelfunctionen* de HEINE, zweite Auflage, zweiter Band,

p. 93; les dérivées $\frac{\partial T}{\partial n_1}$ qui figurent dans la formule de HEINE sont prises suivant la normale *intérieure;* on a donc ici

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{\partial T}{\partial n_1}, \qquad \frac{\partial F}{\partial n} = -\frac{\partial F}{\partial n_1}.$$

Voici d'abord une extension intéressante du théorème précédent.

Théorème IX. Si une fonction $F(x, y, z)$ vérifiant l'équation $\Delta F = 0$ est uniforme en d e h o r s *d'une surface fermée S et est régulière en tous les points situés sur cette surface et en dehors de cette surface y compris le point ∞, l'on a*

$$(23) \qquad F(a, b, c) - F(\infty) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left(T\frac{\partial F}{\partial n_1} - F\frac{\partial T}{\partial n_1}\right) d\sigma.$$

Dans cette formule $F(\infty)$ désigne la valeur que prend la fonction F à l'infini, a, b, c sont les coordonnées d'un point quelconque extérieur à S, T est défini par la relation (22′) et les dérivées $\frac{\partial F}{\partial n_1}$, $\frac{\partial T}{\partial n_1}$ sont prises vers *l'intérieur* de S.

Pour démontrer cette formule, remarquons que, la fonction F étant régulière à l'infini, on peut assigner un nombre ρ tel qu'en tous les points de l'espace extérieurs à une sphère de centre o et de rayon ρ, la fonction F soit développable en une série convergente de la forme

$$(24) \qquad F(x, y, z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} V_{-\nu}(x, y, z), \qquad V_0 = F(\infty).$$

Considérons alors une sphère S' de centre o et de rayon $\rho' > \rho$ contenant dans son intérieur la surface S et le point (a, b, c); la série précédente (24) sera, d'après ce que nous avons vu, uniformément convergente en tous les points situés sur cette sphère S'. Appelons V le volume situé à l'intérieur de cette sphère S' et à l'extérieur de la surface donnée S et appliquons le théorème VIII, éq. (22) à ce volume. Nous obtenons l'équation

$$(25) \quad F(a, b, c) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left(T\frac{\partial F}{\partial n_1} - F\frac{\partial T}{\partial n_1}\right) d\sigma + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S'} \left(T\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial T}{\partial n}\right) d\sigma$$

où la première intégrale est étendue à la surface S, la deuxième à la surface de la sphère S', surfaces qui constituent la limite du volume V; l'indice I dont est affecté n dans la première intégrale provient de ce que l'extérieur de V est l'intérieur de S. Nous allons évaluer maintenant la seconde de ces intégrales

$$(26) \qquad \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S'}\left(T\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial T}{\partial n}\right)d\sigma$$

et montrer qu'elle est égale à $F(\infty)$.

Sur la surface de la sphère S' on a

$$x = \rho'\cos\theta, \qquad y = \rho'\sin\theta\cos\varphi, \qquad z = \rho'\sin\theta\sin\varphi,$$

$$d\sigma = \rho'^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

et d'après (24)

$$(24') \qquad F(x, y, z) = F(\infty) + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{Y_\nu(\theta, \varphi)}{\rho'^{\nu+1}}$$

$$(24'') \qquad \frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial \rho'} = -\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(\nu + 1)\frac{Y_\nu(\theta, \varphi)}{\rho'^{\nu+2}}.$$

La fonction T devient en faisant

$$a^2 + b^2 + c^2 = r'^2$$

$$\cos\gamma = \frac{ax + by + cz}{r'\rho'} = \frac{a\cos\theta + b\sin\theta\cos\varphi + c\sin\theta\sin\varphi}{r'}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{\rho'^2 - 2\rho' r'\cos\gamma + r'^2}} = \frac{1}{\rho'}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2r'}{\rho'}\cos\gamma + \frac{r'^2}{\rho'^2}}};$$

en développant le coefficient de $\frac{1}{\rho'}$ suivant les puissances de $\frac{r'}{\rho'}$ qui est moindre que l'unité, l'on obtient, d'après une formule de LEGENDRE

$$T = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{r'^\nu}{\rho'^{\nu+1}}P_\nu(\cos\gamma)$$

où P_ν est un polynôme de LEGENDRE. Dans ce développement, le coefficient de $\frac{1}{\rho'^{\nu+1}}$

$$r'^\nu P_\nu(\cos\gamma)$$

considéré comme fonction de θ et φ est, comme l'on sait, une fonction de LAPLACE que nous désignerons par $Y_\nu^{(1)}(\theta, \varphi)$ en nous rappelant que

$$Y_0^{(1)}(\theta, \varphi) = P_0(\cos\gamma) = 1.$$

Alors T s'écrira

$$T = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{Y_\nu^{(1)}(\theta, \varphi)}{\rho'^{\nu+1}} \tag{27}$$

d'où

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial \rho'} = -\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (\nu + 1) \frac{Y_\nu^{(1)}(\theta, \varphi)}{\rho'^{\nu+2}}. \tag{27'}$$

Portons ces développements (24'), (24''), (27) et (27') dans l'intégrale (26). Nous voyons d'abord que les termes de la forme

$$Y_\nu(\theta, \varphi) Y_\nu^{(1)}(\theta, \varphi)$$

disparaissent sous le signe $\int\int$; quant aux termes en

$$Y_\nu(\theta, \varphi) Y_{\nu'}^{(1)}(\theta, \varphi), \qquad \nu \gtrless \nu'$$

leurs coefficients ne sont pas nuls, mais leurs intégrales sont nulles d'après la formule connue

$$\iint Y_\nu(\theta, \varphi) Y_{\nu'}^{(1)}(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 0. \qquad \nu \gtrless \nu'$$

Le seul terme qui subsiste après toutes ces réductions dans l'intégrale (26) est

$$\frac{1}{4\pi}\iint \frac{F(\infty)}{\rho'^2} Y_0^{(1)}(\theta, \varphi) d\sigma,$$

c'est à dire $F(\infty)$, puisque $Y_0^{(1)}(\theta, \varphi)$ est égal à l'unité. La formule (23) est donc démontrée.

7. Nous allons maintenant généraliser les théorèmes du § 3 en nous appuyant sur les formules précédentes. Tout d'abord nous considérerons un cas simple qui sera d'une extension facile.

Imaginons deux sphères S_1 et S_2 qui ne sont pas entièrement intérieures l'une à l'autre et qui ont pour centres respectifs les points

$$P_1(x_1, y_1, z_1), \qquad P_2(x_2, y_2, z_2);$$

soit d'autre part $F(x, y, z)$ une fonction uniforme dans tout l'espace E extérieur à la fois aux deux sphères et régulière en tous les points de cet espace y compris le point ∞; cette fonction est développable en une double série de la forme

$$(28) \qquad F(x, y, z) = F(\infty) + \sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} V_{-\nu}^{(1)}(x - x_1, y - y_1, z - z_1) + \sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} V_{-\nu}^{(2)}(x - x_2, y - y_2, z - z_2)$$

convergente en tous les points de l'espace E.

Considérons la surface fermée S constituée par les portions des deux sphères S_1 et S_2 qui limitent l'espace E et appliquons à cette surface S le théorème précédent, éq. (23). En désignant par (a, b, c) un point quelconque de l'espace E, nous avons, d'après (23),

$$F(a, b, c) = F(\infty) + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left(T\frac{\partial F}{\partial n_1} - F\frac{\partial T}{\partial n_1}\right) d\sigma.$$

Partageons l'intégrale double du second membre en deux parties se rapportant respectivement aux portions des deux sphères S_1 et S_2 qui limitent l'espace E; nous aurons

$$(28') \qquad F(a, b, c) = F(\infty) + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1} \left(T\frac{\partial F}{\partial n_1} - F\frac{\partial T}{\partial n_1}\right) d\sigma + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_2} \left(T\frac{\partial F}{\partial n_2} - F\frac{\partial T}{\partial n_2}\right) d\sigma.$$

La première de ces intégrales

$$(29) \qquad \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1}\left(T\frac{\partial F}{\partial n_1} - F\frac{\partial T}{\partial n_1}\right)d\sigma$$

est étendue à la portion de la sphère S_1 qui limite l'espace E; si les deux sphères S_1 et S_2 ne se rencontrent pas, cette intégrale est étendue à toute la surface de S_1; mais si elles se rencontrent l'intégrale n'est étendue qu'à la partie de la surface de S_1 qui est *extérieure* à S_2. Dans l'intégrale (29) le point (x, y, z) est sur la surface de la sphère S_1; en appelant ρ_1 le rayon de cette sphère, l'on aura donc

$$\rho_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2};$$

désignons de même par r_1 la distance du point (a, b, c) au centre (x_1, y_1, z_1) de la sphère S_1

$$r_1 = \sqrt{(a - x_1)^2 + (b - y_1)^2 + (c - z_1)^2},$$

et appelons γ_1 l'angle que font entre elles les droites joignant les deux points (a, b, c), (x, y, z) au centre (x_1, y_1, z_1):

$$\cos\gamma_1 = \frac{(x - x_1)(a - x_1) + (y - y_1)(b - y_1) + (z - z_1)(c - z_1)}{r_1\rho_1}.$$

Nous aurons

$$T = \frac{1}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 - 2r_1\rho_1\cos\gamma_1 + \rho_1^2}},$$

et comme sur la surface S_1

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \varepsilon_1, \qquad \varepsilon_1 < 1$$

on peut développer T en une série uniformément convergente

$$T = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}\frac{\rho_1^\nu}{r_1^{\nu+1}}P_\nu(\cos\gamma_1)$$

où P_ν est un polynôme de LEGENDRE. Quand le point (x, y, z) se déplace sur la normale à la sphère S_1, $\cos\gamma_1$ et r_1 restent constants; donc

$$\frac{\partial T}{\partial n_1} = -\frac{\partial T}{\partial \rho_1} = -\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{\nu\rho_1^{\nu-1}}{r_1^{\nu+1}} P_\nu(\cos\gamma_1);$$

l'on a, par suite de ces développements de T et $\frac{\partial T}{\partial n_1}$,

$$T\frac{\partial F}{\partial n_1} - F\frac{\partial T}{\partial n_1} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \rho_1^{\nu-1}\left[\rho_1 \frac{\partial F}{\partial n_1} + \nu F\right]\frac{P_\nu(\cos\gamma_1)}{r_1^{\nu+1}}. \tag{30}$$

Dans le terme général de cette dernière série (30) le facteur

$$\frac{P_\nu(\cos\gamma_1)}{r_1^{\nu+1}}$$

dépend seul de (a, b, c); considéré comme fonction de a, b, c ce facteur est une fonction

$$V_{-(\nu+1)}(a - x_1,\ b - y_1,\ c - z_1) \tag{31}$$

ayant pour coefficients des fonctions de x, y, z. En portant le développement (30) dans l'intégrale (29), l'on a

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1}\left(T\frac{\partial F}{\partial n_1} - F\frac{\partial T}{\partial n_1}\right)d\sigma = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1} \rho_1^{\nu-1}\left[\rho_1\frac{\partial F}{\partial n_1} + \nu F\right]\frac{P_\nu(\cos\gamma_1)}{r_1^{\nu+1}}\,d\sigma.$$

Le terme général du second membre considéré comme fonction de a, b, c est encore une fonction

$$V^{(1)}_{-(\nu+1)}(a - x_1,\ b - y_1,\ c - z_1)$$

déduite de la fonction (31) en multipliant cette fonction par le facteur

$$\frac{1}{4\pi}\rho_1^{\nu-1}\left[\rho_1\frac{\partial F}{\partial n_1} + \nu F\right]d\sigma$$

qui dépend de x, y, z et non de a, b, c, et effectuant l'intégration, ce qui n'a d'autre effet que de modifier les coefficients de la fonction (31). L'on a donc enfin

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1}\left(T\frac{\partial F}{\partial n_1} - F\frac{\partial T}{\partial n_1}\right)d\sigma = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} V^{(1)}_{-(\nu+1)}(a - x_1,\ b - y_1,\ c - z_1);$$

on trouvera de même

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_2}\left(T\frac{\partial F}{\partial n_1} - F\frac{\partial T}{\partial n_1}\right)d\sigma = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} V^{(2)}_{-(\nu+1)}(a - x_2,\ b - y_2,\ c - z_2);$$

en portant ces développements dans la formule (28′) nous obtiendrons la formule (28) à démontrer, sauf le changement de x, y, z en a, b, c.

L'on peut faire sur les développements en série (28) les mêmes remarques que sur les développements en série d'une fonction d'une variable imaginaire holomorphe à l'extérieur de deux cercles: [1]

1° Si les deux sphères S_1 et S_2 n'ont aucun point commun, le développement (28) n'est possible que d'une manière; les fonctions

$$V^{(1)}_{-\nu}(x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1), \qquad V^{(2)}_{-\nu}(x - x_2,\ y - y_2,\ z - z_2)$$

sont entièrement déterminées.

2° Si les deux sphères S_1 et S_2 se coupent ou seulement se touchent, le développement (28) est possible *d'une infinité de manières;* en d'autres termes on peut former une infinité de séries de la forme (28) ayant pour *somme zéro.* Soit en effet

$$\varphi(x,\ y,\ z)$$

une fonction satisfaisant à l'équation $\Delta\varphi = 0$ uniforme dans l'espace situé en dehors du solide commun aux deux sphères et régulière en tous les points de cet espace. Cette fonction φ sera à l'extérieur de la sphère S_1 développable en une série de la forme

$$(32) \qquad \varphi(x,\ y,\ z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} V^{(3)}_{-\nu}(x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1);$$

---

[1] Voir une note *Sur certains développements en série de puissances* que j'ai publiée dans le Bulletin de la Société Mathématique de France, T. XI, 1883.

à l'extérieur de S_2, cette même fonction sera développable en une série de la forme

$$(32') \qquad \varphi(x, y, z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} V_{-\nu}^{(4)}(x - x_2, y - y_2, z - z_2);$$

et l'on a de plus $V_0^{(3)} = V_0^{(4)} = \varphi(\infty)$. La différence des deux séries (32) et 32')

$$S(x, y, z) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} V_{-\nu}^{(3)}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

$$- \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} V_{-\nu}^{(4)}(x - x_2, y - y_2, z - z_2)$$

est une série convergente en dehors de S_1 et S_2 *ayant pour somme zéro.* On peut donc ajouter cette série $S(x, y, z)$ au développement (28) sans que ce développement cesse de représenter $F(x, y, z)$.

Mais l'on peut préciser l'indétermination du développement (28) et montrer que, dans ce développement, les fonctions

$$V_{-1}^{(1)}(x - x_1, y - y_1, z - z_1), \ldots, V_{-\nu}^{(1)}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

peuvent être prises arbitrairement pour toutes les valeurs de ν inférieures à un nombre déterminée $n + 1$ aussi grand que l'on voudra. Pour mettre ce fait en évidence désignons en général par

$$(33) \qquad \frac{\partial^{p+q+r} S(x, y, z)}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$$

la série déduite de $S(x, y, z)$ en prenant la dérivée $\frac{\partial^{p+q+r}}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$ de chacun des termes de $S(x, y, z)$; toutes les séries (33) seront de la même forme que la série $S(x, y, z)$ et la somme de chacune d'elles sera aussi *zéro.* Nous pouvons de plus supposer que, dans $S(x, y, z)$, la fonction

$$V_{-1}^{(3)}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

qui est égale à

$$(34) \qquad \frac{A}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}$$

ne soit pas identiquement nulle, c'est à dire que la constante A soit différente de zéro; par exemple, pour qu'il en soit ainsi, il suffit de prendre pour la fonction $\varphi(x, y, z)$ qui a servi à former $S(x, y, z)$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}},$$

α, β, γ étant les coordonnées d'un point commun aux deux sphères; alors $A = 1$. Cela posé nous pouvons, sans changer la somme de la série (28), lui ajouter le développement

$$\sum_{p,q,r} \lambda_{p,q,r} \frac{\partial^{p+q+r} S(x, y, z)}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières positives ou nulles des trois nombres p, q, r sous la condition

$$p + q + r \leqq n - 1,$$

les quantités $\lambda_{p,q,r}$ étant des paramètres arbitraires. Mais comme la fonction la plus générale

$$V_{-\nu}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

est composée linéairement avec les dérivées d'ordre $\nu - 1$ de la fonction (34), l'on pourra déterminer les paramètres $\lambda_{p,q,r}$ de telle façon que, dans la nouvelle série

$$S(x, y, z) + \sum_{p,q,r} \lambda_{p,q,r} \frac{\partial^{p+q+r} S(x, y, z)}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r},$$

les $2\nu - 1$ coefficients qui figurent dans chacune des fonctions

$$V_{-\nu}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

où $\nu = 1, 2, \ldots, n$, prennent des valeurs données d'avance. Ces coefficients peuvent donc être pris arbitrairement comme nous l'avons annoncé.

8. Le théorème du § 7 peut être généralisé de la façon suivante.

Soient p sphères de centres respectifs

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_p, y_p, z_p)$$

telles que deux d'entre elles ne soient pas entièrement intérieures l'une à l'autre; toute fonction $F(x, y, z)$ vérifiant l'équation $\Delta F = 0$, uniforme dans l'espace situé à l'extérieur de toutes les sphères et régulière en tous les points de cet espace (y compris le point ∞), est développable dans cet espace en une série convergente de la forme

$$(35) \qquad F(x, y, z) = F(\infty) + \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} V_{-\nu}^{(k)}(x - x_k, y - y_k, z - z_k).$$

Suivant que les sphères considérées ont des points communs ou non, ce développement est possible d'une infinité de manières ou d'une seule manière.

La démonstration de ce théorème est la même que pour le cas de deux sphères. Dans le cas actuel, l'intégrale du second membre de l'équation (23) se partage en p intégrales à chacune desquelles on applique la même analyse qu'à l'intégrale (29).

9. Il peut arriver que l'espace extérieur à la fois à toutes les sphères considérées se compose de plusieurs portions distinctes

$$E, E', E'', \ldots,$$

telles que l'on ne puisse passer de l'une à l'autre sans rencontrer la surface de l'une des sphères. Imaginons qu'il en soit ainsi et considérons l'un de ces espaces E par exemple; supposons pour fixer les idées que l'espace E ne s'étende pas à l'infini. Soit $F(x, y, z)$ une fonction uniforme dans E et régulière en tous les points de E. L'espace E sera limité par une surface fermée S formée de portions de sphères tournant leurs convexités vers l'intérieur de E; l'on aura, en désignant par (a, b, c) un point quelconque de l'espace E et appliquant la formule (22),

$$F(a,\ b,\ c) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left(T\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial T}{\partial n}\right) d\sigma; \tag{36}$$

l'intégrale du second membre se composera de p parties étendues respectivement aux portions des p sphères considérées qui constituent la surface S. En appliquant à chacune de ces parties l'analyse employée précédemment pour l'intégrale (29), on verra que, en tous les points de l'espace E, la fonction F est représentée par une série de la forme

$$F(a,\ b,\ c) = \sum_{k=1}^{k=p}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} V_{-\nu}^{(k)}(a - x_k,\ b - y_k,\ c - z_k). \tag{37}$$

Si le point $(a,\ b,\ c)$ appartient à un autre des espaces E', E'', ... etc. situés à l'extérieur des p sphères, la série du second membre de l'équation (37) est encore convergente, mais sa somme est alors *nulle;* en effet dans ce cas l'intégrale du second membre de (36) est égale *à zéro.* Si l'espace E était indéfini les mêmes faits se produiraient. Une fonction F uniforme dans E et régulière en tous les points de E serait, dans cet espace, représentée par une série de la forme (37) augmentée du terme constant $F(\infty)$. Cette série serait encore convergente si le point $(x,\ y,\ z)$ était dans un des autres espaces E', E'', ... etc., mais sa somme serait alors nulle.

On voit que les résultats précédents sont entièrement analogues à ceux que j'ai indiqués pour les fonctions d'une variable imaginaire (Comptes Rendus, 1er Mai 1882) et dont j'ai donné des exemples dans les Acta Mathematica, T. 1, p. 145.

10. Pour terminer ce sujet, j'énoncerai une proposition plus générale encore.

Considérons l'espace formé par tous les points situés à la fois à l'extérieur de p sphères de centres

$$(x_1,\ y_1,\ z_1),\ (x_2,\ y_2,\ z_2),\ \ldots,\ (x_p,\ y_p,\ z_p)$$

et à l'intérieur de q sphères de centres

$$(x_{p+1},\ y_{p+1},\ z_{p+1}),\ (x_{p+2},\ y_{p+2},\ z_{p+2}),\ \ldots,\ (x_{p+q},\ y_{p+q},\ z_{p+q});$$

cet espace pourra être composé de plusieurs portions séparées E, E', E'', ... etc. telles que l'on ne puisse passer de l'une à l'autre sans rencontrer la surface de l'une des sphères; une fonction $F(x, y, z)$ vérifiant l'équation $\Delta F = 0$, uniforme dans l'espace E et régulière en tous les points de E est représentée en tous ces points par une série de la forme

$$(38) \qquad F(x, y, z) = C + \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} V_{-\nu}^{(k)}(x - x_k, y - y_k, z - z_k)$$
$$+ \sum_{h=p+1}^{h=p+q} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} V_{\nu}^{(h)}(x - x_h, y - y_h, z - z_h);$$

C désignant une constante. Cette série contient comme on le voit les fonctions V d'arguments

$$x - x_k, \; y - y_k, \; z - z_k \qquad (k=1, 2, \ldots, p)$$

avec des indices négatifs, et les fonctions V d'arguments

$$x - x_h, \; y - y_h, \; z - z_h \qquad (h=p+1, p+2, \ldots, p+q)$$

avec des indices positifs. La démonstration repose sur l'emploi des formules (22) ou (23) suivant que E est fini ou s'étend à l'infini.

Ces formules générales paraissent devoir présenter de l'intérêt dans les problèmes de potentiel ou d'équilibre de température relatifs à des corps limités par des portions de surfaces sphériques.

L'on pourrait former un développement général analogue à (38) et procédant suivant les fonctions de LAMÉ, pour représenter des fonctions F uniformes et régulières dans un espace limité par des portions d'ellipsoïde. L'on obtiendrait ainsi des résultats analogues à ceux que j'ai indiqués pour les fonctions d'une variable imaginaire (Comptes Rendus, séance du 9 Avril 1883). Mais je laisse cette question de côté pour le moment, afin d'appliquer à une classe spéciale de fonctions F les théorèmes indiqués dans cette première partie.

Deuxième partie.

Sur les fonctions de x, y, z satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$ et possédant trois groupes de périodes simultanées.

1. Soient

$$A(a, b, c), \quad A'(a', b', c'), \quad A''(a'', b'', c'')$$

trois points non situés dans un même plan avec l'origine O des coordonnées, c'est à dire tels que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. Les fonctions dont nous nous occupons dans cette deuxième partie sont des fonctions uniformes $F(x, y, z)$ des trois variables réelles x, y, z satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$ et telles que l'on ait

$$(1) \quad F(x + ma + m'a' + m''a'', \ y + mb + m'b' + m''b'', \ z + mc + m'c' + m''c'') \\ = F(x, y, z);$$

m, m', m'' étant des entiers quelconques.

Ces fonctions présentent la plus grande analogie avec la partie réelle d'une fonction doublement périodique d'une variable imaginaire.

Comme l'on peut toujours changer les signes de a, b, c sans rien changer à la propriété fondamentale exprimée par l'équation (1), attendu que m est un entier positif, négatif ou nul, nous pouvons supposer que l'on ait choisi les signes des coordonnées des trois points A, A', A'' de façon que le déterminant D soit positif. Si l'on désigne par l, l', l'' les trois longueurs OA, OA', OA'' et par

$$\alpha, \beta, \gamma; \qquad \alpha', \beta', \gamma'; \qquad \alpha'', \beta'', \gamma''$$

les cosinus des angles que font respectivement les directions OA, OA', OA'' avec les trois axes coordonnés, l'on aura

$$D = ll'l''d$$

où

$$d = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}, \quad d > 0.$$

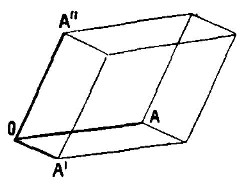
Appelons θ l'angle $A'OA''$, θ' l'angle $A''OA$, θ'' l'angle AOA'; alors la perpendiculaire au plan $A'OA''$ menée du côté de OA a pour cosinus directeurs

$$(2) \qquad \lambda = \frac{\beta'\gamma'' - \gamma'\beta''}{\sin\theta}, \qquad \mu = \frac{\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma''}{\sin\theta}, \qquad \nu = \frac{\alpha'\beta'' - \beta'\alpha''}{\sin\theta};$$

en effet la quantité

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$$

est positive puisqu'elle est égale à $\frac{d}{\sin\theta}$. Nous déduisons de (2), par une permutation circulaire des accents, les cosinus directeurs λ', μ', ν' de la portion de perpendiculaire au plan $A''OA$ située par rapport à ce plan du même côté que OA'; enfin nous obtiendrons de même les cosinus directeurs de la troisième perpendiculaire λ'', μ'', ν'' à la face AOA'. Si nous construisons un parallélépipéde sur les trois lignes OA, OA', OA'', nous voyons que λ, μ, ν sont les cosinus directeurs de la portion de normale à la face $A'OA''$ dirigée vers l'intérieur du parallélépipéde; la même chose a lieu pour λ', μ', ν'; λ'', μ'', ν''. Nous appellerons *parallélépipéde élémentaire* le parallélépipéde que nous venons de construire ou tout autre parallélépipéde qui est déduit de celui-là par une translation. Au point de vue analytique, les points situés dans un parallélépipéde élémentaire sont les points ayant pour coordonnées



$$x = x_0 + \varepsilon a + \varepsilon' a' + \varepsilon'' a''$$

$$y = y_0 + \varepsilon b + \varepsilon' b' + \varepsilon'' b''$$

$$z = z_0 + \varepsilon c + \varepsilon' c' + \varepsilon'' c''$$

où (x_0, y_0, z_0) sont des constantes, ε, ε', ε'' des nombres positifs variables vérifiant les conditions

$$0 \leqq \varepsilon < 1, \qquad 0 \leqq \varepsilon' < 1, \qquad 0 \leqq \varepsilon'' < 1.$$

D'après l'équation fondamentale (1), dès qu'une fonction $F(x, y, z)$ est connue dans un parallélépipède élémentaire, elle est, par là-même, connue dans tout l'espace.

Théorème I. Une fonction F qui est régulière en tous les points d'un parallélépipède élémentaire est une constante.

En effet une pareille fonction serait régulière en tous les points de l'espace, d'après la relation (1), et serait une constante en vertu du théorème I de la première partie.

D'après ce théorème, une fonction F admet nécessairement des singularités dans un parallélépipède élémentaire. Plaçons nous dans le cas le plus simple et supposons que la fonction F n'ait dans un parallélépipède élémentaire qu'un nombre fini p de points singuliers qui seront par suite des points isolés. Soient $R_1, R_2, \ldots, R_p$ les résidus relatifs à ces points. L'on a alors le théorème suivant:

Théorème II. La somme des résidus

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_p$$

est égale à 0.

En effet, d'après le théorème VII de la première partie, on a

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_p = -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{\partial F}{\partial n} d\sigma$$

l'intégrale double étant étendue à la surface du parallélépipède élémentaire. Cette intégrale se partage en six parties étendues respectivement aux six faces du parallélépipède; nous allons montrer que les deux parties relatives à deux faces opposées sont égales et de signes contraires. L'intégrale double en question est donc nulle et le théorème est démontré. Sur la première face $A'OA''$ du parallélépipède élémentaire on a, en un point (x, y, z),

$$\frac{\partial F}{\partial n} = -\lambda\frac{\partial F}{\partial x} - \mu\frac{\partial F}{\partial y} - \nu\frac{\partial F}{\partial z}$$

puisque $\frac{\partial F}{\partial n}$ est la dérivée prise suivant la normale vers l'extérieur et que λ, μ, ν sont les cosinus directeurs de la normale vers l'intérieur. Prenons maintenant le point $(x + a,\ y + b,\ z + c)$ qui est situé sur la face opposée à $A'OA''$ et qui décrit cette face quand le point (x, y, z) décrit $A'OA''$. En ce point la fonction F prend la valeur

$$F(x + a,\ y + b,\ z + c) = F(x, y, z),$$

les trois dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ reprennent aussi les mêmes valeurs; par suite en ce point

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \lambda\frac{\partial F}{\partial x} + \mu\frac{\partial F}{\partial y} + \nu\frac{\partial F}{\partial z},$$

car au point $(x + a,\ y + b,\ z + c)$ les cosinus directeurs de la normale extérieure sont λ, μ, ν. Ainsi aux points correspondants (x, y, z), $(x + a,\ y + b,\ z + c)$ des deux faces opposées les valeurs de $\frac{\partial F}{\partial n}$ sont égales et de signes contraires; d'ailleurs les éléments de surface $d\sigma$ sont égaux; donc les deux intégrales

$$\iint \frac{\partial F}{\partial n}\, d\sigma$$

étendues à ces deux faces ont une somme nulle. La même chose a lieu pour les deux autres couples de faces opposées; ce qui démontre le théorème.

L'on conclut de ce théorème qu'il est impossible qu'une fonction F ait dans un parallélépipéde élémentaire un seul pôle du premier degré.

2. Il résulte du théorème I qu'une fonction F ayant un nombre fini de points singuliers dans un parallélépipéde élémentaire est déterminée, à une constante additive près, quand on connaît ses points singuliers dans un parallélépipéde élémentaire et les parties principales correspondantes. En effet, soient F et F_1 deux fonctions vérifiant l'équation fondamentale (1) et possédant les mêmes points singuliers dans un parallélépipéde avec les mêmes parties principales; la différence $F - F_1$ est régulière en tous les points du parallélépipéde; elle est donc *constante* d'après le théorème I.

Nous allons former une fonction à l'aide de laquelle nous pourrons donner l'expression d'une fonction F ayant dans un parallélépipède élémentaire un nombre fini de points singuliers, en connaissant ces points et les parties principales correspondantes. Cette fonction est analogue à la fonction $Z(u)$ de M. HERMITE.

Pour cela, appliquons le théorème IV de la première partie à la formation d'une fonction $Z(x, y, z)$ vérifiant l'équation $\Delta Z = 0$ et ayant pour pôles du premier degré avec le résidu $+1$ les points ayant pour coordonnées

$$(3)\qquad \begin{aligned} a_\nu &= ma + m'a' + m''a'' \\ b_\nu &= mb + m'b' + m''b'' \\ c_\nu &= mc + m'c' + m''c'', \end{aligned}$$

où les nombres m, m', m'' prennent toutes les valeurs entières positives, négatives et nulles. Cette fonction Z aura, par suite, un pôle et un seul dans chaque parallélépipède élémentaire. Voici comment l'on pourra la former.

Posons

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\rho = +\sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2 + c_\nu^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{xa_\nu + yb_\nu + zc_\nu}{r\rho}$$

$$R = +\sqrt{(x - a_\nu)^2 + (y - b_\nu)^2 + (z - c_\nu)^2} = +\sqrt{r^2 - 2r\rho\cos\varphi + \rho^2}$$

où a_ν, b_ν, c_ν désignent les quantités (3); soit enfin ε un nombre positif moindre que l'unité. Mettons à part la combinaison

$$m = 0, \quad m' = 0, \quad m'' = 0$$

pour laquelle $R = r$, et supposons que l'un au moins des trois nombres m, m', m'' ne soit pas nul; alors ρ est différent de zéro. La fonction

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho\cos\varphi + \rho^2}} = \frac{1}{\rho}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2r}{\rho}\cos\varphi + \frac{r^2}{\rho^2}}}$$

est, pour toutes les positions du point $M(x, y, z)$ telles que $\frac{r}{\rho} \leqq \varepsilon$, développable en une série convergente de la forme

$$\frac{1}{R} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{r^\nu}{\rho^{\nu+1}} P_\nu(\cos\varphi), \qquad P_0(\cos\varphi) = 1$$

où P_ν est un polynôme de LEGENDRE. Comme $P_\nu(\cos\varphi)$ est compris entre -1 et $+1$, si l'on forme la différence

$$f(x, y, z; m, m', m'') = \frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} - \frac{r}{\rho^2} P_1(\cos\varphi) - \frac{r^2}{\rho^3} P_2(\cos\varphi)$$
$$= \sum_{\nu=3}^{\nu=\infty} \frac{r^\nu}{\rho^{\nu+1}} P_\nu(\cos\varphi),$$

cette différence est, en valeur absolue, moindre que la somme

$$\sum_{\nu=3}^{\nu=\infty} \frac{r^\nu}{\rho^{\nu+1}}$$

ou, a fortiori puisque $\frac{r}{\rho} \leqq \varepsilon$, moindre que

$$\frac{r^3}{\rho^4}(1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots) = \frac{r^3}{\rho^4}\frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Ainsi, sous la condition $\frac{r}{\rho} \leqq \varepsilon$, on a

$$(4) \qquad |f(x, y, z; m, m', m'')| \leqq \frac{r^3}{\rho^4}\frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Désignons par le symbole Σ' une sommation étendue à toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles de m, m', m'', la combinaison

$$m = m' = m'' = 0$$

étant seule exceptée. On sait, d'après un théorème qu'EISENSTEIN a indiqué dans le tome 35 du Journal de CRELLE et dont M. JORDAN a donné une démonstration très-simple dans le tome IX du Bulletin de la Société Mathématique, que la série

$$(5) \qquad \sum{}' \frac{1}{\rho^4}$$

est convergente. On en conclut que la série

$$(6) \qquad Z(x, y, z) = \frac{1}{r} + \sum{}' f(x, y, z; m, m', m'')$$

$$= \frac{1}{r} + \sum{}' \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} - \frac{r}{\rho^2} P_1(\cos\varphi) - \frac{r^2}{\rho^3} P_2(\cos\varphi)\right]$$

est convergente en tous les points distincts des points (a_ν, b_ν, c_ν) et définit une fonction possédant les propriétés annoncées. En effet, soit $M'(x', y', z')$ un point ne coïncidant avec aucun des pôles (a_ν, b_ν, c_ν) et δ un nombre assez petit pour que, dans le domaine δ du point M', il n'y ait aucun de ces pôles; posons en outre $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$. Nous allons montrer que la série (6) est uniformément convergente en tous les points du domaine δ du point M'. Soit α un nombre positif donné d'avance aussi petit que l'on veut, l'on pourra assigner un nombre positif N remplissant les deux conditions suivantes

1° $$\frac{r' + \delta}{N} \leqq \varepsilon.$$

2° la somme

$$\sum{}'' \frac{1}{\rho^4}$$

étendue à toutes les valeurs de m, m', m'' pour lesquelles $\rho \geqq N$ est moindre que $\frac{\alpha(1 - \varepsilon)}{(r' + \delta)^3}$. On peut toujours remplir cette seconde condition puisque la série $\sum{}' \frac{1}{\rho^4}$ est convergente.

Le nombre N étant ainsi déterminé, je dis que la valeur absolue de la somme

$$\Sigma'' f(x, y, z; m, m', m''),$$

étendue à tous les termes de la série (6) dans lesquels $\rho \geqq N$, est moindre que α, quelle que soit la position du point (x, y, z) dans le domaine δ du point M'. En effet pour toutes les positions du point M dans ce domaine on a

$$r \leqq r' + \delta,$$

donc pour toutes les valeurs de m, m', m'' pour lesquelles $\rho \geqq N$, on a

$$\frac{r}{\rho} \leqq \varepsilon,$$

en vertu de la 1ère condition imposée à N. L'on a donc, pour ces mêmes valeurs de m, m', m'',

$$\left| f(x, y, z; m, m', m'') \right| \leqq \frac{r^3}{\rho^4} \frac{1}{1 - \varepsilon}$$

d'après l'équation (4) et par suite

$$\left| \Sigma'' f(x, y, z; m, m', m'') \right| \leqq \frac{r^3}{1 - \varepsilon} \sum{}'' \frac{1}{\rho^4};$$

or d'après la 2e condition imposée à N

$$\sum{}'' \frac{1}{\rho^4} < \frac{\alpha(1 - \varepsilon)}{(r' + \delta)^3};$$

donc

$$\left| \Sigma'' f(x, y, z; m, m', m'') \right| < \frac{r^3}{(r' + \delta)^3} \alpha \leqq \alpha;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Le même raisonnement montre que la différence

$$Z(x, y, z) - \frac{1}{\sqrt{(x - a_\nu)^2 + (y - b_\nu)^2 + (z - c_\nu)^2}}$$

est régulière au point (a_ν, b_ν, c_ν).

3. *Propriétés fondamentales de la fonction Z.* Remarquons que, dans le terme générale de la série (6), la quantité que l'on retranche de $\frac{1}{R}$ est un polynôme du second degré en x, y, z; en effet

$$P_1(\cos\varphi) = \cos\varphi, \quad P_2(\cos\varphi) = \frac{3}{2}\left(\cos^2\varphi - \frac{1}{3}\right)$$

et par suite

$$rP_1(\cos\varphi) = \frac{1}{\rho}(xa_\nu + yb_\nu + zc_\nu)$$

$$r^2P_2(\cos\varphi) = \frac{3}{2}\left[\frac{(xa_\nu + yb_\nu + zc_\nu)^2}{\rho^2} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\right];$$

l'une quelconque des six dérivées partielles du second ordre de cette quantité par rapport à x, y, z est donc une constante. Si nous prenons, par exemple, la dérivée $\frac{\partial^2 Z(x, y, z)}{\partial x^2}$, nous avons

$$\text{(7)} \qquad \frac{\partial^2 Z(x, y, z)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \sum{}' \left[\frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial x^2} - \frac{3}{\rho^3}\left(\frac{a_\nu^2}{\rho^2} - \frac{1}{3}\right)\right];$$

remplaçons x, y, z respectivement par $x + a, y + b, z + c$; alors r devient r_1 et R devient R_1, et l'on a

$$\text{(8)} \qquad \frac{\partial^2 Z(x + a, y + b, z + c)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2} + \sum{}' \left[\frac{\partial^2 \frac{1}{R_1}}{\partial x^2} - \frac{3}{\rho^3}\left(\frac{a_\nu^2}{\rho^2} - \frac{1}{3}\right)\right]$$

En retranchant ces deux séries membre à membre, nous obtenons l'équation

$$\text{(9)} \qquad \frac{\partial^2 Z(x + a, y + b, z + c)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Z(x, y, z)}{\partial x^2}$$

$$= \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \sum{}' \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{R_1}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial x^2}\right) = \sum \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{R_1}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial x^2}\right)$$

la dernière somme Σ étant étendue à *toutes* les valeurs entières de m, m', m'' de $-\infty$ à $+\infty$. Or il est facile de voir que cette dernière somme est nulle. En effet $\dfrac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial x^2}$ est une certaine fonction de m, m', m''; désignons cette fonction par $\psi(m, m', m'')$; alors on aura

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{R_1}}{\partial x^2} = \psi(m-1, m', m'');$$

on voit en effet, d'après la définition de $\frac{1}{R}$, que remplacer dans $\frac{1}{R}$, x, y, z par $x+a$, $y+b$, $z+c$ revient à changer m en $m-1$. La somme Σ pourra donc s'écrire

$$(9') \qquad \sum [\psi(m-1, m', m'') - \psi(m, m', m'')];$$

supposons que, donnant à m', m'' des valeurs entières fixes quelconques, l'on fasse d'abord la sommation par rapport à m de $-\mu$ à $+\mu$; on aura à former

$$(10) \qquad \sum_{m=-\mu}^{m=+\mu} [\psi(m-1, m', m'') - \psi(m, m', m'')],$$

mais alors il est clair que, dans cette dernière somme, les termes se détruisent deux à deux sauf le premier et le dernier, et que cette somme est égale à

$$\psi(-\mu-1, m', m'') - \psi(\mu, m', m'');$$

si l'on suppose que μ augmente indéfiniment cette dernière quantité tend vers zéro. Ainsi pour $\mu = \infty$ la somme (10) est nulle; la somme (9') est donc nulle aussi, et l'équation (9) donne comme conséquence

$$\frac{\partial^2 Z(x+a, y+b, z+c)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Z(x, y, z)}{\partial x^2} = 0.$$

On démontrerait de même que toutes les dérivées partielles du second ordre de la différence

$$Z(x+a, y+b, z+c) - Z(x, y, z)$$

sont égales à zéro. Donc cette différence ne peut être qu'une fonction linéaire de x, y, z. Nous avons ainsi l'équation

$$(11)\qquad Z(x+a,\ y+b,\ z+c) - Z(x,\ y,\ z) = Ax + By + Cz + E;$$

on a de même

$$(11')\qquad Z(x+a',\ y+b',\ z+c') - Z(x,\ y,\ z) = A'x + B'y + C'z + E'$$

$$(11'')\qquad Z(x+a'',\ y+b'',\ z+c'') - Z(x,\ y,\ z) = A''x + B''y + C''z + E'',$$

les lettres A, B, C, E; A', B', C', E'; A'', B'', C'', E'' désignant des constantes qui dépendent des neuf quantités a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'', et que l'on pourrait calculer effectivement en formant à l'aide de la série (6) les différences (11), (11') et (11'').

L'on peut indiquer a priori un certain nombre de relations entre ces différentes constantes. Dans l'équation (11) remplaçons x, y, z par $x + a'$, $y + b'$, $z + c'$, puis ajoutons à l'équation (11'); nous avons la relation

$$(12)\qquad Z(x+a+a',\ y+b+b',\ z+c+c') - Z(x,\ y,\ z)$$

$$= Ax + By + Cz + A'x + B'y + C'z + E + E' + Aa' + Bb' + Cc';$$

mais si nous faisions l'inverse, c'est à dire si dans l'équation (11') nous remplaçions x, y, z par $x + a$, $y + b$, $z + c$ et que nous ajoutions l'équation ainsi obtenue à l'équation (11), nous trouverions, pour cette même différence (12), la valeur

$$Ax + By + Cz + A'x + B'y + C'z + E + E' + A'a + B'b + C'c;$$

l'on a donc

$$(13)\qquad Aa' + Bb' + Cc' = A'a + B'b + C'c;$$

l'on trouve de même

$$(13')\qquad A'a'' + B'b'' + C'c'' = A''a' + B''b' + C''c'$$

$$(13'')\qquad A''a + B''b + C''c = Aa'' + Bb'' + Cc''.$$

Voici encore une autre relation entre ces constantes. Considérons la fonction

$$Z_1(x, y, z) = Z\left(x - \frac{a}{2}, \ y - \frac{b}{2}, \ z - \frac{c}{2}\right)$$

qui admet pour pôles du premier degré de résidu $+1$ les points de coordonnées

$$\frac{a}{2} + ma + m'a' + m''a'', \quad \frac{b}{2} + mb + m'b' + m''b'', \quad \frac{c}{2} + mc + m'c' + m''c''$$

et appliquons à cette fonction le théorème VII de la 1[ère] partie en prenant pour surface d'intégration S le parallélépipéde élémentaire représenté dans la figure précédente (page 348). Comme la fonction $Z_1(x, y, z)$ n'admet dans ce parallélépipéde qu'un seul pôle $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ de résidu $+1$, l'on a l'équation

$$(14) \qquad \iint \frac{\partial Z_1(x, y, z)}{\partial n} d\sigma = -4\pi.$$

Prenons les portions de cette intégrale double qui se rapportent aux faces opposées du parallélépipéde. Au point (x, y, z) situé sur la face $A'OA''$ on a

$$\frac{\partial Z_1(x, y, z)}{\partial n} = -\lambda \frac{\partial Z_1(x, y, z)}{\partial x} - \mu \frac{\partial Z_1}{\partial y} - \nu \frac{\partial Z_1}{\partial z};$$

au point $(x + a, y + b, z + c)$ situé sur la face opposée on a

$$\frac{\partial Z_1(x + a, y + b, z + c)}{\partial n} = \lambda \frac{\partial Z_1(x + a, y + b, z + c)}{\partial x} + \mu \frac{\partial Z_1}{\partial y} + \nu \frac{\partial Z_1}{\partial z};$$

comme $d\sigma$ est le même aux points (x, y, z) et $(x + a, y + b, z + c)$ la somme des éléments de l'intégrale double relatifs à ces deux points est

$$(15) \qquad \lambda \left[\frac{\partial Z_1(x + a, y + b, z + c)}{\partial x} - \frac{\partial Z_1(x, y, z)}{\partial x}\right] d\sigma + \ldots$$

où l'on n'a écrit que le premier terme; mais d'après l'équation (11) la différence

$$\frac{\partial Z_1(x+a,\, y+b,\, z+c)}{\partial x} - \frac{\partial Z_1(x,\, y,\, z)}{\partial x}$$

est égale à A; la somme (15) est donc

$$(\lambda A + \mu B + \nu C)d\sigma$$

et la somme des parties de l'intégrale (14) étendues à la face $A'OA''$ et à la face opposée est

$$(\lambda A + \mu B + \nu C)\iint\limits_{A'OA''} d\sigma = (\lambda A + \mu B + \nu C)l'l''\sin\theta$$

puisque $l'l''\sin\theta$ est la surface de la face $A'OA''$. En opérant de même pour les deux autres couples de faces opposées, l'on obtient, à la place de l'équation (14), l'équation

$$(\lambda A + \mu B + \nu C)l'l''\sin\theta + (\lambda' A' + \mu' B' + \nu' C')l''l\sin\theta'$$
$$+ (\lambda'' A'' + \mu'' B'' + \nu'' C'')ll'\sin\theta'' = -4\pi.$$

Enfin l'on déduit, de ce que $Z(x, y, z)$ ne change pas quand x, y, z changent de signes en même temps, la relation

$$E = \frac{1}{2}(Aa + Bb + Cc)$$

et deux autres analogues pour E' et E''.

4. *Formation des fonctions $F(x, y, z)$ vérifiant l'équation $\Delta F = 0$ et admettant pour x, y, z les trois groupes de périodes (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'').*

Nous allons montrer maintenant comment l'on peut, à l'aide de la fonction $Z(x, y, z)$, former les fonctions F dont il est question au commencement de cette deuxième partie.

Supposons, pour prendre d'abord le cas le plus simple, que la fonction F qu'il s'agit de former n'ait dans un parallélépipède élémentaire d'autres points singuliers que des pôles. Ces pôles seront alors en nombre fini p; nous désignerons leurs coordonnées respectives par

$$(x_1, y_1, z_1),\ (x_2, y_2, z_2),\ \ldots,\ (x_p, y_p, z_p)$$

et les résidus correspondants par $R_1, R_2, \ldots, R_p$.

Imaginons, en premier lieu, que les pôles soient tous du premier degré; la fonction cherchée F sera

$$(16)\quad F(x, y, z) = L + Mx + Ny + Pz + \sum_{k=1}^{k=p} R_k Z(x - x_k, y - y_k, z - z_k),$$

les constantes M, N, P étant déterminées par les équations du premier degré

$$(17)\quad \left|\begin{aligned} Ma + Nb + Pc &= \sum_{k=1}^{k=p} (AR_k x_k + BR_k y_k + CR_k z_k) \\ Ma' + Nb' + Pc' &= \sum_{k=1}^{k=p} (A'R_k x_k + B'R_k y_k + C'R_k z_k) \\ Ma'' + Nb'' + Pc'' &= \sum_{k=1}^{k=p} (A''R_k x_k + B''R_k y_k + C''R_k z_k). \end{aligned}\right.$$

En effet,

1° la fonction définie par l'équation (16) est uniforme et vérifie l'équation $\Delta F = 0$, puisqu'il en est ainsi pour chacune des fonctions qui la composent linéairement;

2° cette fonction admet dans le parallélépipède considéré les seuls points singuliers (x_k, y_k, z_k) qui sont des pôles du premier degré de résidus R_k, puisque chacune des fonctions $R_k Z(x - x_k, y - y_k, z - z_k)$ admet dans le parallélépipède considéré le seul pôle du premier degré (x_k, y_k, z_k) avec le résidu R_k;

3° enfin les trois différences

$$\begin{aligned} &F(x + a, y + b, z + c) - F(x, y, z) \\ &F(x + a', y + b', z + c') - F(x, y, z) \\ &F(x + a'', y + b'', z + c'') - F(x, y, z) \end{aligned}$$

sont *nulles;* la première de ces différences sera, par exemple

$$(18)\qquad Ma + Nb + Pc$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=p} R_k \big[Z(x - x_k + a, y - y_k + b, z - z_k + c) - Z(x - x_k, y - y_k, z - z_k)\big]$$

mais en vertu de l'équation (11) où l'on remplacerait x, y, z par $x - x_k$, $y - y_k$, $z - z_k$ le coefficient de R_k est

$$A(x - x_k) + B(y - y_k) + C(z - z_k) + E;$$

la quantité (18) est donc

$$Ma + Nb + Pc + (Ax + By + Cz + E) \sum_{k=1}^{k=p} R_k$$
$$- \sum_{k=1}^{k=p} (AR_k x_k + BR_k y_k + CR_k z_k)$$

c'est à dire *zéro* en vertu de la relation démontrée précédemment (Théorème II)

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_p = 0,$$

et de la première des équations (17) déterminant M, N, P.

La fonction (16) est donc bien la fonction cherchée qui, comme nous l'avons vu § 2, est entièrement déterminée à une constante additive L près.

Nous avons supposé que les pôles sont tous du premier degré; le cas le plus général où les pôles sont d'un degré quelconque se traite de la même façon. Désignons en effet par

$$(19) \qquad \varphi_k(x, y, z) = V_{-1}^{(k)}(x - x_k, y - y_k, z - z_k)$$
$$+ V_{-2}^{(k)}(x - x_k, y - y_k, z - z_k) + \ldots + V_{-n_k}^{(k)}(x - x_k, y - y_k, z - z_k)$$

la partie principale de la fonction F relative au pôle (x_k, y_k, z_k) d'un degré quelconque n_k. Comme la fonction la plus générale

$$V_{-n}(x - x_k, y - y_k, z - z_k)$$

d'indice négatif est composée linéairement avec les dérivées partielles d'ordre $n - 1$ de

$$\frac{1}{r_k} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2}} \text{ (}^1\text{)}$$

---

(1) Première partie, § 1.

on peut mettre la partie principale φ_k sous la forme

$$(19') \qquad \varphi_k(x, y, z) = \sum_{f+g+h=0}^{f+g+h=n_k-1} R^{(k)}_{f,g,h} \frac{\partial^{f+g+h} \frac{1}{r_k}}{\partial x^f \partial y^g \partial z^h},$$

la sommation étant étendue à certaines valeurs entières positives ou nulles de f, g, h choisies de telle façon que dans le second membre de (19') figurent seulement toutes les dérivées partielles de $\frac{1}{r_k}$ *linéairement indépendantes* jusqu'à celles de l'ordre $n_k - 1$ inclusivement.(¹) Le premier terme de la somme (19') est celui qui correspond à $f = g = h = 0$

$$R^{(k)}_{0,0,0} \frac{1}{r_k};$$

le coefficient $R^{(k)}_{0,0,0}$ n'est donc autre chose que le résidu R_k.

Cela posé, la fonction cherchée $F(x, y, z)$ sera

$$(20) \qquad F(x, y, z) = L + Mx + Ny + Pz$$
$$+ \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{f+g+h=0}^{f+g+h=n_k-1} R^{(k)}_{f,g,h} \frac{\partial^{f+g+h} Z(x - x_k, y - y_k, z - z_k)}{\partial x^f \partial y^g \partial z^h},$$

la sommation étant étendue aux mêmes valeurs que précédemment et les constantes M, N, P étant déterminées par les équations

$$(21) \qquad \left| \begin{aligned} Ma + Nb + Pc &= AX + BY + CZ \\ Ma' + Nb' + Pc' &= A'X + B'Y + C'Z \\ Ma'' + Nb'' + Pc'' &= A''X + B''Y + C''Z \end{aligned} \right.$$

(¹) L'on pourrait supposer la sommation (19') étendue à toutes les valeurs positives ou nulles de f, g, h pour lesquelles $f + g + h \leqq n_k - 1$, mais alors tous les termes de la somme ne seraient pas linéairement indépendants; ainsi l'on trouverait, dans les dérivées secondes, le groupe de trois termes $R^{(k)}_{2,0,0} \frac{\partial^2 \frac{1}{r_k}}{\partial x^2} + R^{(k)}_{0,2,0} \frac{\partial^2 \frac{1}{r_k}}{\partial y^2} + R^{(k)}_{0,0,2} \frac{\partial^2 \frac{1}{r_k}}{\partial z^2}$ qui pourrait être réduit à *deux* termes à l'aide de l'équation $\Delta \frac{1}{r_k} = 0$.

où l'on a posé pour abréger

$$X = \sum_{k=1}^{k=p} (R_k x_k - R^{(k)}_{1,0,0}), \quad Y = \sum_{k=1}^{k=p} (R_k y_k - R^{(k)}_{0,1,0}), \quad Z = \sum_{k=1}^{k=p} (R_k z_k - R^{(k)}_{0,0,1}).$$

On vérifie encore, comme précédemment, que la fonction définie par l'équation (20) possède bien les propriétés qui déterminent la fonction F à une constante additive près. On remarque pour cela que la fonction

$$\sum_{f+g+h=0}^{f+g+h=n_k-1} R^{(k)}_{f,g,h} \frac{\partial^{f+g+h} Z(x-x_k,\ y-y_k,\ z-z_k)}{\partial x^f \partial y^g \partial z^h}$$

possède dans le parallélépipède élémentaire considéré le seul pôle (x_k, y_k, z_k) et que la partie principale de cette fonction relativement à ce pôle est précisément $\varphi_k(x, y, z)$; on s'appuie de plus sur les relations (11) et celles qu'on en déduit par des dérivations par rapport à x, y, z.

Pour donner un exemple simple de l'application de la formule (20), formons une fonction F qui admet dans le parallélépipède élémentaire un seul pôle (x_1, y_1, z_1) du second degré: la partie principale relative à ce pôle unique sera

$$\varphi_1 = \lambda_1 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y} + \lambda_3 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z}$$

avec un résidu nul d'après le théorème II.

La fonction cherchée F est alors

$$F(x, y, z) = L + Mx + Ny + Pz + \lambda_1 \frac{\partial Z_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial Z_1}{\partial y} + \lambda_3 \frac{\partial Z_1}{\partial z}$$

où Z_1 désigne la fonction $Z(x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1)$. Les coefficients M, N, P seront donnés par les équations

$$Ma + Nb + Pc + \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C = 0$$

$$Ma' + Nb' + Pc' + \lambda_1 A' + \lambda_2 B' + \lambda_3 C' = 0$$

$$Ma'' + Nb'' + Pc'' + \lambda_1 A'' + \lambda_2 B'' + \lambda_3 C'' = 0.$$

La formule (20) pourrait conduire à l'expression d'une fonction F possédant dans un parallélépipéde élémentaire p points singuliers essentiels isolés; il suffirait de supposer que les nombres n_k augmentent indéfiniment. Mais il est plus rigoureux d'employer la méthode suivante qui conduit à des formules intéressantes.

5. Considérons un parallélépipéde élémentaire, celui qui est figuré à la page 348 par exemple, et, dans l'intérieur de ce parallélépipéde une surface fermée S. Soit $F(x, y, z)$ une fonction vérifiant l'équation $\Delta F = 0$, uniforme dans le volume V compris entre la surface du parallélépipéde et la surface S, régulière en tous les points de ce volume, et admettant les trois groupes de périodes

$$(a,\ b,\ c),\ \ (a',\ b',\ c'),\ \ (a'',\ b'',\ c'').$$

Cette fonction F est par suite supposée uniforme et régulière dans tous les volumes homologues de V dans le réseau des parallélépipédes élémentaires construits sur le premier, et elle reprend les mêmes valeurs aux points homologues de ce réseau.

Cette fonction F peut d'ailleurs posséder telles singularités que l'on voudra sur la surface S ou dans l'intérieur de cette surface; elle peut même ne plus exister dans l'intérieur de S.

Soit $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ un point appartenant au volume V c'est à dire situé à l'intérieur du parallélépipéde et à l'extérieur de la surface S; traçons une deuxième surface S' extérieure à S mais d'ailleurs aussi rapprochée qu'on le voudra de S, de telle sorte que le point (ξ, η, ζ) soit aussi extérieur à S'. La fonction F est régulière en tous les points de la surface S'.

Je remarque d'abord que l'on a la formule

$$\tag{22} F(\xi,\ \eta,\ \zeta)$$
$$= \frac{1}{4\pi}\iint\left[Z(\xi - x,\ \eta - y,\ \zeta - z)\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial Z(\xi - x,\ \eta - y,\ \zeta - z)}{\partial n}\right]d\sigma,$$

l'intégrale double étant étendue à la surface qui limite le volume V, c'est à dire à la surface du parallélépipéde et à la surface S'. Pour démontrer cette formule, il suffit de remarquer que la fonction

$$Z(\xi - x,\ \eta - y,\ \zeta - z)$$

considérée comme fonction de x, y, z n'a dans tout le volume V que le seul pôle (ξ, η, ζ); de sorte que l'on peut écrire

$$Z(\xi - x, \eta - y, \zeta - z) = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} + \theta(x, y, z)$$

où θ est dans le volume V uniforme et régulière et vérifie l'équation $\Delta\theta = 0$. En remplaçant Z par cette valeur dans l'intégrale (22), nous voyons que cette intégrale se partage en deux: la première

$$\frac{1}{4\pi}\iint\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\right]d\sigma$$

qui est égale à $F(\xi, \eta, \zeta)$ d'après la formule (22) de la première partie, la deuxième

$$\frac{1}{4\pi}\iint\left(\theta\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial\theta}{\partial n}\right)d\sigma$$

qui est nulle puisque θ et F sont régulières en tous les points du volume V. La formule (22) est donc bien démontrée.

L'intégrale double qui figure dans cette formule (22) peut être partagée en deux parties, l'une étendue à la surface S' et que nous désignerons par l'indice S', l'autre étendue à la surface du parallélépipède et que nous désignerons par l'indice P'

$$(22') \qquad F(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{P'}\left(Z\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial Z}{\partial n}\right)d\sigma + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S'}\left(Z\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial Z}{\partial n}\right)d\sigma$$

où la lettre Z sans arguments désigne, ainsi que dans la suite, la fonction $Z(\xi - x, \eta - y, \zeta - z)$.

Prenons maintenant la première des deux intégrales (22') à savoir celle qui est étendue à la surface du parallélépipède; nous allons montrer que cette intégrale est une fonction linéaire de ξ, η, ζ. Pour cela, remarquons, comme précédemment, que cette intégrale se partage en six parties étendues respectivement aux trois couples de faces opposées du parallélépipède. En un point (x, y, z) de la première face $A'OA''$ on a d'après les notations adoptées (§ 1 et suivants)

$$Z\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial Z}{\partial n} = -Z\left(\lambda\frac{\partial F}{\partial x} + \mu\frac{\partial F}{\partial y} + \nu\frac{\partial F}{\partial z}\right) + F\left(\lambda\frac{\partial Z}{\partial x} + \mu\frac{\partial Z}{\partial y} + \nu\frac{\partial Z}{\partial z}\right);$$

au point correspondant $(x+a,\ y+b,\ z+c)$ de la face opposée les fonctions Z et F prennent des valeurs que nous désignerons par Z_1 et F_1 et l'on aura

$$Z_1\frac{\partial F_1}{\partial n} - F_1\frac{\partial Z_1}{\partial n} = Z_1\left(\lambda\frac{\partial F_1}{\partial x} + \mu\frac{\partial F_1}{\partial y} + \nu\frac{\partial F_1}{\partial z}\right) - F_1\left(\lambda\frac{\partial Z_1}{\partial x} + \mu\frac{\partial Z_1}{\partial y} + \nu\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right);$$

mais puisque la fonction F admet le groupe de périodes $(a,\ b,\ c)$ on a $F_1 = F,\ \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial z}$. L'élément de surface $d\sigma$ est d'ailleurs le même aux points correspondants $x,\ y,\ z$ et $x+a,\ y+b,\ z+c$; la somme des deux éléments correspondants de l'intégrale double est donc

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(Z\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial Z}{\partial n} + Z_1\frac{\partial F_1}{\partial n} - F_1\frac{\partial Z_1}{\partial n}\right)d\sigma \\ &= (Z_1 - Z)\left(\lambda\frac{\partial F}{\partial x} + \mu\frac{\partial F}{\partial y} + \nu\frac{\partial F}{\partial z}\right)d\sigma \\ &- F\left[\lambda\frac{\partial(Z_1 - Z)}{\partial x} + \mu\frac{\partial(Z_1 - Z)}{\partial y} + \nu\frac{\partial(Z_1 - Z)}{\partial z}\right]d\sigma. \end{aligned}\right.$$

Mais la différence $Z_1 - Z$ peut se calculer aisément à l'aide des formules (11); en effet

$$Z_1 = Z(\xi - x - a,\ \eta - y - b,\ \zeta - z - c)$$

$$Z = Z(\xi - x,\ \eta - y,\ \zeta - z);$$

on obtiendra donc $Z_1 - Z$ en remplaçant dans la formule (11) x, y, z par

$$\xi - x - a,\ \eta - y - b,\ \zeta - z - c;$$

on trouve ainsi

$$Z_1 - Z = A(x + a - \xi) + B(y + b - \eta) + C(z + c - \zeta) - E;$$

d'où

$$\frac{\partial(Z_1 - Z)}{\partial x} = A,\quad \frac{\partial(Z_1 - Z)}{\partial y} = B,\quad \frac{\partial(Z_1 - Z)}{\partial z} = C;$$

portant ces valeurs dans l'expression (23), on voit que cette expression devient une fonction linéaire de ξ, η, ζ dont les coefficients sont des fonctions de x, y, z. Si maintenant l'on intègre dans toute l'étendue de la face $A'OA''$ on obtiendra pour l'intégrale une fonction linéaire de ξ, η, ζ; la même chose ayant lieu pour les deux autres couples de faces opposées du parallélépipède on voit finalement que

$$(24) \qquad \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{P'}\left(Z\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial Z}{\partial n}\right)d\sigma = L + M\xi + N\eta + P\zeta,$$

les constantes L, M, N, P ayant des valeurs exprimées par des intégrales définies comme il résulte du calcul précédent. Ainsi

$$(25) \qquad 4\pi M = A\iint\limits_{A'OA''}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma + A'\iint\limits_{A''OA}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma + A''\iint\limits_{AOA'}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma$$

les intégrales étant étendues respectivement aux faces $A'OA''$, $A''OA$, AOA' du parallélépipède et les dérivées $\frac{\partial F}{\partial n}$ étant prises sur la normale vers l'extérieur. On aura N et P par des formules analogues obtenues en remplaçant dans (25) A par B et C; ainsi

$$(25') \qquad 4\pi N = B\iint\limits_{A'OA''}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma + B'\iint\limits_{A''OA}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma + B''\iint\limits_{AOA'}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma.$$

Par conséquent, en remplaçant l'intégrale (24) par sa valeur dans l'équation (22'), on en déduit la formule suivante

$$(26) \qquad F(\xi, \eta, \zeta) = L + M\xi + N\eta + P\zeta + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S'}\left(Z\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial Z}{\partial n}\right)d\sigma,$$

formule intéressante qui est entièrement analogue à celle que j'ai indiquée, pour les fonctions d'une variable imaginaire, dans une Note publiée dans les Comptes Rendus T. 94, p. 936 et dont les résultats ont été généralisés dans les Acta Mathematica T. 1, p. 139 (éq. 15).

Les conséquences qu'on déduit de cette formule sont d'ailleurs semblables à celles que j'ai indiquées dans les deux mémoires que je viens de citer.

6. Supposons d'abord que *la surface S soit une sphère* de centre (x_1, y_1, z_1); la fonction F est alors uniforme et régulière dans le volume V limité par la surface du parallélépipède et la surface de la sphère S intérieure à ce parallélépipède.

Nous allons montrer que, dans ce volume et dans les volumes homologues, la fonction F est alors représentée par une serie de la forme

$$(27)\qquad F(\xi, \eta, \zeta)$$
$$= L + M\xi + N\eta + P\zeta + \sum_{f+g+h=1}^{f+g+h=\infty} R_{f,g,h} \frac{\partial^{f+g+h} Z(\xi - x_1, \eta - y_1, \zeta - z_1)}{\partial\xi^f \partial\eta^g \partial\zeta^h},$$

la sommation étant étendue aux *valeurs entières* positives ou nulles de f, g, h, et les coefficients $R_{f,g,h}$ étant des constantes.

Pour établir cette formule (27), remarquons que la fonction Z, c'est à dire

$$Z(\xi - x, \eta - y, \zeta - z)$$

considérée comme fonction de x, y, z, n'a d'autres pôles que les points

$$(28)\qquad \left|\begin{aligned} x &= \xi + ma + m'a' + m''a'' \\ y &= \eta + mb + m'b' + m''b'' \\ z &= \zeta + mc + m'c' + m''c''; \end{aligned}\right.$$

cette fonction de x, y, z est donc uniforme et régulière dans l'intérieur d'une sphère S'' ayant pour centre le point (x_1, y_1, z_1) et passant par celui des points (28) qui est le plus rapproché de (x_1, y_1, z_1); ce point peut être le point (ξ, η, ζ) ou un autre point situé en dehors du parallélépipéde élémentaire. Quoiqu'il en soit cette dernière sphère S'' a certainement un rayon plus grand que celui de la sphère S, et par suite elle contient dans son intérieur la surface S' qui est aussi rapprochée de S que l'on veut et à laquelle est étendue l'intégrale double (26); nous supposerons que l'on ait choisi pour cette surface S' une sphère de centre (x_1, y_1, z_1) dont le rayon r_1 surpasse celui de la sphère S d'aussi peu qu'on le veut. Mais, dans l'intérieur de la sphère S'', la fonction régulière Z de x, y, z est développable en une série convergente ordonnée par rapport aux fonctions $V_\nu(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ à indices positifs, ou, ce qui est la même chose, en une série ordonnée par rapport aux puissances positives de $x - x_1, y - y_1, z - z_1$ par la formule de TAYLOR. On a donc, en tous les points x, y, z intérieurs à la sphère S'' et, par suite, en tous les points appartenant à la surface de la sphère S' intérieure à S'',

$$Z(\xi - x, \eta - y, \zeta - z) = Z(\xi - x_1, \eta - y_1, \zeta - z_1)$$
$$- \frac{x - x_1}{1} \cdot \frac{\partial Z(\xi - x_1, \eta - y_1, \zeta - z_1)}{\partial \xi} - \ldots$$

ou bien

$$(29) \qquad Z(\xi - x, \eta - y, \zeta - z)$$
$$= \sum_{f+g+h=0}^{f+g+h=\infty} (-1)^{f+g+h} \frac{(x - x_1)^f (y - y_1)^g (z - z_1)^h}{1.2 \ldots f.1.2 \ldots g.1.2 \ldots h} \cdot \frac{\partial^{f+g+h} Z(\xi - x_1, \eta - y_1, \zeta - z_1)}{\partial \xi^f \partial \eta^g \partial \zeta^h}.$$

Si, dans ce développement, on prend les termes homogènes d'un même degré ν $(f + g + h = \nu)$ en $x - x_1, y - y_1, z - z_1$, ils forment une fonction $V_\nu(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$. Nous allons remplacer Z par ce développement (29) dans l'intégrale (26) en remarquant de plus que, sur la sphère S' de centre x_1, y_1, z_1 et de rayon r_1, la dérivée $\frac{\partial Z}{\partial n}$ est donnée par l'équation

$$\frac{\partial Z}{\partial n} = - \frac{x - x_1}{r_1} \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{y - y_1}{r_1} \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{z - z_1}{r_1} \frac{\partial Z}{\partial z}$$

où l'on met le signe — puisque n est la normale extérieure au volume V et par suite intérieure à S'; on conclut de là que

$$(29') \quad \frac{\partial Z}{\partial n} = - \frac{1}{r_1} \sum_{f+g+h=0}^{f+g+h=\infty} \left| \begin{array}{c} (-1)^{f+g+h} . (f + g + h) \frac{(x - x_1)^f (y - y_1)^g (z - z_1)^h}{1.2 \ldots f.1.2 \ldots g.1.2 \ldots h} \\ \times \frac{\partial^{f+g+h} Z(\xi - x_1, \eta - y_1, \zeta - z_1)}{\partial \xi^f \partial \eta^g \partial \zeta^h} \end{array} \right| .$$

Portant ces deux développements dans l'intégrale (26), nous obtenons pour $F(\xi, \eta, \zeta)$ un développement de la forme annoncée (27), où

$$(30)\qquad 4\pi . R_{f,g,h}$$
$$= \frac{(-1)^{f+g+h}}{1.2\ldots f.1.2\ldots g.1.2\ldots h}\iint\limits_{S'}(x-x_1)^f(y-y_1)^g(z-z_1)^h\left[\frac{\partial F}{\partial n}+\frac{f+g+h}{r_1}F\right]d\sigma;$$

le coefficient de $Z(\xi - x_1, \eta - y_1, \zeta - z_1)$, $R_{0,0,0}$ est *nul;* en effet ce coefficient est donné par

$$4\pi R_{0,0,0} = \iint\limits_{S'}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma$$

et l'intégrale du deuxième membre est nulle, car elle est égale à l'intégrale

$$\iint\limits_{P'}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma$$

étendue à la surface du parallélépipède élémentaire, laquelle est nulle à cause de la périodicité de F. Ce coefficient $R_{0,0,0}$ ne figure pas dans le développement (27) tel que nous l'avons écrit.

Comme la fonction $F(\xi, \eta, \zeta)$ ne doit pas changer quand on remplace ξ, η, ζ par $\xi + a$, $\eta + b$, $\zeta + c$, il faut que les constantes M, N, P, $R_{1,0,0}$, $R_{0,1,0}$, $R_{0,0,1}$, vérifient la relation

$$(31)\qquad Ma + Nb + Pc + AR_{1,0,0} + BR_{0,1,0} + CR_{0,0,1} = 0;$$

en effet, le premier membre de l'équation précédente (31) est la quantité dont croît la série (27) quand ξ, η, ζ croissent de a, b, c, en vertu de l'équation (11). Voici comment nous pouvons vérifier cette relation (31). Remplaçons-y les constantes M, N, P par leurs valeurs (25) et les coefficients $R_{1,0,0}$, $R_{0,1,0}$, $R_{0,0,1}$ par leurs expressions (30); la relation (31) devient

$$(31') \qquad (Aa + Bb + Cc)\iint\limits_{A'OA''}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma + (A'a + B'b + C'c)\iint\limits_{A''OA}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma$$

$$+ (A''a + B''b + C''c)\iint\limits_{AOA'}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma$$

$$-\iint\limits_{S'}[A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1)]\left(\frac{\partial F}{\partial n} + \frac{F}{r_1}\right)d\sigma = 0.$$

Pour vérifier cette dernière relation considérons la fonction F et la fonction

$$\Phi = A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1)$$

qui satisfont aux équations $\Delta F = 0$, $\Delta\Phi = 0$ et qui sont uniformes et régulières dans le volume V compris entre la surface du parallélépipéde élémentaire et celle de la sphère S'. D'après le théorème de GREEN, l'on a l'équation

$$\iint\left(\Phi\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)d\sigma = 0$$

l'intégrale étant étendue aux surfaces du parallélépipéde et de la sphère S'. On aura donc, d'après les notations déjà employées

$$(32) \qquad \iint\limits_{P'}\left(\Phi\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)d\sigma + \iint\limits_{S'}\left(\Phi\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)d\sigma = 0.$$

On voit facilement, d'après un calcul analogue à celui de la fin du § 3, que l'on a

$$(32') \qquad \iint\limits_{P'}\left(\Phi\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)d\sigma = (Aa + Bb + Cc)\iint\limits_{A'OA''}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma$$

$$+ (Aa' + Bb' + Cc')\iint\limits_{A''OA}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma + (Aa'' + Bb'' + Cc'')\iint\limits_{AOA'}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma;$$

et

$$(32'') \qquad \iint\limits_{S'} \left(\Phi \frac{\partial F}{\partial n} - F \frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) d\sigma$$

$$= \iint\limits_{S_1} [A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1)] \left(\frac{\partial F}{\partial n} + \frac{F}{r_1}\right) d\sigma$$

attendu que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{x - x_1}{r_1}\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{y - y_1}{r_1}\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{z - z_1}{r_1}\frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

En portant ces valeurs des intégrales (32′) et (32″) dans l'équation (32) l'on obtient précisément l'équation (31′) qu'il s'agissait de vérifier, à condition de se reporter aux relations (13) et (13″).

On vérifierait de même deux autres relations qui se déduisent de (31) par l'accentuation de a, b, c, A, B, C.

7. On pourra supposer maintenant, pour plus de généralité, que la surface S du § 5 et de l'équation (26) est formée de la surface de p sphères S_1, S_2, ..., S_p toutes situées à *l'intérieur* du parallélépipéde élémentaire et ayant pour centres respectifs les points

$$(x_1, y_1, z_1), \ (x_2, y_2, z_2), \ \ldots, \ (x_p, y_p, z_p).$$

La fonction F est alors, dans le volume compris entre la surface du parallélépipéde et celles des sphères S_1, S_2, ..., S_p, développable en une série convergente de la forme

$$(33) \qquad F(\xi, \eta, \zeta)$$

$$= L + M\xi + N\eta + P\zeta + \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{f+g+h=0}^{f+g+h=\infty} R^{(k)}_{f,g,h} \frac{\partial^{f+g+h} Z(\xi - x_k, \eta - y_k, \zeta - z_k)}{\partial \xi^f \partial \eta^g \partial \zeta^h},$$

où la somme des coefficients

$$R^{(1)}_{0,0,0} + R^{(2)}_{0,0,0} + \ldots + R^{(p)}_{0,0,0} = 0,$$

et où M, N, P satisfont aux équations (21) dans lesquelles $R_k = R^{(k)}_{0,0,0}$.

Comme cas particulier de ce théorème, supposons que la fonction F admette les trois groupes de périodes $a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$ et soit régulière en tous les points du parallélépipéde excepté aux points

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_p, y_p, z_p)$$

et que ces points soient des points singuliers essentiels isolés. L'on pourra alors supposer, dans ce qui précède, les rayons des sphères $S_1, S_2, \ldots, S_p$ infiniment petits, et par suite la fonction sera dans tout l'espace représentée par la série (33).

Dans les séries précédentes ordonnées par rapport aux dérivées de $Z(\xi - x_k, \eta - y_k, \xi - z_k)$, il suffirait d'étendre la sommation seulement à toutes les valeurs de f, g, h qui donnent des dérivées linéairement indépendantes; mais alors il faudrait évidemment modifier les valeurs des coefficients des dérivées restantes.

8. De même que nous venons d'étudier des fonctions F, à trois groupes de périodes, analogues à la partie réelle d'une fonction doublement périodique, l'on pourrait étudier des fonctions F à deux groupes ou à un seul groupe de périodes. Dans une Note présentée à l'Académie des sciences dans la séance du 24 Septembre 1883 M. A. Chervet a été amené à introduire une fonction F à un groupe de périodes pour représenter le *potentiel d'une masse liquide limitée par deux plans parallèles verticaux.* En posant

$$r_\nu = \sqrt{(x - \nu\pi)^2 + y^2 + z^2}, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty$$

$$r'_\nu = \sqrt{(x + \nu\pi)^2 + y^2 + z^2}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \infty,$$

la fonction introduite par M. Chervet est, à un facteur constant près,

$$F(x, y, z) = \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right) + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r'_1}\right) + \left(\frac{1}{r'_2} - \frac{1}{r_3}\right) + \cdots$$

Si l'on change x en $x + \pi$, r_0 devient r'_1, r_ν devient $r_{\nu-1}$ et r'_ν devient $r'_{\nu+1}$. Par conséquent

$$F(x + \pi, y, z) = \left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r_0}\right) + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r'_2}\right) + \left(\frac{1}{r'_3} - \frac{1}{r_2}\right) + \cdots$$

Donc

$$F(x+\pi,\ y,\ z) = -F(x,\ y,\ z)$$

$$F(x+2\pi,\ y,\ z) = F(x,\ y,\ z);$$

par suite cette fonction admet bien un groupe de périodes, à savoir $(2\pi,\ 0,\ 0)$.

Cet exemple conduit à penser que les fonctions F à deux ou trois groupes de périodes trouveront aussi des applications dans la physique mathématique. La formation des fonctions F à un ou deux groupes de périodes repose encore sur l'application du théorème IV de la première partie.

L'élément simple qui pourra servir à former ces fonctions se déduit de la fonction $Z(x, y, z)$ définie dans le § 2 en supposant

1° pour les fonctions à deux groupes de périodes (a, b, c), (a', b', c'), que le point A'' (a'', b'', c'') s'éloigne indéfiniment;

2° pour les fonctions à un seul groupe de périodes (a, b, c), que les deux points A' (a', b', c') et A'' (a'', b'', c'') s'éloignent indéfiniment.

Mais il importe de remarquer que ces fonctions à un ou deux groupes de périodes peuvent n'avoir aucun point singulier à distance finie. Ainsi, par exemple, la fonction

$$\varphi(x,\ y,\ z) = e^{n(x\cos\alpha + y\sin\alpha)}\cos nz$$

où n est entier admet le groupe de périodes $(0,\ 0,\ 2\pi)$, vérifie l'équation $\Delta\varphi = 0$ et est régulière en tous les points à distance finie. De même la fonction

$$\psi(x,\ y,\ z) = e^{z\sqrt{m^2+n^2}}\cos mx\cos ny,$$

où m et n sont entiers, admet les deux groupes de périodes $(2\pi,\ 0,\ 0)$ et $(0,\ 2\pi,\ 0)$, vérifie l'équation $\Delta\psi = 0$ et est régulière en tous les points à distance finie.