EINIGE ANZAHLEN FÜR KEGELFLÄCHEN

VON

H. KREY

in FREIBURG $^1/_B$.

In einer durch 6, 7 oder 8 feste Puncte definirten Schaar von Flächen zweiter Ordnung sind bekanntlich Kegelflächen enthalten, und zwar bilden die Scheitel derselben eine Fläche 4^{ter} Ordnung, eine Raumcurve 6^{ter} Ordnung, oder sind in endlicher Anzahl 4 vorhanden. Die erste dieser Zahlen lässt sich leicht verallgemeinern: Die Scheitel von Kegeln n^{ter} Ordnung, welche durch $\frac{1}{2}n(n+3)+1$ Puncte gehen, bilden eine Fläche der Ordnung

$$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

Man zeigt dieses auch durch Rechnung, wenn man den Kegelscheitel als Projectionscentrum auf einer Geraden sich bewegen lässt, und die Bedingung ausdrückt, dass die auf eine Ebene projicirten Puncte in einer Curve n^{ter} Ordnung liegen sollen. Weniger leicht ist die Verallgemeinerung der zweiten und dritten obiger Zahlen. Wenn $n=2$, erhält man z. B. die zweite aus der ersten dadurch, dass man zwei Gruppen von 6 Puncten annimmt, die 5 Puncte gemeinschaftlich haben. Versucht man aber, dieses nahe liegende Verfahren auf Kegel n^{ter} Ordnung auszudehnen, dann stellen sich gewisse Schwierigkeiten ein. So würde z. B. folgende Aufgabe zu behandeln sein: Wie viele Puncte x in fester Ebene, abgesehen von den Spuren der Verbindungsgeraden von $\frac{1}{2}n(n+3)$ gegebenen Puncten, haben eine solche Lage, dass ein Kegel n^{ter} Ordnung mit Scheitel x, der jene Puncte enthalten soll, *nicht* bestimmt ist? — Um derartige Schwierigkeiten zu umgehen, habe ich einen anderen Weg eingeschlagen, und fast ausschliesslich von dem *Princip der Erhaltung der Anzahl* Gebrauch gemacht.

1.

Erklärung der Abkürzungen. Ort der Spitzen einer zweifach unendlichen Kegelschaar.

Als Zeichen für die zweifache, einfache, resp. nullfache Bedingung, dass die Kegelspitze x in einer gegebenen Geraden, oder Ebene, oder endlich beliebig im Raum liege, soll gesetzt werden:

$$x_g, \quad x_e, \quad x_r.$$

Zur Bestimmung eines Kegels oder einer endlichen Anzahl solcher müssen noch

$$\frac{1}{2}n(n+3)+i \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

Bedingungen gegeben sein; aber von ihnen sollen immer nur diejenigen, welche nicht einfache Punctbedingungen sind, besonders bezeichnet werden. Solche bevorzugte Bedingungen sind

P^μ, d. h. die Gerade $\overline{xP}$ zur μ-fachen Kante zu haben, wenn der Punct P, nicht aber die Kante selbst, gegeben ist.

P_e^μ; der gegebene Punct, durch welchen die μ-fache Kante gehen soll, liegt in der Ebene e.

$P^\mu T_g$, oder $P_e^\mu T_e$; eine berührende Ebene längs der μ-fachen Kegelkante ist gegeben; dieselbe enthält die Gerade g, oder fällt mit der Ebene e zusammen.

P^μ, ht; es sollen h gegebene, durch P gelegte gerade Linien Tangenten des Kegels in P werden.

G^μ, $\mu' E$; die μ-fache Kegelkante mit μ' berührenden Ebenen ist gegeben.

Im letzten Falle ist est selbstverständlich, dass x auf der Geraden G liegt; in den übrigen Fällen aber muss die Bedingung für x hinzugefügt werden. Dabei ist es unnöthig, die Zahl der übrigen, einfachen, Bestimmungspuncte, wie z. B., wenn die Bedingungen x_e, P^μ, ht gegeben sind,

$$\frac{1}{2}n(n+3)+2-\frac{1}{2}\mu(\mu+1)-h,$$

ausdrücklich anzugeben, weil sie schon aus μ, h, und dem Index von x folgt.

Jede Zusammenstellung der hier eingeführten Zeichen, wie

$$[x_e,\ P^\mu,\ ht], \qquad [x_e], \qquad [x_r,\ P^\mu], \text{ u. s. f.}$$

bedeutet die *Anzahl* derjenigen Kegelflächen, welche den hingeschriebenen und hinzuzudenkenden Bedingungen genügen. Durch diese Bezeichnung wird offenbar eine bedeutende Abkürzung in der Ausdrucksweise erzielt.

Es gelingt nun, *die Symbole mit* $[x_r]$ *auf solche mit* $[x_e]$, *die mit* $[x_e]$ *auf solche mit* $[x_g]$ *zurückzuführen.* Mit der Berechnung der letzteren hat man also zu beginnen.

Wie so eben erklärt ist, bedeutet

$$(1) \qquad [G^\mu,\ \mu' E] \qquad (\mu' \leqq \mu)$$

die Zahl der Puncte auf einer Geraden G, welche eine solche Lage haben, dass aus ihnen als Spitze ein Kegel n^{ter} Ordnung construirbar ist, welcher G zur μ-fachen Kante hat, von μ' gegebenen, durch G gelegten Ebenen längs dieser Kante berührt wird, und durch

$$a+1=\frac{1}{2}n(n+3)-\frac{1}{2}\mu(\mu+1)-\mu'+1$$

gegebene Puncte des Raums geht. Die Zahl (1) ist daher auch gleich dem Grade eines einstufigen Linienortes, welcher auf folgende Art entsteht. Durch jeden Punct von G als Spitze legt man den Kegel, der die Bedingungen G^μ, $\mu' E$ erfüllt, und durch a gegebene Puncte geht. Jeder dieser Kegel trifft eine feste, durch G gelegte Ebene in $n-\mu$ beweglichen Geraden, die den erwähnten Linienort ausfüllen. Um den Grad dieses Ortes zu bestimmen, braucht man nur zu untersuchen, wie viele seiner

Strahlen durch einen Punct Q *der Geraden* G gehen. Es sind dieses erstens die $n-\mu$ Geraden, welche der Kegel mit Scheitel Q liefert; zweitens aber tritt für gewisse Puncte von G der Fall ein, dass eine der $n-\mu$ beweglichen Geraden mit G zusammenfällt, und somit auch durch Q geht. Daher ist

$$(2) \qquad [G^\mu,\ \mu' E] = \begin{cases} n-\mu+[G^\mu,\ (\mu'+1)E], & \text{wenn } \mu'<\mu \\ n-\mu+[G^{\mu+1}], & \text{wenn } \mu'=\mu, \end{cases}$$

woraus man leicht ableitet:

$$(3) \qquad [G^{\mu-1}]-[G^\mu]=\mu(n-\mu+1).$$

Summirt man die hieraus für $\mu=1, 2, \ldots, n$ entstehenden Gleichungen, und beachtet, dass $[G^n]=0$ ist, so findet sich

$$[G^0]=\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\mu(n-\mu+1),$$

oder in anderer Bezeichnung

$$(4) \qquad [x_g]=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

Die Fläche der Ordnung $[x_g]$ enthält offenbar die $\frac{n(n+3)}{2}+1$ gegebenen Puncte n-fach; ihre Verbindungsgeraden einfach.

Aus (3) folgt noch durch Summirung von $\mu=1$ bis $\mu=\mu$

$$[G^\mu]=[x_g]-\frac{1}{2}\mu(\mu+1)n+\frac{1}{3}(\mu^3-\mu),$$

und darauf aus (2) die später zu benutzende Gleichung:

$$(5) \qquad [G^\mu,\ (\mu-1)E]=[x_g]-\frac{1}{2}(\mu^2+3\mu-2)n+\frac{1}{3}\mu(\mu^2+3\mu-4).$$

2.

Ort der Spitzen einer einfach unendlichen Kegelschaar.

Auf dieselbe Art, wie $[x_g]$ bestimmt wurde, hätte man auch

$$[x_g,\ P^\mu]$$

berechnen können, würde aber dann Kegel mit zwei mehrfachen Kanten zu betrachten gehabt haben. Viel schneller gelangt man zum Ziel, *wenn man $\mu + 1$ der willkürlich gelegenen Bestimmungspuncte dem Puncte P unendlich nahe legt*, wodurch sie in die Lagen $Q_1, \ldots, Q_{\mu+1}$ kommen mögen. Die Kegel, welche jetzt den gestellten Bedingungen genügen, haben entweder ihren Scheitel in einer der Ebenen $PQ_1Q_2, \ldots, PQ_\mu Q_{\mu+1}$, oder sie schicken durch P eine $(\mu + 1)$-fache Kante, d. h. man hat

$$[x_g,\ P^\mu] - [x_g,\ P^{\mu+1}] = \frac{1}{2}\mu(\mu + 1),$$

woraus durch Summirung von $\mu = 1$ bis $\mu - 1$, wegen $[x_g,\ P^n] = 0$,

$$[x_g,\ P^\mu] = [x_g] - \frac{1}{6}(\mu^3 - \mu) \tag{6}$$

folgt.

Das gleiche Verfahren führt zu einem anderen Ausdruck für

$$[x_e,\ P^\mu].$$

Die $\frac{1}{2}\mu(\mu + 1)$ Ebenen $PQ_1Q_2, \ldots, PQ_\mu Q_{\mu+1}$ bestimmen jetzt ebensoviele Spuren g in der Ebene e, und den Forderungen kann erstens dadurch genügt werden, dass x in einer dieser Geraden liegt, zweitens dadurch, dass der Kegel eine $(\mu + 1)$-fache Kante durch P schickt. Jede der Geraden g enthält

$$[x_g,\ P^\mu T_g]$$

Scheitel von Kegeln, welche der Aufgabe genügen; zu diesen Scheiteln gehören indessen auch die

$$3 \cdot \binom{\mu + 1}{4}$$

Schnittpuncte zweier g, welche nicht Spuren der Geraden $PQ_1, \ldots, PQ_{\mu+1}$ sind; damit diese nicht zwei Mal gezählt werden, hat man ihre Zahl von

$$\frac{1}{2}\mu(\mu + 1) \cdot [x_g, \; P^{\mu} T_g]$$

in Abzug zu bringen, und erhält so

$$(7) \qquad [x_e, \; P^{\mu}] - [x_e, \; P^{\mu+1}] = \frac{1}{2}\mu(\mu + 1)[x_g, \; P^{\mu}, \; T_g] - \frac{1}{8}\mu(\mu^2 - 1)(\mu - 2).$$

Das erste Symbol rechts kann man leicht auf (6) zurückführen. Legt man in der Bedingung (6) einen der noch verfügbaren Puncte Q in die Nähe von P, und zwar so, dass $\overline{PQ}$ die Gerade g in x' trifft, dann genügt der Kegel aus x', μ mal zählend, der Forderung, während die übrigen die Bedingung T_g erfüllen; d. h. man hat

$$[x_g, \; P^{\mu} T_g] = [x_g, \; P^{\mu}] - \mu,$$

und durch Einsetzen in die vorige Gleichung, und Benutzung von (6)

$$(8) \qquad [x_e, \; P^{\mu}] - [x_e, \; P^{\mu+1}]$$

$$= \frac{1}{12}\mu(\mu + 1) \cdot n(n + 1)(n + 2) - \frac{1}{24}\mu(2\mu^4 + 5\mu^3 + 4\mu^2 + 7\mu + 6).$$

Nun ist

$$[x_e, \; P^n] = 3 \cdot \binom{n + 2}{4};$$

denn nachdem aus den $(n + 2)$ Puncten ein Quadrupel A_1, A_2, A_3, A_4 herausgegriffen ist, kann man als Axe des degenerirten Kegels jede Gerade wählen, welche durch P geht, und eines der 3 Geradenpaare

$$A_1 A_2, \; A_3 A_4; \; A_1 A_3, \; A_2 A_4; \; A_1 A_4, \; A_2 A_3$$

trifft. Die Gleichung (8) giebt also durch Summirung von $\mu = 1$ bis $\mu = n - 1$

$$(9) \qquad [x_e] = \frac{1}{72} n(n-1)(n+1)(n+2)(n^2+4n+6)$$

und sodann durch Summirung von $\mu = 1$ bis $\mu - 1$ die allgemeinere, später noch zu verwerthende:

$$(10) \quad [x_e, P^\mu] = [x_e] - \frac{1}{6}\mu(\mu^2-1)[x_g] + \frac{1}{72}\mu(\mu-1)(\mu^4+\mu^3-\mu^2+5\mu+6).$$

Beiläufig bemerkt, folgt aus (9)

$$(10\mathrm{a}) \quad \left[\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\right]^2 - \frac{1}{2}\frac{n(n+3)}{2}\left[\frac{n(n+3)}{2} - 1\right] - [x_e]$$

$$= \frac{1}{72} n(n-1)(n-2)(n^3+9n^2+29n+33)$$

für die Zahl der von den Spuren der Verbindungsgeraden verschiedenen Puncte in e, aus welchen ein Kegel durch die $\frac{n(n+3)}{2}$ Puncte *nicht* bestimmt ist. Die *directe* Bestimmung dieser Zahl ist mir nur für $n = 3$ gelungen.

3.

Zahl der Kegel durch $\frac{1}{2}n(n+3)+3$ *Puncte.*

Die Annäherung *eines* der gegebenen Puncte an P hat zur Folge, dass ein Theil der Kegelspitzen x, welche der Bedingung

$$[x_r, P^\mu, ht]$$

genügen, *sich ebenfalls dem Puncte P unendlich nähert.* Für wie viele x dieses eintritt, möge vorläufig mit

$$(n-\mu)\varphi(n, \mu, h), \text{ oder kürzer } (n-\mu)\varphi(h)$$

bezeichnet werden. Man hat dann

$$(11)\qquad [x_r,\ P^\mu,\ ht] = (n-\mu)\varphi(h) + [x_r,\ P^\mu,\ (h+1)t],$$
$$(h = 0,\ 1,\ 2,\ldots,\mu)$$

also auch

$$(12)\quad [x_r,\ P^\mu] = (n-\mu)[\varphi(0)+\varphi(1)+\ldots+\varphi(\mu)] + [x_r,\ P^\mu,\ (\mu+1)t].$$

Die der Bedingung

$$[x_r,\ P^\mu,\ (\mu+1)t]$$

genügenden Kegel haben entweder $\overline{xP}$ zur $(\mu+1)$-fachen Kante — in welchem Falle die Forderung $(\mu+1)t$, unabhängig von der Lage der $(\mu+1)$ berührenden Ebenen längs dieser Kante, als erfüllt zu betrachten ist — oder haben ihren Scheitel in einer der Ebenen $t_i t_k$, die durch je zwei der Richtungen t bestimmt ist. Die Anzahl dieser letzteren Kegel beträgt weniger als

$$\frac{1}{2}\mu(\mu+1)[x_e,\ P_e^\mu T_e(\mu-1)t],$$

weil hier wieder zu beachten ist, dass jede Schnittgerade zweier solcher Ebenen, welche nicht zu den t selbst gehört,

$$[G^\mu,\ (\mu-1)E]$$

den Forderungen genügende Puncte x enthält, dass also, damit letztere nicht zwei Mal gezählt werden, von dem vorigen Ausdruck das

$$3\cdot\binom{\mu+1}{4}\text{-fache}$$

abgezogen werden muss. So entsteht die Gleichung

$$(13)\qquad [x_r,\ P^\mu,\ (\mu+1)t] - [x_r,\ P^{\mu+1}]$$
$$= \frac{1}{2}\mu(\mu+1)[x_e,\ P_e^\mu T_e(\mu-1)t] - \frac{1}{8}\mu(\mu^2-1)(\mu-2).[G^\mu,\ (\mu-1)E].$$

Um rechts die Bedingung T_e wegzuschaffen, gehen wir aus von der weniger speciellen Forderung

$$[x_e,\ P_e^\mu(\mu-1)t],$$

und legen einen der noch freien Puncte Q in die Nähe von P_e, und zwar in die Ebene e. Dadurch theilen sich sofort die fraglichen Puncte x_e in drei Gruppen. Ein Theil liegt jetzt in unendlicher Nähe von P_e; die Zahl derselben soll mit

$$(n-\mu)\psi(\mu-1)$$

bezeichnet werden; auf der Geraden $P_e Q_e$ liegen

$$[G^\mu,\ (\mu-1)E]$$

Puncte, von welchen jeder μ-fach zählt; die übrigen endlich erfüllen die Bedingung T_e. Dies giebt

$$\begin{aligned}(14)\qquad & [x_e,\ P_e^\mu T_e(\mu-1)t] \\ &= [x_e,\ P_e^\mu(\mu-1)t]-(n-\mu)\psi(\mu-1)-\mu.[G^\mu,\ (\mu-1)E].\end{aligned}$$

Ferner kann man P_e^μ durch P^μ ersetzen vermöge der Gleichung

$$(15)\qquad [x_e,\ P_e^\mu(\mu-1)t]=[x_e,\ P^\mu,\ (\mu-1)t]-\varphi(\mu-1).$$

Auf der rechten Seite darf man *jetzt* die Bedingung $(\mu-1)t$, da sie $\mu-1$ einfachen Punctbedingungen äquivalent ist, weglassen. $\varphi(\mu-1)$ ist nichts Anderes als die Vielfachheit der Raumcurve $[P^\mu,\ (\mu-1)t]$ im Puncte P; dass φ hier dieselbe Bedeutung hat wie in der Gleichung (11), wird sogleich nachgewiesen werden.

Aus (12), (13), (14), (15) folgt nun die Reductionsformel

$$(16)\qquad [x_r,\ P^\mu]-[x_r,\ P^{\mu+1}]=(n-\mu)\sum_{h=0}^{h=\mu}\varphi(h)$$

$$+\frac{1}{2}\mu(\mu+1)\Big\{[x_e, P^\mu]-\frac{1}{4}(\mu^2+\mu+2)[G^\mu, (\mu-1)E]-\varphi(\mu-1)-(n-\mu)\psi(\mu-1)\Big\},$$

welche zur Berechnung von $[x_r,\ P^\mu]$ dienen kann, sobald $\varphi(h)$, $\psi(h)$ ermittelt sein werden. Die Bedeutung der letzteren Zahlen erkennt man durch nachstehende geometrische Überlegung.

Nachdem einer der

$$\alpha+1=\frac{1}{2}n(n+3)+3-\frac{1}{2}\mu(\mu+1)-h$$

freien Puncte Q der Bedingung (11) in die Nähe von P gelegt ist, projicire man die noch übrigen aus P auf eine beliebige Ebene E, wodurch Puncte $M_1', \ldots, M_\alpha'$ entstehen, deren Lage als constant angesehen werden darf, so lange das Projectionscentrum sich nur unendlich wenig von P entfernt. In E construire man Plancurven n^{ter} Ordnung, welche durch $M_1', \ldots, M_\alpha'$ gehen, und einen μ-fachen Punct P' der Art haben, dass die Puncte $t_1', \ldots, t_h'$, die Spuren der Richtungen $t_1, \ldots, t_h$, einzeln oder zu zweien auf dessen Tangenten liegen. Den Punct x kann man nun, ohne ihn um ein Endliches von P zu entfernen, in der Geraden PP' auf genau $n-\mu$ Arten so wählen, dass die Projection Q' von Q in die Plancurve fällt. Der aus einem solchen Puncte x über der C_n construirte Kegel genügt offenbar allen gestellten Bedingungen, und es giebt

$$(n-\mu)\varphi(h)$$

solcher Puncte x, wenn $\varphi(h)$ die Zahl der Plancurven n^{ter} Ordnung bedeutet, die auf die angegebene Weise construirbar sind.

Lässt man die Bedingung Q fort, dann hat man es mit einer Raumcurve

$$[P^\mu,\ ht]$$

zu thun, deren Vielfachheit in P $\varphi(h)$ beträgt. Die Richtungen, in welchen diese Curve durch P geht, sind nämlich die Verbindungsgeraden von P mit den verschiedenen Puncten P'.

In ähnlicher Weise wird die Bedeutung der in Gleichung (14) eingeführten Zahl $\psi(\mu-1)$, und allgemeiner die von $\psi(h)$ ersichtlich. Die Forderung

$$[x_e,\ P_e^\mu,\ ht]$$

beschränkt x auf die Ebene e. Wir lassen einen der

$$\alpha = \frac{n(n+3)}{2} + 2 - \frac{\mu(\mu+1)}{2} - h$$

freien Puncte Q_e in die Nähe von P_e rücken, und projiciren die $\alpha - 1$ übrigen auf eine Ebene E, die e in der Geraden Γ treffen möge. Die Plancurven in E, welche Leitcurven von Kegeln werden sollen, müssen jetzt ihren μ-fachen Punct P_e' in der Geraden Γ haben, und im Übrigen hinsichtlich der festen Puncte $t_1', \ldots, t_h'$ denselben Bedingungen genügen. Verbindet man einen der $n-\mu$ weiteren gemeinschaftlichen Puncte einer solchen Curve und der Geraden Γ mit Q_e, so wird auf der Geraden $P_e P'_e$ ein zu P_e benachbarter Punct x bestimmt, welcher einer der gesuchten ist.

Im Falle $\mu = 1$ bedürfen diese Überlegungen einer kleinen Modification; jedoch sind die für $\varphi(h)$, $\psi(h)$ zu entwickelnden Ausdrücke der Art, dass die Gleichung (16) für $\mu = 1$ richtig bleibt.

Man hat also noch zu bestimmen:

1) Die Zahl $\varphi(h)$ der Plancurven n^{ter} Ordnung, welche durch

$$\alpha = \frac{n(n+3)}{2} + 2 - \frac{\mu(\mu+1)}{2} - h$$

gegebene Puncte gehen, und einen μ-fachen Punct haben, dessen Tangenten h gegebene Puncte treffen (wobei sich die h Puncte nicht nothwendig auf h *verschiedene* Tangenten vertheilen).

2) Die Ordnung $\psi(h)$ des Ortes der μ-fachen Puncte, welcher entsteht, wenn nur $\alpha - 1$ Puncte zu Grunde gelegt werden, und die Bedingungen im Übrigen dieselben bleiben.

Für $h = 0$ ist

$$\psi(0) = \frac{1}{2}\mu(\mu+1)(n-\mu+1) \tag{17}$$

$$\varphi(0) = \frac{1}{8}\mu(\mu^2-1)(\mu+2)(n-\mu+1)^2. \tag{18}$$

Was die erste dieser Zahlen angeht, so kann man ja sogar die Gleichung des betreffenden Ortes wirklich bilden. Wählt man $r = \frac{1}{2}\mu(\mu+1)$ linear-unabhängige Curven, welche durch die $\alpha - 1$ Puncte gehen, als Grundcurven einer Schaar, und stellt die r Bedingungen für das Vorhandensein eines μ-fachen Punctes auf, so giebt die lineare Elimination der Parameter eine Determinante von r Reihen. — Durch α Puncte gehen nur $r - 1$ linear-unabhängige C_n; man erhält also jetzt als nothwendige und hinreichende Bedingung für einen μ-fachen Punct das gleichzeitige Verschwinden der $(r-1)$-reihigen Determinanten einer Matrix von r Horizontalreihen und $r - 1$ Verticalreihen, und hieraus ergiebt sich ohne Schwierigkeit für die Zahl der Curven mit einem μ-fachen Punct

$$[(r-1)^2 - (r-2)^2 \ldots \pm 4 \mp 1](n-\mu+1)^2,$$

d. i. der Ausdruck (18).

Von (17), (18) ausgehend, kann man leicht $\varphi(h)$, $\psi(h)$ allgemein bestimmen. Für $h > 1$ zerfällt die Curve $\psi(h)$ in die Verbindungsgeraden der h Puncte, und eine Restcurve,

$$\psi(h) = \frac{1}{2}h(h-1) + \psi_1(h).$$

Auch die Zahl $\varphi(h)$ zerlegt sich, wie folgt:

$$\varphi(h) = 3 \cdot \binom{h}{4} + \frac{1}{2}h(h-1)\varphi_1(h) + \varphi_2(h),$$

weil der Forderung genügt werden kann erstens durch solche C_n, welche einen Schnittpunct von zwei Verbindungsgeraden der h Puncte zum μ-fachen Punct haben; zweitens dadurch, dass eine dieser Verbindungsgeraden als Tangente des μ-fachen Punctes gegeben ist, drittens endlich dadurch, dass sich die h Puncte auf h *verschiedene* Tangenten vertheilen.

Lässt man einen Punct X sich auf der Curve $\psi_1(h)$ bewegen, so existirt der Voraussetzung zufolge immer eine C_n, welche durch die $\alpha - 1$ Puncte geht, und in X einen μ-fachen Punct hat, dessen Tangenten die Bedingungen $A_1, \ldots, A_h$ erfüllen. Die Verbindungsgerade von X mit einem weiteren festen Puncte A_{h+1} bestimmt $n-\mu$ Puncte Y auf der C_n, und da $\varphi_2(h)$ Puncte X auf der Curve $\psi_1(h)$ vorhanden sind, welche ihre C_n durch den Punct A_{h+1} schicken, so ist

$$(n-\mu)\psi_1(h) + \varphi_2(h)$$

der Grad des Y-Ortes. So gross ist auch die Zahl der Coincidenzen von Y mit X; aber nicht gemeint sind die $h[\psi_1(h) - \mu]$, welche in den einfachen Schnittpuncten der Geraden $A_{h+1}A_1, \ldots, A_{h+1}A_h$ mit der Curve $\psi_1(h)$ stattfinden. Hiernach ist

$$\varphi_2(h+1) = (n-\mu-h)\psi_1(h) + \varphi_2(h) + h\mu.$$

In durchaus analoger Weise findet man

$$\psi_1(h+1) = n-\mu-h+\psi_1(h),$$

$$\varphi_1(h+1) = n-\mu+\varphi_1(h) - (h-2), \qquad (h \geqq 2)$$

$$\varphi_1(2) = \psi(0) + n - 2\mu,$$

und sodann

$$\psi_1(h) = \psi(0) + (n-\mu)h - \frac{h(h-1)}{2},$$

$$\varphi_1(h) = \psi(0) + (n-\mu)h - \frac{1}{2}h(h-5) - n - 3,$$

$$\varphi(h) = \varphi(0) + \frac{1}{3}h(h-1)(h-2) + h(n-\mu)\psi(0) + \frac{1}{2}h(h-1)(n-\mu)^2,$$

$$\sum_{h=0}^{h=\mu}\varphi(h) = \frac{1}{24}\mu(\mu+1)\big[(3\mu^3 + 12\mu^2 + 7\mu - 10)n^2$$

$$-(6\mu^4 + 18\mu^3 - 4\mu^2 - 20\mu + 12)n + 3\mu^5 + 6\mu^4 - 8\mu^3 - 2\mu^2 + 3\mu - 2\big].$$

So ist alles auf der rechten Seite der Gleichung (16) Stehende bekannt. Die Summirung von $\mu = 1$ bis $\mu = n-1$ giebt, mit Hülfe der BERNOULLI'schen Summenformeln, und wegen $[x_r, P^n] = 0$

$$[x_r] = \frac{n(n-1)(n+1)}{6480}[5n^6 + 45n^5 + 170n^4 + 108n^3 + 1526n^2$$
$$+ 5472n + 3816]$$

$$= 280.\binom{n+4}{9} + 280.\binom{n+4}{8} + 105.\binom{n+3}{7} + 77.\binom{n+3}{6}$$
$$+ 43.\binom{n+2}{5} - 16.\binom{n+2}{4} + 20.\binom{n+1}{3}.$$

Dieses ist also die Zahl der Kegel n^{ter} Ordnung, welche durch $\frac{1}{2}n(n+3)+3$ Puncte gehen; beispielsweise 120 für $n=3$.

Hieraus lässt sich noch herleiten die Zahl η derjenigen Scheitel, aus welchen ein *Büschel* von Kegeln n^{ter} Ordnung, die durch $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ gegebene Puncte des Raums gehen sollen, *nicht* bestimmt ist. Natürlich wird abgesehen von den auf den Verbindungsgeraden jener Puncte liegenden Kegelscheiteln.

Der auf die Puncte $P_1, P_2, \ldots, P_{\frac{1}{2}n(n+3)}$ bezügliche ξ-Ort, dessen Ordnung

$$\xi = \frac{1}{72}n(n-1)(n-2)(n^3 + 9n^2 + 29n + 33)$$

in (10a) bestimmt wurde, geht mit $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Zweigen durch jeden der Puncte P, und trifft, wie aus den Formeln von § 1 leicht nachzuweisen ist, jede Verbindungsgerade *ausserdem* an $m - 3n + 2$ Stellen, wo $m = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$. Andererseits füllen die Scheitel von Kegeln, welche durch

$$P_1, \ldots, P_{\frac{1}{2}n(n+3)-1}, \; Q_1, \; Q_2$$

gehen, eine Fläche m^{ter} Ordnung aus, und die Vertheilung der Schnittpuncte mit dem ξ-Orte zeigt, dass

$$\delta = m\xi - \left[\frac{n(n+3)}{2} - 1\right] n \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$
$$- \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+3)}{2} - 1\right]\left[\frac{n(n+3)}{2} - 2\right](m - 3n + 2) - \eta$$

Puncte des letzteren Ortes existiren, aus welchen ein Kegel n^{ter} Ordnung über

$$P_1, \ldots, P_{\frac{1}{2}n(n+3)}, \; Q_1, \; Q_2$$

construirbar ist. — Um zu einem zweiten Ausdruck für δ zu gelangen, betrachten wir die Schnittpuncte der in Bezug auf die letztgenannten Puncte definirten Raumcurve $[x_e]$ mit dem Scheitelorte von Kegeln, die durch

$$P_1, \ldots, P_{\frac{1}{2}n(n+3)}, \; Q_3$$

gehen. In jeder der Verbindungsgeraden, welche beiden Punctgruppen gemeinschaftlich sind, liegen $m - n$ Schnittpuncte von Curve und Fläche; zu den übrigen gehören noch die δ Puncte, weil ja die Fläche den ξ-Ort ganz enthält. Hiernach wird

$$m \cdot [x_e] - \frac{1}{2} \frac{n(n+3)}{2}\left[\frac{n(n+3)}{2} - 1\right](m - n) - \delta = [x_r],$$

und da $[x_r]$ schon bekannt ist, lässt sich δ, also auch η bestimmen. Die Ausrechnung giebt

$$\eta = \frac{(n-1)(n-2)}{6480}(5n^7 + 60n^6 + 200n^5 - 492n^4 - 2545n^3 - 2196n^2 + 14832n - 6480).$$

Freiburg, im October 1883.