SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

K. WEIERSTRASS

À BERLIN.

Traduit de l'allemand [1] par A. Pautonnier à Paris.

L'objet de ce mémoire est de combler une lacune qui se trouve dans l'ouvrage de JACOBI: *Theorie der elliptischen Functionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet* (Gesammelte Werke, T. I, p. 497) et sur laquelle j'ai appelé l'attention dans une note page 545. Par suite j'ai employé ici constamment les notations de JACOBI.

Pour exprimer les fonctions elliptiques

$$\sin\mathrm{am}\,(u,\ k), \qquad \cos\mathrm{am}\,(u,\ k), \qquad \Delta\,\mathrm{am}\,(u,\ k)$$

au moyen des fonctions de JACOBI

$$\begin{aligned}
\theta(x,\ q) &= 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots \\
\theta_1(x,\ q) &= 2\sqrt[4]{q}.(\sin x - q^2\sin 3x + q^6\sin 5x - \ldots) \\
\theta_2(x,\ q) &= 2\sqrt[4]{q}.(\cos x + q^2\cos 3x + q^6\cos 6x + \ldots) \\
\theta_3(x,\ q) &= 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \ldots
\end{aligned}$$

on a à résoudre le problème de déterminer pour chaque valeur donnée de k une valeur de q satisfaisant à l'équation

$$\sqrt{k} = \frac{\theta_2(0,\ q)}{\theta_3(0,\ q)} = 2\sqrt[4]{q}.\frac{1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots}. \tag{1}$$

[1] Mathematische und naturwissenschaftliche Mittheilungen aus den Sitzungsberichten der k. preussischen Akademie der Wissenschaften, 1883, p. 95—105, 163—173, 621—647.

Lorsqu'on a trouvé une telle valeur, alors en posant

$$(2) \qquad \frac{2K}{\pi} = \theta_3^2(0,\ q) \qquad x = \frac{u\pi}{2K}$$

on a

$$(3) \qquad \left|\begin{aligned} \sqrt{k}.\sin\operatorname{am}(u,\ k) &= \frac{\theta_1(x,\ q)}{\theta(x,\ q)} \\ \frac{\sqrt{k}}{\sqrt[4]{1-k^2}}.\cos\operatorname{am}(u,\ k) &= \frac{\theta_2(x,\ q)}{\theta(x,\ q)} \\ \frac{1}{\sqrt[4]{1-k^2}}.\Delta\operatorname{am}(u,\ k) &= \frac{\theta_3(x,\ q)}{\theta(x,\ q)}. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on peut fixer arbitrairement la valeur de l'un des radicaux $\sqrt{k}$, $\sqrt[4]{q}$ et la valeur de l'autre se trouve déterminée par l'équation (1). Il faut choisir la valeur de $\sqrt[4]{1-k^2}$ de manière que l'on ait

$$(4) \qquad \sqrt[4]{1-k^2} = \frac{\theta(0,\ q)}{\theta_3(0,\ q)} = \frac{1-2q+2q^4-2q^9+\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots}.$$

Dans le traité posthume de JACOBI: *Theorie der elliptischen Functionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet,* ce problème est traité (§ 6) pour le cas où k est une quantité réelle comprise entre 0 et 1 et la solution donnée en montrant que partant de l'équation (1) on arrive à la même expression de q que celle trouvée par JACOBI dans les *Fundamenta nova* par la voie convenant à cet ouvrage. Je vais maintenant montrer comment, avec les moyens employés par JACOBI dans le traité cité ci-dessus, on peut pour toute valeur complexe de k déterminer toutes les valeurs de q satisfaisant à l'équation (1), et cela au moyen d'une série qui non-seulement à cause de sa rapide convergence fournit un moyen commode de calcul de lavaleur de q correspondant à une valeur numérique donnée de k, mais encore, si l'on considère k comme une quantité variable et q comme une fonction de k, peut servir à découvrir les propriétés caractéristiques de cette fonction. J'emploierai principalement les deux équations utilisées aussi par JACOBI

$$(5) \qquad \left|\begin{aligned} \theta_3(0,\ q) &= \theta_3(0,\ q^4) + \theta_2(0,\ q^4) \\ \theta(0,\ q) &= \theta_3(0,\ q^4) - \theta_2(0,\ q^4) \end{aligned}\right.$$

qui se déduisent immédiatement des expressions de $\theta_3(0, q)$ et $\theta(0, q)$, ainsi que la relation

$$\theta^4(0, q) + \theta_2^4(0, q) = \theta_3^4(0, q). \tag{6}$$

1.

Je considère d'abord exclusivement les valeurs réelles de q soumises à la condition

$$0 \leqq q < 1$$

et je suppose que dans la suite si a est une quantité positive $\log a$ désignera la valeur réelle du logarithme naturel de a, et a^m désignera pour une valeur quelconque de m la valeur donnée par la formule

$$e^{m \log a}.$$

Par suite $\theta(0, q)$, $\theta_2(0, q)$, $\theta_3(0, q)$ ont toujours des valeurs réelles et sont des fonctions continues de q.

De plus, sur les expressions des quantités $\theta_2(0, q)$, $\theta_3(0, q)$, on aperçoit immédiatement que la seconde est constamment positive, et que pour $q > 0$ il en est de même de la première qui s'annule pour $q = 0$. Quant à $\theta(0, q)$, si cette quantité était nulle pour une valeur déterminée de q, il en résulterait d'après (5)

$$\theta_3(0, q^4) = \theta_2(0, q)$$

et par suite, en vertu de l'équation (6), on aurait aussi $\theta(0, q^4) = 0$. Il en résulterait encore que $\theta(0, q^{16})$, $\theta(0, q^{64})$ seraient aussi nulles, ce qui est impossible, parce que $\theta(0, q^m)$ pour une valeur infiniment grande de m prend une valeur infiniment voisine de 1. Par suite $\theta(0, q)$ ne peut s'annuler pour aucune des valeurs considérées de q, et est par suite constamment positive.

D'après cela

$$\frac{\theta_2(0,\ q)}{\theta_3(0,\ q)}$$

est une fonction continue de q qui s'annule pour $q = 0$ et a une valeur positive pour toute autre valeur de q. Elle est toujours plus petite que 1 en vertu de l'équation (5)

$$\theta_3^4(0,\ q) > \theta_2^4(0,\ q);$$

mais on peut montrer *que lorsque q partant de la limite zéro et croissant constamment s'approche de la limite* 1, *q croît aussi constamment et tend vers la même limite.*

Comme on a

$$\frac{\theta_2(0,\ q)}{\theta_3(0,\ q)} = \frac{2q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + q^6 + \ldots)}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots}$$

on peut prendre toujours une valeur positive $q_0 < 1$ telle que

$$\frac{\theta_2(0,\ q)}{\theta_3(0,\ q)}$$

croisse constamment lorsque q croissant d'une manière continue parcourt l'intervalle $(0 \ldots q_0)$. Mais il résulte des équations (5) si on remplace q par $q^{\frac{1}{4}}$

$$\frac{\theta\left(0,\ q^{\frac{1}{4}}\right)}{\theta_3\left(0,\ q^{\frac{1}{4}}\right)} = \frac{1 - \dfrac{\theta_2(0,\ q)}{\theta_3(0,\ q)}}{1 + \dfrac{\theta_2(0,\ q)}{\theta_3(0,\ q)}}. \tag{7}$$

D'après cela $\dfrac{\theta\left(0,\ q^{\frac{1}{4}}\right)}{\theta_3\left(0,\ q^{\frac{1}{4}}\right)}$ décroît constamment, lorsque q parcourt en croissant constamment l'intervalle en question, ou bien, ce qui est la même chose, $\dfrac{\theta(0,\ q)}{\theta_3(0,\ q)}$ décroît constamment lorsque q croissant constamment passe de 0 à $q_0^{\frac{1}{4}}$. Mais on a

$$\frac{\theta_2(0,\ q)}{\theta_3(0,\ q)} = \left(1 - \frac{\theta^4(0,\ q)}{\theta_3^4(0,\ q)}\right)^{\frac{1}{4}};$$

par suite $\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}$ croît en même temps que q tant que $q < q_0^{\frac{1}{4}}$. Il en résulte par suite qu'il en est de même aussi longtemps que q est inférieur à

$$q_0^{\frac{1}{16}},\ q_0^{\frac{1}{64}},\ \ldots.$$

Les termes de cette série convergent vers 1, par suite $\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}$ croît en même temps que q, si près que q s'approche de l'unité. Si on pose

$$\delta = 1 - \frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}$$

on a encore, d'après (7)

$$\frac{\theta\left(0, q^{\frac{1}{4}}\right)}{\theta_3\left(0, q^{\frac{1}{4}}\right)} < \delta$$

$$1 - \frac{\theta_2^4\left(0, q^{\frac{1}{4}}\right)}{\theta_3^4\left(0, q^{\frac{1}{4}}\right)} = \frac{\theta^4\left(0, q^{\frac{1}{4}}\right)}{\theta_3^4\left(0, q^{\frac{1}{4}}\right)} < \delta^4$$

et par suite aussi

$$1 - \frac{\theta_2\left(0, q^{\frac{1}{4}}\right)}{\theta_3\left(0, q^{\frac{1}{4}}\right)} < \delta^4.$$

Il en résulte par suite que pour toute valeur entière positive de m

$$1 - \frac{\theta_2\left(0, q^{\frac{1}{4}}\right)}{\theta_3\left(0, q^{\frac{1}{4}}\right)} < (\delta)^{4^m};$$

par suite, lorsque m devient infiniment grand, la valeur de $q^{\frac{1}{4^m}}$ s'approche indéfiniment de la limite 1, et

$$\frac{\theta_2\left(0, q^{\frac{1}{4^m}}\right)}{\theta_3\left(0, q^{\frac{1}{4^m}}\right)}$$

s'approche aussi indéfiniment de cette limite. Ce qui démontre évidemment la propriété annoncée de la fonction $\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}$.

Cela fait, supposons le quotient

$$\frac{\theta_2^4(0,\ q)}{\theta_3^4(0,\ q)}$$

développé en série $\mathfrak{P}(q)$ suivant les puissances de q. Le premier terme de cette série est $16q$, et ses coefficients sont des nombres rationnels. On peut par suite déterminer une suite infinie de nombres rationnels

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots$$

de manière que pour une valeur suffisamment petite de q l'équation

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathfrak{P}^{n+1}(q) = q \tag{8}$$

soit satisfaite, d'où il résulte, comme $\alpha_0 = \frac{1}{16}$

$$\log(16q) = \log \mathfrak{P}(q) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \mathfrak{P}^n(q) \tag{9}$$

où $\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots$ sont toujours des nombres rationnels.

Si maintenant on choisit une quantité positive $q_0 < 1$ de manière qu'elle se trouve dans le domaine de convergence de la série $\mathfrak{P}(q)$, et si on pose en même temps

$$t_0 = \left(\frac{\theta_2(0,\ q)}{\theta_3(0,\ q)}\right)^4$$

la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| t_0^n$$

(dans laquelle $|\beta_n|$ désigne la valeur absolue de β_n) a une valeur finie et on a certainement l'égalité

$$\log q + \log 16 = 4 \log \frac{\theta_2(0,\ q)}{\theta_3(0,\ q)} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{\theta_2(0,\ q)}{\theta_3(0,\ q)}\right)^{4n} \tag{10}$$

pour les valeurs de q satisfaisant à la condition

$$0 < q \leqq q_0$$

parce que pour toutes ces valeurs on a d'après ce qui précède

$$0 < \left(\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}\right)^4 \leqq t_0.$$

Si on désigne par t

$$\left(\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}\right)^4$$

et si on remplace dans (10) q par q^4, comme on a d'après les équations (5)

$$(11) \qquad \frac{\theta_2(0, q^4)}{\theta_3(0, q^4)} = \frac{1 - \dfrac{\theta(0, q)}{\theta_3(0, q)}}{1 + \dfrac{\theta(0, q)}{\theta_3(0, q)}} = \frac{1 - (1 - t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1 - t)^{\frac{1}{4}}}$$

on obtient une seconde expression pour $\log q$, à savoir

$$(12) \qquad 4 \log q + \log 16 = 4 \log\left(\frac{1 - (1 - t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1 - t)^{\frac{1}{4}}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{1 - (1 - t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1 - t)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n}.$$

Et alors de (10) et de (12) on déduit l'équation

$$(13) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n = \log\left(\frac{8}{t} \frac{1 - (1 - t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1 - t)^{\frac{1}{4}}}\right) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{1 - (1 - t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1 - t)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n}.$$

Pour obtenir cette équation nous avons considéré t comme une fonction de q. Mais comme, lorsque q croissant d'une manière continue parcourt l'intervalle $(0 \ldots q_0)$ t croissant constamment passe de la valeur 0 à la valeur t_0, on voit que l'égalité (13) persiste lorsqu'on considère t comme une variable indépendante et qu'on lui donne une valeur quelconque appartenant à l'intervalle $(0 \ldots t_0)$.

Mais on a

$$d \log\left(\frac{1 - (1 - t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1 - t)^{\frac{1}{4}}}\right) = \frac{\frac{1}{4}(1 - t)^{-\frac{3}{4}} dt}{1 - (1 - t)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\frac{1}{4}(1 - t)^{-\frac{3}{4}} dt}{1 + (1 - t)^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1 - t)^{-\frac{3}{4}} dt}{1 - (1 - t)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{2}(1 - t)^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}(1 - t)^{-\frac{1}{4}}\right) \frac{dt}{t};$$

si donc on développe $\frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{4}}$ suivant les puissances de t, et si on pose

$$(14) \qquad \frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{4}} = 1 + \varepsilon_1 t + 2\varepsilon_2 t^2 + 3\varepsilon_3 t^3 + \dots$$

il vient

$$(15) \qquad \log\left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right) = \log\frac{t}{8} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon_\nu t^\nu$$

et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ sont des nombres rationnels et *positifs.*

De (15) résulte alors

$$(16) \qquad \left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^m = t^m \sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_{m,\nu} t^\nu$$

où pour un exposant quelconque m les coefficients $\varepsilon_{m,\nu}$ sont déterminés par l'équation suivante résultant de (14) et de (16)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(m+\nu)\varepsilon_{m,\nu} t^{m+\nu-1} = m\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_{m,\nu} t^{m+\nu}.\left(\frac{1}{t} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu\varepsilon_\nu t^{\nu-1}\right);$$

on déduit de cette équation la formule de récurrence

$$(17) \qquad \nu\varepsilon_{m,\nu} = m\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu\varepsilon_\mu\varepsilon_{m,\nu-\mu} \qquad (\nu > 0)$$

de laquelle, comme $\varepsilon_{m,0} = \left(\frac{1}{8}\right)^m$, on tire la conclusion importante *que pour une valeur positive de m les grandeurs $\varepsilon_{m,\nu}$ sont toutes des nombres positifs.*

Il résulte de la manière dont on les a obtenues, que les séries

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon_\nu t^\nu, \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_{m,\nu} t^\nu$$

sont convergentes pour toute valeur réelle ou complexe de t dont le module est inférieur à 1. Par suite des propriétés des quantités ε_ν, $\varepsilon_{m,\nu}$

on a pour toute valeur réelle de t comprise entre o et 1 et toute valeur positive de m

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu t^\nu < \log\left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right) + \log\frac{8}{t}$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_{m,\nu} t^{m+\nu} < \left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^m.$$

De là il résulte, si l'on fait converger t vers la limite 1

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu \leqq \log 8, \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_{m,\nu} \leqq 1$$

ou même comme cela a lieu encore si on remplace n par $(n+1)$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu < \log 8, \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_{m,\nu} < 1.$$

Par suite les séries

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu t^\nu, \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{m,\nu} t^\nu$$

sont convergentes pour toute valeur de t dont le module est égal à 1, et il résulte des équations (15), (14), si on fait tendre t vers la limite 1

$$(18) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu = \log 8, \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{m,\nu} = 1.$$

Si nous désignons maintenant

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{m,\nu} t^{m+\nu}, \text{ par } \mathfrak{P}(t, m),$$

d'après ce qui précède on a pour toute valeur réelle de t comprise dans l'intervalle $(0 \ldots t_0)$

$$(19) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n t^n + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \mathfrak{P}(t, 4n),$$

t_0 pouvant représenter une valeur positive quelconque, inférieure à 1 et comprise à l'intérieur du domaine de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n t^n$. Maintenant si l'on pose

$$t_1 = t_0^{\frac{1}{4}},$$

par suite de cette circonstance que les coefficients de la série $\mathfrak{P}(t,\ 4n)$ sont positifs et que leur somme est égale à 1,

$$\mathfrak{P}(t_1,\ 4n) \text{ est positif mais inférieur à } t_0^n,$$

et par suite

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| \mathfrak{P}(t_1,\ 4n) < \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| t_0^n.$$

Pour toute valeur de t satisfaisant à la condition $|t| \leqq t_1$ on a

$$|\mathfrak{P}(t,\ 4n)| \leqq \mathfrak{P}(t_1,\ 4n),$$

et la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} |\beta_n| \varepsilon_{4n,\nu} |t|^{4n+\nu}$$

a une valeur finie. Par suite la série

$$\sum_{n\nu} \beta_n \varepsilon_{4n,\nu} t^{4n+\nu}$$

est absolument convergente, et il en résulte, si on reunit tous les termes contenant la même puissance de t

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \mathfrak{P}(t,\ 4n) = \Sigma(r,\ \rho) t^{4r+\rho}, \qquad {\scriptstyle (\rho=0,1,2,3;\quad r=1,\ldots,\infty)} \tag{20}$$

où l'on a

$$(r,\ \rho) = \sum_{n=1}^{r} \varepsilon_{4n,\,4r-4n+\rho}\beta_n. \tag{21}$$

De l'équation (19) on obtient ensuite

$$\left|\begin{array}{l} \beta_1 = \varepsilon_1, \qquad \beta_2 = \varepsilon_2, \qquad \beta_3 = \varepsilon_3 \\ \beta_{4r+\rho} = \varepsilon_{4r+\rho} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{r} \varepsilon_{4n,\,4r-4n+\rho}\beta_n. \qquad {\scriptstyle (\rho=0,1,2,3;\quad \nu=1,\ldots,\infty)} \end{array}\right. \tag{22}$$

et on peut ainsi calculer de proche en proche les quantités β_n après qu'on a déterminé préalablement les nombres ε_n, $\varepsilon_{4n+\nu}$ définis par les équations (14, 17).

Des formules (22) il apparait que les quantités β_n aussi bien que les quantités ε_ν, $\varepsilon_{4n+\nu}$ sont toutes des nombres positifs et rationnels.

Il résulte encore de ce qui précède *que la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n$$

est absolument convergente pour toute valeur de t réelle ou complexe dont le module n'est pas supérieur à 1.

Pour le démontrer, je remarque d'abord qu'on peut se dispenser maintenant de l'hypothèse faite précédemment que la grandeur désignée par t_0 soit située à l'intérieur du domaine de convergence de la série $\sum \beta_n t^n$, et qu'il suffit de supposer que la série soit convergente pour $t = t_0$. Alors d'après ce qui a été démontré plus haut $|\beta_n| = \beta_n$ et alors il est certain que la série qui constitue le second membre de l'équation (20) converge pour $t = t_0^{\frac{1}{4}}$. Mais pour la même valeur de t la série $\sum \varepsilon_n t^n$ est aussi convergente, l'équation (19) montre donc que si la série $\sum \beta_n t^n$ converge pour $t = t_0$, elle converge aussi nécessairement pour $t = t_0^{\frac{1}{4}}$, et par suite aussi pour

$$t = t_0^{\frac{1}{16}}, \qquad t_0^{\frac{1}{64}}, \ldots .$$

Par suite la série est convergente pour les valeurs positives de t qui s'approchent autant que l'on veut de 1 et le rayon de son cercle de convergence n'est pas inférieur à 1.

D'après cela l'égalité (10)

$$\log q + \log 16 = 4 \log\left(\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}\right)^{4n}$$

a lieu pour toute valeur de q satisfaisant à la condition

$$0 \leqq q < 1 .$$

Mais si q s'approche de la limite 1 l'expression qui forme le second membre de cette égalité converge vers la limite

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

et on a par suite

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \log 16.$$

En conséquence la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n$$

converge aussi lorsque le module de t est égal à 1, et représente pour le domaine de la quantité t défini par la condition

$$|t| \leqq 1$$

une fonction analytique continue de cette variable.

Si on pose maintenant

$$\Psi(t) = \frac{t}{16} e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n} \tag{23}$$

on obtient

$$\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^{n+1} \tag{24}$$

où les coefficients α_n sont identiques à ceux de l'équation (8)

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathfrak{P}^{n+1}(q)$$

qu'on peut calculer au moyen des β_n et qui sont comme ceux-ci des nombres rationnels positifs. Si on fait tendre t vers la limite 1, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = e^{-\log 16 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n} = 1. \tag{25}$$

La fonction $\Psi(t)$ est dès lors définie pour toute valeur de la variable t correspondant à la condition

$$|t| \leqq 1.$$

Pour $t = 1$ on a $\Psi(t) = 1$, au contraire pour toute autre valeur de t

$$|\Psi(t)| < 1.$$

D'après ce qui précède l'égalité

$$q = \Psi(t) \tag{26}$$

persiste, si on pose

$$t = \left(\frac{\theta_2(0,\ q)}{\theta_3(0,\ q)}\right)^4$$

et cela certainement pour les valeurs réelles de q appartenant à un certain intervalle $(0 \ldots q_0)$. Pour toutes les valeurs de t correspondant à ces valeurs de q on a l'égalité

$$[1 + 2\Psi(t) + 2\Psi^4(t) + 2\Psi^9(t) + \ldots]^4 . t = 16\Psi(t)[1 + \Psi^2(t) + \Psi^6(t) + \ldots]. \tag{27}$$

Mais si on considère t comme une variable indépendante et limitée à l'espace déterminé par la condition

$$|t| \leqq 1$$

la valeur $t = 1$ étant cependant exceptée, les deux membres de l'égalité précédente sont une fonction analytique uniforme et continue de t parce que pour chacune des valeurs considérées de cette quantité on a

$$|\Psi(t)| < 1.$$

D'après un théorème connu l'égalité persiste pour chacune des valeurs de t appartenant à l'intervalle considéré. On peut encore montrer que $\theta_3(0, q)$ ne peut s'annuler même pour une valeur complexe de q, et cela de la même manière que nous l'avons démontré plus haut pour la fonction $\theta(0, q)$, en supposant que q était une quantité positive.

Nous avons donc établi que si:

t est une grandeur réelle ou complexe dont le module ne surpasse pas l'unité, et qui n'est pas égale à 1 l'égalité

$$\left(\frac{\theta_2(0,\ q)}{\theta_3(0,\ q)}\right)^4 = 4$$

est satisfaite, si l'on pose

$$q = \Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^{n+1}.$$

Si le module (k) des fonctions elliptiques ne surpasse pas l'unité en valeur absolue et si son carré n'est pas égal à 1, alors nous avons pour

$$\sin\operatorname{am}(u,\ k), \qquad \cos\operatorname{am}(u,\ k), \qquad \Delta\operatorname{am}(u,\ k)$$

les expressions (3), si on pose

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n k^{2n+2}.$$

De plus comme les fonctions elliptiques d'un module quelconque peuvent se réduire à celles dont le module satisfait aux conditions énoncées, ce qui précède suffit pour démontrer que chacune de ces fonctions peut se représenter sous la forme du quotient de deux séries θ. Dans une communication suivante je montrerai comment on peut transformer la série

$$\Sigma \alpha_n t^n$$

en une autre convergente pour toute valeur de t, et démontrerai en même temps comment avec les moyens employés ici on peut résoudre le problème de déduire de l'une d'entre elles toutes les autres valeurs de q satisfaisant à l'équation

$$\left(\frac{\theta_2(0,\ q)}{\theta_3(0,\ q)}\right)^4 = t.$$

2.

D'après ce qui a été établi précédemment sur le cercle de convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n$$

et sur les propriétés des nombres β_n l'équation (13) du chapitre précédent, qui peut s'écrire sous la forme

$$\log t - \log 16 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\log\left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^4 - \log 16 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n}\right\}$$

est vérifiée certainement pour toute valeur réelle comprise dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$, car la quantité désignée par t_0 dans l'établissement de ces équations, sur laquelle on a fait seulement la supposition que la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| \, t_0^n$$

a une valeur finie, peut maintenant être prise égale à 1 en vertu des équations

$$|\beta_n| = \beta_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \log 16.$$

Si on pose donc

$$e^{-\frac{1}{4}\log 16 + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^n$$

les coefficients γ_n étant comme les α_n des nombres rationnels positifs, et $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = 1$, on a

$$(1) \qquad \Psi(t) = t\left(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^n\right)^4$$

et en même temps

$$(2) \qquad \Psi(t) = \frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n}.$$

Mais la série qui forme le second membre de cette égalité est convergente pour toute valeur réelle ou complexe de la quantité t et représente une fonction analytique de cette variable, si on fixe comme il suit l'une des quatre valeurs qu'on peut attribuer à la puissance $(1-t)^{\frac{1}{4}}$ pour chaque valeur déterminée de t. Si on excepte du domaine d'une quantité variable sans aucune restriction, les valeurs réelles négatives ainsi que les points 0 et ∞, il y a toujours parmi les valeurs en nombre infini que le logarithme naturel de x peut prendre pour une valeur déterminée de cette variable, une valeur dont la seconde coordonnée est comprise entre

$$-\pi \text{ et } +\pi.$$

C'est toujours dans la suite cette valeur que nous aurons en vue en écrivant $\log x$: elle constitue à l'intérieur du domaine défini pour la variable x une fonction analytique uniforme de cette variable, car si x' est un point déterminé quelconque de ce domaine, on peut l'entourer d'un contour tel qu'à l'intérieur la série

$$\log x' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x-x'}{x'}\right)^n \tag{3}$$

représente une telle valeur du logarithme naturel de x dont la seconde coordonnée comme celle de $\log x'$ est comprise entre $-\pi$ et $+\pi$.

De là il résulte en particulier que

$$\log x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-1)^n \tag{4}$$

si on limite la quantité x au domaine limité par la condition

$$|x-1| < 1.$$

Car à l'intérieur de ce domaine les expressions figurant dans les deux membres de l'égalité sont toutes les deux des fonctions analytiques uniformes de x; l'égalité a donc lieu pour le domaine entier, car d'après une remarque précédente elle persiste dans le voisinage du point 1.

De plus si x_0 est une quantité négative déterminée pour les valeurs de x appartenant à un certain voisinage du point x_0, la seconde coordonnée de la quantité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x - x_0}{x_0}\right)^n$$

est négative ou positive suivant que la seconde coordonnée de $x - x_0$ est positive ou negative. On a donc dans le premier cas

$$\log x = \log(-x_0) + \pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x - x_0}{x_0}\right)^n \tag{5}$$

dans le second au contraire

$$\log x = \log(-x_0) - \pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x - x_0}{x_0}\right)^n. \tag{6}$$

De là il résulte, que lorsque x s'approche du point x_0, suivant que cela a lieu du côté positif ou négatif de l'espace $(-\infty \ldots 0)$, $\log x$ s'approche indéfiniment de la limite $\log(-x_0) + \pi i$ ou de la limite $\log(-x_0) - \pi i$. Si on désigne les valeurs données par les formules pour $\log x_0$

$$\log(-x_0) + \pi i, \qquad \log(-x_0) - \pi i$$

respectivement par

$$\log \overset{+}{x}_0, \qquad \log x_0$$

on a

$$\log \overset{+}{x}_0 = \log \overset{-}{x}_0 + 2\pi i. \tag{7}$$

Par suite de ce qui précède on a donc pour les valeurs de x appartenant à un certain voisinage de x_0

$$\log x = \log \overset{\pm}{x}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x - x_0}{x_0}\right)^n. \tag{8}$$

où il faut prendre le signe supérieur ou inférieur suivant que la seconde coordonnée de $x - x_0$ est positive ou négative.

De la definition de $\log \overset{\pm}{x}_0$ et $\log x_0$ il apparaît du reste que les deux valeurs sont à l'intérieur de l'espace $(-\infty \ldots 0)$ des fonctions continues de x_0.

De plus si on définit pour les valeurs considérées de x et un exposant quelconque m la puissance x^m par l'égalité

$$x^m = e^{m \log x} \tag{9}$$

nous tirerons des équations (3, 4) respectivement les suivantes

$$x^m = x'^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (m)_n \left(\frac{x - x'}{x'}\right)^n \qquad \left[(m)_n = \frac{(m, -1)^n}{(1, +1)^n}\right] \tag{10}$$

$$x^m = \sum_{n=0}^{\infty} (m)_n (x - 1)^n. \tag{11}$$

x^m est donc aussi une fonction analytique uniforme de x. Si on pose pour une quantité négative x_0

$$\begin{cases} \left(\overset{+}{x}_0\right)^m = e^{m\pi i}(-x_0)^m \\ \left(\overset{-}{x}_0\right)^m = e^{-m\pi i}(-x_0)^m \end{cases} \tag{12}$$

on déduit des équations (7, 8)

$$\left(\overset{+}{x}_0\right)^m = e^{2m\pi i}\left(\overset{-}{x}_0\right)^m \tag{13}$$

$$x^m = \left(\overset{\pm}{x}_0\right)^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (m)_n \left(\frac{x - x_0}{x_0}\right)^n \tag{14}$$

où il faut prendre le signe supérieur ou inférieur suivant que la seconde coordonnée de $x - x_0$ est positive ou négative. Le domaine de x, à l'intérieur duquel les égalités (10, 11, 14) ont lieu est le même que celui pour les égalités correspondantes (5, 6, 8). Enfin il ressort de la définition des quantités

$$\left(\overset{+}{x}_0\right)^m \qquad \left(\overset{-}{x}_0\right)^m$$

que toutes les deux dans l'étendue $(-\infty \ldots 0)$ sont des fonctions contitinues de x_0.

D'après ce qui précède, si on désigne maintenant par t une quantité variable sans restriction,

$$(1-t)^{\frac{1}{4}}$$

est une fonction, qui est définie comme uniforme pour toute valeur de t n'appartenant pas à l'étendue $(1\ldots+\infty)$, tandis qu'elle prend deux valeurs si t est pris dans l'étendue en question. Si on pose

$$\log(1-t)=\rho+\sigma i$$

écartant les valeurs $t=1$ et $t=\infty$, et désignant par ρ et σ des grandeurs réelles on a

$$(1-t)^{\frac{1}{4}}=e^{\frac{1}{4}\rho}\left(\cos\frac{1}{4}\sigma+i\sin\frac{1}{4}\sigma\right)$$

et par suite, comme σ est compris dans l'intervalle $(-\pi\ldots+\pi)$

$$\left|1+(1-t)^{\frac{1}{4}}\right|^2-\left|1-(1-t)^{\frac{1}{4}}\right|^2=4e^{\frac{1}{4}\rho}\cos\frac{1}{4}\sigma>0.$$

De là il résulte que la valeur absolue de

$$\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}$$

est toujours inférieure à 1, et par suite que la série qui forme le premier membre de l'égalité (2) est absolument convergente pour toute valeur de t. Cette dernière propriété subsiste encore lorsqu'on donne à la quantité t une des valeurs exceptées, car $\dfrac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}$ a la valeur 1 pour $t=1$, et la valeur -1 pour $t=\infty$.

D'après cela, si on définit maintenant $\Psi(t)$ par l'égalité

$$\Psi(t)=\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n},$$

$\Psi(t)$ est une fonction, qui comme $\dfrac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}$ prend deux valeurs seulement pour les valeurs de t réelles situées entre $+1$ et $+\infty$, et qui pour toute autre valeur de t est uniforme et déterminée. Il faut ici remarquer que les deux valeurs de $\Psi(t)$ qui correspondent à une valeur réelle de t située entre 1 et $+\infty$ sont des quantités complexes conjuguées comme cela apparaît immédiatement sur les égalités (12).

De ce que nous venons de démontrer par rapport à la fonction $\dfrac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}$, il résulte encore que

$$\Psi(1)=1, \qquad \Psi(\infty)=-1,$$

mais que pour toute valeur de t différente de $1, \infty$

$$|\Psi(t)|<\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n$$

par suite

$$|\Psi(t)|<1.$$

Si on excepte du domaine de la variable les points appartenant à l'étendue $(1\ldots+\infty)$, d'après ce qui précède, $(1-t)^{\frac{1}{4}}$ n'est pas seule une fonction analytique uniforme, mais il en est encore ainsi des fonctions

$$\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}, \qquad \Psi(t), \qquad \theta_2^4[0,\ \Psi(t)], \qquad \theta_3^4[0,\ \Psi(t)]$$

et l'égalité (27) du § 1

$$\theta_2^4[0,\ \Psi(t)]=t\theta_3^4[0,\ \Psi(t)]$$

dont l'exactitude a été démontrée pour des valeurs réelles de t comprises entre 0 et 1, persiste pour toutes les valeurs de cette grandeur considérées maintenant.

Soit encore t_1 une valeur réelle de t située entre 1 et $+\infty$, si on pose

$$\Psi(\overset{+}{t_1}) = \lim_{k=0} \Psi(t_1 + k), \qquad \Psi(\overset{-}{t_1}) = \lim_{k=0} \Psi(t_1 - k),$$

en désignant par k une variable positive, alors $\Psi(\overset{+}{t_1})$, $\Psi(\overset{-}{t_1})$ sont les deux valeurs de $\Psi(t)$ pour $t = t_1$. Comme $\Psi(t_1 + k)$, $\Psi(t_1 - k)$ varient d'une manière continue avec k, et que les valeurs absolues de $\Psi(\overset{+}{t_1})$, $\Psi(\overset{-}{t_1})$ sont toutes les deux inférieures à 1, on voit que l'égalité précédente a encore lieu pour $t = t_1$, quelle que soit celle de ses deux valeurs qu'on donne à la quantité $\Psi(t)$.

Nous avons ainsi démontré que:

Si la fonction $\Psi(t)$ est définie, comme il précède, on a pour toute valeur de la variable t à l'exception de $t = 1$ et $t = \infty$, une valeur de la quantité q satisfaisant à l'équation

$$\left(\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}\right)^4 = t,$$

si on pose

$$q = \Psi(t) = \frac{1 - (1 - t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1 - t)^{\frac{1}{4}}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \left(\frac{1 - (1 - t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1 - t)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n}$$

formule dans laquelle on peut prendre aussi bien l'une que l'autre des deux valeurs appartenant à $\Psi(t)$, lorsque t a une valeur réelle comprise entre 1 et $+\infty$.

Les coefficients γ_n peuvent se calculer de la manière donnée plus haut, ou comme il suit.

D'après la formule donnée (1) on a pour les valeurs de t considérées ici

$$\Psi(t)^{\frac{1}{4}} = (\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \ldots) t^{\frac{1}{4}};$$

si donc on pose

$$t^{\frac{1}{4}} = \xi, \qquad \Psi(t)^{\frac{1}{4}} = \eta.$$

on a

$$2\eta\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\eta^{4\nu(\nu+1)}\right) = \xi\left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2\eta^{4\nu\nu}\right)$$

ou bien

$$\eta = \frac{\xi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\xi\eta^{4\nu\nu} - \eta^{(2\nu+1)(2\nu+1)}\right).$$

D'où si l'on pose

$$\eta_n = \sum_{m=0}^{n} \gamma_m \xi^{4m+1} \qquad (n=0, 1, \ldots, \infty)$$

il résulte

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}$$

et

$$\gamma_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\xi\eta_n^{4\nu\nu} - \eta^{(2\nu+1)(2\nu+1)}\right)\xi^{4n+3}.$$

Dans cette somme il ne faut considérer que les termes dans lesquels

$$4\nu\nu < 4n + 3.$$

Au moyen de ces formules on obtient

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_1 = \frac{2}{2^5}, \quad \gamma_2 = \frac{15}{2^9}, \quad \gamma_3 = \frac{150}{2^{13}} \quad \text{etc.}$$ [1]

---

[1] J'ai déjà donné depuis plusieurs années dans mes leçons sur les fonctions elliptiques la formule

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \left(\frac{1-(1-k^2)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-k^2)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n+1}$$

mais trouvée par une autre méthode. Si on emploie seulement ses r premiers termes, l'erreur commise est en valeur absolue inférieure à

$$\left(1 - \sum_{n=0}^{r-1}\gamma_n\right) \cdot \left|\frac{1-(1-k^2)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-k^2)^{\frac{1}{4}}}\right|^{4\nu+1}$$

Comparez *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Functionen* de H. A. SCHWARZ, page 56.

3.

Il faut maintenant montrer comment on trouve l'ensemble des valeurs de q, satisfaisant pour une seule et même valeur de t à l'équation

$$\left(\frac{\theta_2(0,\ q)}{\theta_3(0,\ q)}\right)^4 = t. \tag{1}$$

Pour cela il est nécessaire de connaitre pour chaque fonction θ toutes les valeurs de l'argument pour lesquelles elles s'annulent avec une valeur donnée de q. Ces valeurs peuvent se trouver aussi bien par la transformation des séries θ en produits infinis, au moyen de l'identité établie dans les *Fundamenta nova*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^n z)(1+q^n z^{-1}) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} q^{\nu\nu} z^{\nu},$$

ou aussi de la manière suivante en se servant seulement des théorèmes établis par Jacobi dans le mémoire plus connu.

De l'équation [1]

$$\frac{\theta'(y)}{\theta(y)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\log\frac{\theta_1(x-y)}{\theta_1(x+y)} = \frac{\theta_1(y)\,.\,\theta_2(y)\,.\,\theta_3(y)\theta^2(x)}{\theta(y)\theta_1(x+y)\theta_1(x-y)}$$

qui se trouve dans le premier volume des oeuvres de Jacobi, page 536 (1,·4), si l'on développe les deux membres suivant les puissances de y, il résulte par la comparaison des premiers termes

$$\frac{\theta''(0)}{\theta(0)} - \frac{d^2}{dx^2}\log\theta_1(x) = \frac{\theta_2(0)\theta_3(0)\theta^2(x)}{\theta_1^2(x)}. \tag{2}$$

Soit maintenant ω une valeur quelconque pour laquelle $\theta_1(\omega) = 0$, il résulte de l'équation précédente, que le quotient $\frac{\theta_1(x)}{\theta(x)}$ s'annule pour

---

[1] Dans les formules suivantes on suppose que dans toutes les fonctions θ q a la même valeur.

$x = \omega$, tandis qu'il résulte des équations (2, 3) page 511 et ailleurs que $\frac{\theta_2(x)}{\theta(x)}$, $\frac{\theta_3(x)}{\theta(x)}$ pour $x = \omega$ ont des valeurs finies différentes de zéro. De la formule pour $\frac{\theta_1(x+y)}{\theta(x+y)}$ (p. 513 et ailleurs) il résulte

$$\frac{\theta_1(x+\omega)}{\theta(x+\omega)} = \pm \frac{\theta_1(x)}{\theta(x)}$$

et on a par suite

$$\frac{d^2 \log \theta_1(x+\omega)}{dx^2} = \frac{d^2 \log \theta_1(x)}{dx^2},$$

d'où il résulte

$$(3) \qquad \theta_1(x+\omega) = Ce^{-2\nu x i}\theta_1(x)$$

formule où C, ν désignent des quantités indépendantes de x.

Des équations (3) p. 502 on tire

$$(4) \qquad \theta_1(x+\pi) = -\theta_1(x), \qquad \theta_1(x - i\log q) = -q^{-1}e^{-2xi}\theta_1(x).$$

Si donc on remplace x dans (3) par $x+\pi$ $x - i\log q$ et dans (4) par $x+\omega$ on obtient les équations

$$\theta_1(x+\omega+\pi) = -e^{-2\nu\pi i}.Ce^{-2\nu x i}\theta_1(x)$$
$$\theta_1(x+\omega+\pi) = -Ce^{-2\nu x i}\theta_1(x)$$
$$\theta_1(x+\omega-i\log q) = -e^{-2\nu\log q}.q^{-1}Ce^{-2(\nu+1)xi}\theta_1(x)$$
$$\theta_1(x+\omega-i\log q) = -e^{-2\omega i}.q^{-1}.Ce^{-2(\nu+1)xi}\theta_1(x).$$

On doit donc avoir

$$e^{-2\nu\pi i} = 1, \qquad e^{-2\omega i} = e^{-2\nu\log q}$$

et par suite

$$(5) \qquad \omega = \mu\pi - \nu i \log q,$$

μ, ν représentant des nombres entiers. Inversement, comme on peut le déduire facilement des équations (4), on a toujours

$$\theta_1(\mu\pi - i\nu\log q) = 0$$

lorsque μ, ν sont des nombres entiers quelconques.

L'égalité

$$\theta_1(\omega + x) = Ce^{-2\nu x i}\theta_1(x)$$

montre que $\theta_1'(\omega)$ n'est pas nulle, l'équation $\theta_1(x) = 0$ n'a donc que des racines simples. Comme on a de plus

$$\theta_1\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \theta_2(x)$$

$$\theta_1\left(x - \frac{i}{2}\log q\right) = iq^{-\frac{1}{4}}e^{-xi}\theta(x)$$

$$\theta_1\left(x + \frac{\pi}{2} - \frac{i}{2}\log q\right) = iq^{-\frac{1}{4}}e^{-xi}\theta_3(x),$$

alors l'ensemble des racines des équations

$$\theta_2(x) = 0, \qquad \theta(x) = 0, \qquad \theta_3(x) = 0$$

est donné respectivement par les formules

$$\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\pi - i\nu\log q, \quad \mu\pi - i\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\log q, \quad \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\pi - i\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\log q$$

et chacune de ces équations n'a que des racines simples. Dans les formules précédentes on peut fixer arbitrairement la valeur de $\log q$.

Si on pose maintenant

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{u}{\theta_3^2(0,\ q)} \\ f(u,\ q) &= \frac{\theta_3(0,\ q)\theta_1(x,\ q)}{\theta_2(0,\ q)\theta(x,\ q)} \\ f_1(u,\ q) &= \frac{\theta(0,\ q)\theta_2(x,\ q)}{\theta_2(0,\ q)\theta(x,\ q)} \\ f_2(u,\ q) &= \frac{\theta(0,\ q)\theta_3(x,\ q)}{\theta_3(0,\ q)\theta(x,\ q)} \end{aligned}\right.$$

$f(u,\ q)$, $f_1(u,\ q)$, $f_2(u,\ q)$ sont des fonctions uniformes des quantités u et q et si on pose

$$t = \left(\frac{\theta_2(0,\ q)}{\theta_3(0,\ q)}\right)^4$$

on a pour ces fonctions les égalités suivantes

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f(u,\,q)}{\partial u} = f_1(u,\,q)f_2(u,\,q), \qquad \dfrac{\partial f_1(u,\,q)}{\partial u} = -f(u,\,q)f_2(u,\,q), \\ \dfrac{\partial f_2(u,\,q)}{\partial u} = -tf(u,q)f_1(u,q), \quad f(0,q) = 0, \quad f_1(0,q) = 1, \quad f_2(0,q) = 1. \end{array}\right.$$

Si on limite la variable u à un certain espace entourant le point 0, on peut représenter $f(u,\,q)$, $f_1(u,\,q)$, $f_2(u,\,q)$ sous la forme ordinaire de séries procédant suivant les puissances des variables. Les coefficients de ces séries se tirent des égalités (7) comme des fonctions rationnelles entières de la grandeur t dans lesquelles les coefficients sont des nombres rationnels. Par suite s'il y a deux valeurs q, q_1 auxquelles appartienne la même valeur de t, on obtient pour $f(u,\,q_1)$, $f_1(u,\,q_1)$, $f_2(u,\,q_1)$ les mêmes séries que pour $f(u,\,q)$, $f_1(u,\,q)$, $f_2(u,\,q)$, d'où on peut conclure d'après une méthode connue que pour toute valeur finie de u les égalités

$$(8)\quad f(u,\,q_1) = f(u,\,q), \qquad f_1(u,\,q_1) = f_1(u,\,q), \qquad f_2(u,\,q_1) = f_2(u,\,q)$$

ont lieu.

On a donc d'après ce qui précède

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{lll} f(u,\,q) = 0 & \text{pour} & u = [\mu\pi - \nu i\log q]\,\theta_3^2(0,\,q) \\ f_1(u,\,q) = 0 & \text{pour} & u = \left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\pi - \nu i\log q\right]\theta_3^2(0,\,q) \\ \dfrac{1}{f(u,\,q)} = 0 & \text{pour} & u = \left[\mu\pi - \left(\nu+\frac{1}{2}\right) i\log q\right]\theta_3^2(0,\,q) \\ f_2(u,\,q) = 0 & \text{pour} & u = \left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\pi - \left(\nu+\frac{1}{2}\right) i\log q\right]\theta_3^2(0,\,q) \end{array}\right.$$

lorsqu'on désigne par μ, ν des nombres entiers quelconques. En même temps il se trouve que chacune des quatre fonctions précédentes ne s'annule que pour les valeurs données de u. Par suite des égalités

$$f_1(u,\,q) = f_1(u,\,q_1), \qquad f(u,\,q) = f(u,\,q_1)$$

il vient

$$f_1(u,\,q) = 0$$

aussi pour

$$u = \frac{\pi}{2}\theta_3^2(0,\ q_1)$$

et

$$\frac{1}{f(u,\ q)} = 0$$

aussi pour

$$u = -\frac{i}{2}\theta_3^2(0,\ q_1)\log q_1 .$$

On doit donc pouvoir déterminer quatre nombres entiers α, β, γ, δ de manière que

$$(10)\qquad \left|\begin{aligned} \pi\theta_3^2(0,\ q_1) &= \theta_3^2(0,\ q).[(2\alpha+1)\pi - 2\beta i\log q] \\ -i\theta_3^2(0,\ q_1)\log q_1 &= \theta_3^2(0,\ q).[2\gamma\pi - (2\delta+1)i\log q]. \end{aligned}\right.$$

Mais il doit de même y avoir quatre nombres entiers α', β', γ', δ' pour lesquels on ait les égalités

$$(11)\qquad \left|\begin{aligned} \pi\theta_3^2(0,\ q) &= \theta_3^2(0,\ q_1).[(2\alpha'+1)\pi - 2\beta' i\log q_1] \\ -i\theta_3^2(0,\ q)\log q &= \theta_3^2(0,\ q_1).[2\gamma'\pi - (2\delta'+1)i\log q_1]. \end{aligned}\right.$$

De ces quatre égalités, si on pose

$$\varepsilon = (2\alpha'+1)(2\delta'+1) - 4\beta'\gamma',$$

il résulte

$$\theta_3^2(0,\ q).\left[\left(2\alpha+1-\frac{2\delta'+1}{\varepsilon}\right)\pi - \left(2\beta+\frac{2\beta'}{\varepsilon}\right)i\log q\right] = 0$$

$$\theta_3^2(0,\ q).\left[\left(2\gamma+\frac{2\gamma'}{\varepsilon}\right)\pi - \left(2\delta+1-\frac{2\alpha'+1}{\varepsilon}\right)i\log q\right] = 0.$$

Mais comme $\theta_3(0,\ q)$ et la partie réelle de $\log q$ ont toujours des valeurs différentes de zéro, ces égalités ne peuvent avoir lieu que si

$$2\alpha+1 = \frac{2\delta'+1}{\varepsilon},\qquad 2\beta = -\frac{2\beta'}{\varepsilon},\qquad 2\gamma = -2\frac{\gamma'}{\varepsilon},\qquad 2\delta+1 = \frac{2\alpha'+1}{\varepsilon}.$$

Par suite on doit avoir

$$(2\alpha + 1)(2\delta + 1) - 4\beta\gamma = \frac{1}{\varepsilon},$$

donc

$$\varepsilon = \pm 1, \qquad (2\alpha + 1)(2\delta + 1) - 4\beta\gamma = \pm 1.$$

Maintenant il résulte de (11)

$$(12) \qquad \frac{1}{\pi i}\log q_1 = \frac{2\gamma + \dfrac{2\delta + 1}{\pi i}\log q}{2\alpha + 1 + \dfrac{2\beta}{\pi i}\log q}.$$

De ce que q, q_1 sont en valeur absolue inférieurs à 1, il résulte que la seconde coordonnée de $\frac{1}{\pi i}\log q$ aussi bien que de $\frac{1}{\pi i}\log q_1$ est positive, et cette dernière conclusion ne peut trouver place à la suite de la première que si $(2\alpha + 1)(2\delta + 1) - 4\beta\gamma$ a une valeur positive. On doit donc avoir

$$(13) \qquad (2\alpha + 1)(2\delta + 1) - 4\beta\gamma = 1.$$

Si on prend donc $q = \Psi(t)$, ce qui précède démontre que: si α, β, γ, δ représentent des nombres entiers satisfaisant à la relation (13) toutes les valeurs de q satisfaisant à l'équation

$$\left(\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}\right)^4 = t$$

pour une valeur donnée de t, sont comprises dans la formule

$$e^{\frac{2\gamma\pi i + (2\delta + 1)\log \Psi(t)}{(2\alpha + 1)\pi i + 2\beta\log \Psi(t)}\cdot \pi i}.$$

Cependant il faut excepter les valeurs $t = 0, 1, \infty$.

Mais il reste encore à rechercher, si au moyen de cette formule on obtient toujours une valeur de q satisfaisant à l'équation en question, lorsqu'on y remplace α, β, γ, δ par des nombres entiers quelconques, satisfaisant à la condition énoncée. Il en est effectivement ainsi, cela est facile à établir par la théorie de la transformation dite linéaire des fonctions θ; mais cela peut aussi se montrer par l'emploi des formules de réduction des fonctions elliptiques d'argument ui et de module k aux fonctions d'argument u et de module $k' = \sqrt{1 - k^2}$. C'est ce que je ferai dans ce qui suivra.

4.

À l'aide des relations

$$f_1^2(u, q) + f^2(u, q) = 1$$

$$f_2^2(u, q) + tf^2(u, q) = 1 \qquad\qquad t = \left[\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}\right]^4$$

qu'on peut déduire des équations (7) du § 3, ou même directement des formules (D) qu'on trouve dans le traité de JACOBI p. 511, on tire des équations citées d'abord les suivantes

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{f(u, q)}{f_1(u, q)} = \frac{f_2(u, q)}{f_1^2(u, q)}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{f_1(u, q)} = \frac{f(u, q) f_2(u, q)}{f_1^2(u, q)}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{f_2(u, q)}{f_1(u, q)} = (1 - t)\frac{f(u, q)}{f_1^2(u, q)}.$$

Si on remplace dans ces équations u par ui, q par q' et si on détermine q' de manière que

$$1 = \left(\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}\right)^4 + \left(\frac{\theta_2(0, q')}{\theta_3(0, q')}\right)^4$$

il vient

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{f(ui, q')}{if_1(ui, q')} = \frac{1}{f_1(ui, q')}\cdot\frac{f_2(ui, q')}{f_1(ui, q')}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{f_1(ui, q')} = -\frac{f(ui, q')}{if_1(ui, q')}\cdot\frac{f_2(ui, q')}{f_1(ui, q')}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{f_2(ui, q')}{f_1(ui, q')} = -\frac{t}{f_1(ui, q')}\cdot\frac{f(ui, q')}{if_1(ui, q')}.$$

Dans ces équations t a la même signification que dans les équations (7) du § 3, de manière qu'elles subsistent lorsqu'on remplace

$$f(u, q), \qquad f_1(u, q), \qquad f_2(u, q)$$

respectivement par

$$\frac{f(ui, q')}{if_1(ui, q')}, \qquad \frac{1}{f_1(ui, q')}, \qquad \frac{f_2(ui, q')}{f_1(ui, q')}.$$

Si on répète alors les raisonnements au moyen desquels nous avons établi précédemment les équations (8) du § 3, il en résulte que ces dernières fonctions sont identiques avec les premières.

On a donc

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} f(u, q) &= \frac{f(ui, q')}{if_1(ui, q')} \\ f_1(u, q) &= \frac{1}{f_1(ui, q')} \\ f_2(u, q) &= \frac{f_2(ui, q')}{f_1(ui, q')} \end{aligned} \right.$$

les deux quantités q et q' étant liées par l'équation

$$(2) \qquad \left(\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}\right)^4 + \left(\frac{\theta_2(0, q')}{\theta_3(0, q')}\right)^4 = 1.$$

On peut maintenant regarder t comme une variable indépendante et désigner par $F(t)$ ce que devient la fonction $\theta_3^2(0, q)$ par la substitution $q = \Psi(t)$. Alors, comme il ressort des formules (9) du § 3, si on donne à la grandeur t une valeur quelconque comprise entre 0 et 1, et si on prend $q = \Psi(t)$, $q' = \Psi(1-t)$, la plus petite valeur positive de la grandeur u pour laquelle $f(u, q) = 0$ est égale à $\pi F(t)$, et la plus petite valeur positive de la même grandeur pour laquelle $f(ui, q')$ s'annule est égale à $-F(1-t)\log\Psi(1-t)$, et on a en vertu des relations (1) l'égalité

$$(3) \qquad \pi F(t) = -F(1-t)\log\Psi(1-t)$$

d'où résulte si on remplace t par $(1-t)$

$$(4) \qquad \pi F(1-t) = -F(t)\log \Psi(t)$$

$$(5) \qquad \log \Psi(t) . \log \Psi(1-t) = \pi^2.$$

Désignons maintenant par τ une quantité à laquelle on ne peut attribuer que des valeurs complexes dont la seconde coordonnée est *positive.* De plus, comme dans les *Formeln und Lehrsätze,* soient

$$\theta_0(\nu \mid \tau), \qquad \theta_1(\nu \mid \tau), \qquad \theta_2(\nu \mid \tau), \qquad \theta_3(\nu \mid \tau)$$

ce que deviennent les fonctions

$$\theta(x, q), \qquad \theta_1(x, q), \qquad \theta_2(x, q), \qquad \theta_3(x, q)$$

par les substitutions

$$x = \nu\pi, \qquad q = e^{\tau\pi i}, \qquad \sqrt[4]{q} = e^{\frac{1}{4}\tau\pi i}$$

alors chacune des dernières fonctions est une fonction analytique uniforme des variables indépendantes ν, τ, si on limite le domaine de τ d'après les conventions faites, tandis que ν peut prendre toutes les valeurs à l'exception de ∞.

Si on donne ensuite à la quantité τ une valeur quelconque dont la première coordonnée est nulle de manière que $\frac{\tau}{i}$ ait une valeur réelle comprise entre 0 et $+\infty$ et en même temps si on pose

$$q = e^{\tau\pi i}, \qquad t = \left(\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}\right)^4 = \left(\frac{\theta_2(0 \mid \tau)}{\theta_3(0 \mid \tau)}\right)^4$$

t et q sont tous les deux réels et compris entre 0 et 1.

Il en résulte que

$$\tau\pi i = \log \Psi(t)$$

parce que à une valeur de t réelle, comprise entre 0 et 1, comme il a été démontré dans § 1 correspond seulement une valeur de q comprise dans le même intervalle, et à celle-çi seulement une valeur de τ pour laquelle $\frac{\tau}{i}$ est réel. Si on pose donc

$$\tau'\pi i = \log \Psi(1-t)$$

on a d'après l'équation (5)

$$\tau\tau' = -1$$

et d'après l'équation (4)

$$\theta_3^2(0\,|\,\tau) = \frac{i}{\tau}\,\theta_3^2\left(0\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right).$$

De plus on a

$$\left(\frac{\theta_2\left(0\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)}{\theta_3\left(0\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)}\right)^4 = 1 - \frac{\theta_2^4(0\,|\,\tau)}{\theta_3^4(0\,|\,\tau)} = \frac{\theta_0^4(0\,|\,\tau)}{\theta_3^4(0\,|\,\tau)}$$

et aussi

$$\theta_0^4(0\,|\,\tau) = \left(\frac{i}{\tau}\right)^2\theta_2^4\left(0\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)$$

et par suite encore

$$\theta_2^4(0\,|\,\tau) = \left(\frac{i}{\tau}\right)^2\theta_0^4\left(0\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right).$$

Comme $\frac{i}{\tau}$, $\theta_0(0\,|\,\tau)$, $\theta_0\left(0\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)$ etc. sont des quantités toutes positives, il vient

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}
\theta_0(0\,|\,\tau) &= \left(\frac{i}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\theta_2\left(0\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)\\
\theta_2(0\,|\,\tau) &= \left(\frac{i}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\theta_0\left(0\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)\\
\theta_3(0\,|\,\tau) &= \left(\frac{i}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\theta_3\left(0\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)
\end{aligned}\right.$$

Ces équations ont été obtenues dans l'hypothèse que $\frac{\tau}{i}$ a une valeur réelle comprise entre 0 et $+\infty$. Mais comme toutes les fonctions précédentes sont des fonctions uniformes analytiques de τ lorsque la valeur de $\left(\frac{i}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}}$ est fixée comme on l'a supposé dans § 2, par suite ce qui précède démontre l'exactitude de l'équation pour toute valeur de τ.

Des expressions des fonctions θ résultent immédiatement les relations suivantes

$$(7)\qquad \begin{cases} \theta_0(0 \mid \tau) = \theta_3(0 \mid \tau + 1) \\ \theta_2(0 \mid \tau) = i^{-\frac{1}{2}}\theta_2(0 \mid \tau + 1) \\ \theta_3(0 \mid \tau) = \theta_0(0 \mid \tau + 1). \end{cases}$$

De (7) on tire encore

$$(8)\qquad \begin{cases} \theta_0(0 \mid \tau) = \theta_0(0 \mid \tau + 2) \\ \theta_2(0 \mid \tau) = - i\theta_2(0 \mid \tau + 2) \\ \theta_3(0 \mid \tau) = \theta_3(0 \mid \tau + 2). \end{cases}$$

De plus on tire de (6) en transformant les fonctions θ du second membre en fonctions de $(-\frac{1}{\tau} - 2)$ et celles-ci en fonctions de $\frac{\tau}{1 + 2\tau}$

$$(9)\qquad \begin{cases} \theta_0(0 \mid \tau) = i\left(\frac{1}{1 + 2\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \theta_0\left(0 \mid \frac{\tau}{1 + 2\tau}\right) \\ \theta_2(0 \mid \tau) = \left(\frac{1}{1 + 2\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \theta_2\left(0 \mid \frac{\tau}{1 + 2\tau}\right) \\ \theta_3(0 \mid \tau) = \left(\frac{1}{1 + 2\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \theta_3\left(0 \mid \frac{\tau}{1 + 2\tau}\right). \end{cases}$$

Si dans (8) on remplace τ par $\tau - 2$ et dans (9) par $\frac{\tau}{1 - 2\tau}$ il vient encore

$$(10)\qquad \begin{cases} \theta_0(0 \mid \tau) = \theta_0(0 \mid \tau - 2) \\ \theta_2(0 \mid \tau) = i\theta_2(0 \mid \tau - 2) \\ \theta_3(0 \mid \tau) = \theta_3(0 \mid \tau - 2) \end{cases}$$

$$
(11)\quad\left|\begin{aligned}
\theta_0(0\mid\tau) &= i\left(\frac{1}{1-2\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\theta_0\left(0\,\Big|\,\frac{\tau}{1-2\tau}\right)\\
\theta_2(0\mid\tau) &= \left(\frac{1}{1-2\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\theta_2\left(0\,\Big|\,\frac{\tau}{1-2\tau}\right)\\
\theta_3(0\mid\tau) &= \left(\frac{1}{1-2\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\theta_3\left(0\,\Big|\,\frac{\tau}{1-2\tau}\right).
\end{aligned}\right.
$$

De ces équations (7—11) on déduit les suivantes dans lesquelles g et h désignent des nombres entiers quelconques:

$$
(12)\quad\left|\begin{aligned}
&\frac{\theta_2(0\mid\tau)}{\theta_3(0\mid\tau)} = i^{-g}\frac{\theta_2(0\mid\tau+2g)}{\theta_3(0\mid\tau+2g)}, &&\frac{\theta_0(0\mid\tau)}{\theta_3(0\mid\tau)} = \frac{\theta_0(0\mid\tau+2g)}{\theta_3(0\mid\tau+2g)}\\
&\frac{\theta_2(0\mid\tau)}{\theta_3(0\mid\tau)} = \frac{\theta_2\left(0\,\Big|\,\frac{\tau}{1+2h\tau}\right)}{\theta_3\left(0\,\Big|\,\frac{\tau}{1+2h\tau}\right)}, &&\frac{\theta_0(0\mid\tau)}{\theta_3(0\mid\tau)} = i^{h}\frac{\theta_0\left(0\,\Big|\,\frac{\tau}{1+2h\tau}\right)}{\theta_3\left(0\,\Big|\,\frac{\tau}{1+2h\tau}\right)}\\
&\frac{\theta_2(0\mid\tau)}{\theta_3(0\mid\tau)} = i^{-g}\frac{\theta_2\left(0\,\Big|\,\frac{2g+\tau}{1+4gh+2h\tau}\right)}{\theta_3\left(0\,\Big|\,\frac{2g+\tau}{1+4gh+2h\tau}\right)}, &&\frac{\theta_0(0\mid\tau)}{\theta_3(0\mid\tau)} = i^{h}\frac{\theta_0\left(0\,\Big|\,\frac{2g+\tau}{1+4gh+2h\tau}\right)}{\theta_3\left(0\,\Big|\,\frac{2g+\tau}{1+4gh+2h\tau}\right)}.
\end{aligned}\right.
$$

Admettons maintenant que a, b, c, d soient quatre nombres entiers donnés entre lesquels existe la relation $ad - bc = 1$, que b et c soient pairs, a et d par suite impairs. Si on remplace dans les deux dernières des équations précédentes

$$\tau \text{ par } \tau_1 = \frac{c+d\tau}{a+b\tau}, \qquad \text{et} \qquad g \text{ et } h \qquad \text{par } -g,\ -h$$

et si on pose

$$c_1 = c - 2ga, \qquad d_1 = d - 2gb, \qquad a_1 = a - 2hc_1,$$

$$b_1 = b - 2hd_1, \qquad \tau_2 = \frac{c_1 + d_1\tau}{a_1 + b_1\tau}$$

$$\frac{\theta_2(0\mid\tau_1)}{\theta_3(0\mid\tau_1)} = i^{g}\cdot\frac{\theta_2(0\mid\tau_2)}{\theta_3(0\mid\tau_2)}, \qquad \frac{\theta_0(0\mid\tau_1)}{\theta_3(0\mid\tau_1)} = i^{-h}\cdot\frac{\theta_0(0\mid\tau_2)}{\theta_3(0\mid\tau_2)}.$$

Mais si on désigne par ε celui des nombres 1 ou -1 qui est congruent à a (mod 4), on a

$$\frac{\varepsilon c}{2} - \frac{\varepsilon c_1}{2} \equiv g \pmod 4$$

et de plus, par suite de l'équation

$$ad - bc = 1, \qquad d \equiv a \pmod 4 \qquad \text{et} \qquad d_1 \equiv d \equiv \varepsilon$$

$$\frac{\varepsilon b}{2} - \frac{\varepsilon b_1}{2} \equiv h \pmod 4.$$

Par suite on a

$$(13) \qquad \left| \; i^{-\frac{\varepsilon c}{2}} \cdot \frac{\theta_2(0 \mid \tau_1)}{\theta_3(0 \mid \tau_1)} = i^{-\frac{\varepsilon c_1}{2}} \cdot \frac{\theta_2(0 \mid \tau_2)}{\theta_3(0 \mid \tau_2)}, \qquad i^{\frac{\varepsilon b}{2}} \cdot \frac{\theta_0(0 \mid \tau_1)}{\theta_3(0 \mid \tau_1)} = i^{\frac{\varepsilon b_1}{2}} \cdot \frac{\theta_0(0 \mid \tau_2)}{\theta_3(0 \mid \tau_2)}. \right.$$

Par suite entre les nombres a_1, b_1, c_1, d_1 existe la relation

$$a_1 d_1 - b_1 c_1 = 1$$

et on a

$$a_1 \equiv a \equiv \varepsilon \pmod 4.$$

De là résulte encore ceci.

Si en désignant par g, h, g_1, h_1, g_2, h_2, etc., des nombres entiers arbitraires, on pose

$$\begin{array}{llll} c_1 = c - 2ga, & d_1 = d - 2gb, & a_1 = a - 2hc_1, & b_1 = b - 2hd_1 \\ c_2 = c_1 - 2g_1 a_1, & d_2 = d_1 - 2g_1 b_1, & a_2 = a_1 - 2h_1 c_2, & b_2 = b_1 - 2h_1 d_2 \\ c_3 = c_2 - 2g_2 a_2, & d_3 = d_2 - 2g_2 b_2, & a_3 = a_2 - 2h_2 c_3, & b_3 = b_2 - 2h_2 d_3 \end{array}$$

etc.

et

$$\tau_2 = \frac{c_1 + d_1\tau}{a_1 + b_1\tau}, \qquad \tau_3 = \frac{c_2 + d_2\tau}{a_2 + b_2\tau}, \qquad \tau_4 = \frac{c_3 + d_3\tau}{a_3 + b_3\tau}, \quad \text{etc.}$$

alors $b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3, \ldots$ sont des nombres pairs, $a_1, d_1, a_2, d_2, \ldots$ sont des nombres impairs entre lesquels existent les relations

$$a_1 d_1 - b_1 c_1 = 1, \qquad a_2 d_2 - b_2 c_2 = 1, \ \ldots$$

et on a

$$i^{-\frac{\varepsilon c}{2}} \cdot \frac{\theta_2(0 \mid \tau_1)}{\theta_3(0 \mid \tau_1)} = i^{-\frac{\varepsilon c_1}{2}} \cdot \frac{\theta_2(0 \mid \tau_2)}{\theta_3(0 \mid \tau_2)} = i^{-\frac{\varepsilon c_2}{2}} \cdot \frac{\theta_2(0 \mid \tau_3)}{\theta_3(0 \mid \tau_3)} = i^{-\frac{\varepsilon c_3}{2}} \cdot \frac{\theta_2(0 \mid \tau_4)}{\theta_3(0 \mid \tau_4)} = \ldots$$

$$i^{\frac{\varepsilon b}{2}} \cdot \frac{\theta_0(0 \mid \tau_1)}{\theta_3(0 \mid \tau_1)} = i^{\frac{\varepsilon b_1}{2}} \cdot \frac{\theta_0(0 \mid \tau_2)}{\theta_3(0 \mid \tau_2)} = i^{\frac{\varepsilon b_2}{2}} \cdot \frac{\theta_0(0 \mid \tau_3)}{\theta_3(0 \mid \tau_3)} = i^{\frac{\varepsilon b_3}{2}} \cdot \frac{\theta_0(0 \mid \tau_4)}{\theta_3(0 \mid \tau_4)} = \ldots$$

Si b n'est pas nul, et qu'on détermine, ce qui est toujours possible, les nombres g et h de manière que

$$|d_1| < |b|$$

et

$$|b_1| < |d_1|$$

par suite on a

$$|b_1| < |b|.$$

Si b_1 est aussi différent de zéro, et qu'on détermine maintenant g_1, h_1 de manière que

$$|b_2| < |b_1|$$

et ensuite si b_2 est différent de zéro, qu'on prenne encore g_2, h_2 de manière que

$$|b_3| < |b_2|, \quad \text{etc.}$$

on voit qu'en continuant de cette manière on arrive nécessairement à une expression τ_r dans laquelle $b_{r-1} = 0$. Par suite de l'équation

$$a_{r-1}d_{r-1} - b_{r-1}c_{r-1} = 1,$$

et comme a, a_1, a_2, ..., a_{r-1} sont tous $\equiv \varepsilon \pmod 4$, on a alors

$$a_{r-1} = \varepsilon, \qquad d_{r-1} = \varepsilon, \qquad \tau_r = \varepsilon c_{r-1} + \tau,$$

et par suite en vertu de (12)

$$i^{-\frac{\varepsilon c_{r-1}}{2}} \cdot \frac{\theta_2(0 \mid \tau_r)}{\theta_3(0 \mid \tau_r)} = \frac{\theta_2(0 \mid \tau)}{\theta_3(0 \mid \tau)}, \qquad i^{\frac{\varepsilon b_{r-1}}{2}} \cdot \frac{\theta_0(0 \mid \tau_r)}{\theta_3(0 \mid \tau_r)} = \frac{\theta_0(0 \mid \tau)}{\theta_3(0 \mid \tau)}.$$

Ainsi on a donc enfin

$$(14) \qquad \frac{\theta_2(0 \mid \tau_1)}{\theta_3(0 \mid \tau_1)} = i^{\frac{\varepsilon c}{2}} \cdot \frac{\theta_2(0 \mid \tau)}{\theta_3(0 \mid \tau)}, \qquad \frac{\theta_0(0 \mid \tau_1)}{\theta_3(0 \mid \tau_1)} = i^{-\frac{\varepsilon b}{2}} \cdot \frac{\theta_0(0 \mid \tau)}{\theta_3(0 \mid \tau)}.$$

Si on pose

$$\tau = \frac{1}{\pi i} \log \Psi(t)$$

il résulte de la première de ces équations

$$\left(\frac{\theta_2(0 \mid \tau_1)}{\theta_3(0 \mid \tau_1)}\right)^4 = t$$

ou

$$(15) \qquad \left(\frac{\theta_2(0,\ q)}{\theta_3(0,\ q)}\right)^4 = t$$

si on pose

$$(16) \qquad q = e^{\tau_1 \pi i} = e^{\frac{c\pi i + d \log \Psi(t)}{a\pi i + b \log \Psi(t)} \cdot \pi i}.$$

Ceci démontre la proposition énoncée à la fin du § 3, et on peut énoncer d'une manière en quelque sorte plus précise le théorème:

Pour toute valeur donnée de la variable t, il y a une infinité de valeurs de la quantité q qui satisfont à l'égalité

$$t = \left(\frac{\theta_2(0,\ q)}{\theta_3(0,\ q)}\right)^4;$$

elles sont toutes fournies par la formule

$$q = e^{\frac{2\gamma\pi i + (2\delta + 1)\log \Psi(t)}{(2\alpha + 1)\pi i + 2\beta \log \Psi(t)} \cdot \pi i}$$

dans laquelle α, β, γ, δ représentent des nombres entiers devant satisfaire à la condition

$$(2\alpha + 1)(2\delta + 1) - 4\beta\gamma = 1,$$

mais qui ne sont soumis à aucune autre restriction. (La valeur du logarithme de $\Psi(t)$ peut être fixée arbitrairement dans la formule précédente.)

5.

Si maintenant on donne à la grandeur q une quelconque des valeurs qu'elle peut prendre d'après la formule précédente, si on pose $t = k^2$, en exceptant les valeurs singulières $k^2 = 0, 1, \infty$, on a

$$(1)\qquad \left|\begin{aligned} \sin\operatorname{am}(u, k) &= \frac{\theta_3(0, q)}{\theta_2(0, q)}\frac{\theta_1(x, q)}{\theta(x, q)} \\ \cos\operatorname{am}(u, k) &= \frac{\theta(0, q)}{\theta_2(0, q)}\frac{\theta_2(x, q)}{\theta(x, q)} \\ \Delta\operatorname{am}(u, k) &= \frac{\theta(0, q)}{\theta_3(0, q)}\frac{\theta_3(x, q)}{\theta(x, q)} \end{aligned}\right.$$

avec

$$(2)\qquad x = \frac{u}{\theta_3^2(0, q)}.$$

Sous cette forme $\sin\operatorname{am}(u, k)$, $\cos\operatorname{am}(u, k)$, $\Delta\operatorname{am}(u, k)$ nous apparaissent comme des fonctions uniformes de u et q, par suite de la disparition du radical $\sqrt[4]{q}$ qui figure dans $\theta_1(x, q)$, $\theta_2(x, q)$, $\theta_2(0, q)$. Mais si on exprime $\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}$, $\frac{\theta_0(0, q)}{\theta_3(0, q)}$ au moyen de k^2, il vient

$$(3)\qquad \left|\begin{aligned} \sin\operatorname{am}(u, k) &= \frac{1}{\sqrt[4]{k^2}}\cdot\frac{\theta_1(x, q)}{\theta(x, q)} \\ \cos\operatorname{am}(u, k) &= \frac{\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt[4]{k^2}}\cdot\frac{\theta_2(x, q)}{\theta(x, q)} \\ \Delta\operatorname{am}(u, k) &= \sqrt[4]{1-k^2}\cdot\frac{\theta_3(x, q)}{\theta(x, q)}. \end{aligned}\right.$$

Il nous reste encore à déterminer quelle valeur nous devons choisir pour les radicaux $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1-k^2}$, $\sqrt[4]{q}$. Pour cela quelques éclaircissements concernant les fonctions $\Psi(t)$, $\log\Psi(t)$ sont encore nécessaires.

Si on excepte du domaine de la variable t les valeurs appartenant a l'intervalle $(1 \ldots +\infty)$, alors $\Psi(t)$ est une fonction uniforme et continue de t, qui en outre, comme son module est constamment inférieur à 1 possède les propriétés suivantes.

1°. Elle a une valeur réelle ou complexe suivant que t est réel ou complexe.

2°. Dans le premier cas elle est de même signe que t.

3°. Pour toute valeur complexe de t sa seconde coordonnée est de même signe que la seconde coordonnée de t.

La première propriété résulte immédiatement des équations

$$\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}} \right)^{4n+1}$$

$$t = \left(\frac{\theta_2[0,\ \Psi(t)]}{\theta_3[0,\ \Psi(t)]} \right)^4 = 16\Psi(t) \cdot \left(\frac{1+\Psi^2(t)+\Psi^6(t)+\ldots}{1+2\Psi(t)+2\Psi^4(t)+\ldots} \right)^4.$$

La première montre que $\Psi(t)$ est toujours réelle pour des valeurs de t réelles appartenant à l'intervalle $(-\infty \ldots 1)$, l'autre montre qu'inversement, lorsque $\Psi(t)$ a une valeur réelle, t est aussi réel, et compris d'après l'hypothèse faite entre $-\infty$ et 1. De la seconde équation résulte l'exactitude de la proposition (2). La troisième se démontre comme il suit.

Pour

$$t = 1 + i, \quad \text{on a} \quad \log(1-t) = -\frac{\pi}{2} i,$$

par suite

$$\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1-e^{-\frac{\pi}{8}i}}{1+e^{-\frac{\pi}{8}i}} = i tg \frac{\pi}{16}$$

et dès lors comme les γ_n sont tous des nombres positifs, $\Psi(t)$ est égale au produit de i et d'une quantité positive. De la valeur $1+i$, t peut passer d'une manière continue à toute autre valeur complexe t_1, dont la seconde coordonnée est positive, sans pour cela traverser une valeur réelle. La seconde coordonnée de $\Psi(t)$ varie constamment avec t pendant ce passage sans devenir nulle (§ 1), et par suite est positive pour $t = t_1$

comme pour $t = 1 + i$. D'une manière toute semblable on montrera que $\Psi(t)$ pour $t = 1 - i$ est égale au produit de i par une quantité négative et de là résulte la parité de signe de la seconde coordonnée de $\Psi(t)$ avec la seconde coordonnée de t même dans le cas où cette dernière est négative. Du reste il résulte de la signification donnée plus haut à $(1 - t)^{\frac{1}{4}}$ et du § 1 qu'à des valeurs complexes conjuguées de t correspondent des valeurs complexes aussi conjuguées pour $(1 - t)^{\frac{1}{4}}$ et $\Psi(t)$, et par suite il suffit d'établir la $3^{\text{ème}}$ propriété de la fonction $\Psi(t)$ pour des valeurs de t dont la seconde coordonnée est positive.

Faisons encore ici la remarque suivante.

Si on pose

$$\varphi(t) = \frac{1 - (1 - t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1 - t)^{\frac{1}{4}}}$$

on a

$$1 - t = \left(\frac{1 - \varphi(t)}{1 + \varphi(t)}\right)^4$$

et on peut montrer à l'aide de ces deux équations que les 3 propriétés précédentes s'appliquent également à la fonction $\varphi(t)$; il n'y a qu'à remplacer dans les démonstrations précédentes partout $\Psi(t)$ par $\varphi(t)$.

D'après ce qui précède, si on excepte du domaine de la variable t encore les valeurs réelles appartenant à l'intervalle $-\infty \ldots 0$, non seulement $\varphi(t)$, $\Psi(t)$ mais encore

$$\log \varphi(t), \qquad \log \Psi(t),$$

sont des fonctions uniformes et continues de t. De l'équation précédente (§ 2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^n = e^{-\log 2 + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n}$$

il résulte, si on remplace t par $\varphi^4(t)$

$$\Psi(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) e^{\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \varphi^{4n}(t)}$$

et par suite

$$\log \Psi(t) = \log\left(\frac{1}{2}\varphi(t)\right) + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\varphi^{4n}(t) + 2m\pi i$$

où m représente un nombre entier, qui à l'intérieur du domaine assignée maintenant à la quantité t, ne peut pas avoir différentes valeurs à cause de la continuité des fonctions $\varphi(t)$, $\log\left(\frac{1}{2}\varphi(t)\right)$, $\log \Psi(t)$. Pour toutes les valeurs réelles de t comprises entre 0 et 1, ces trois fonctions sont toutes réelles, et par suite $m = 0$; on a donc l'équation

$$(4) \qquad \log \Psi(t) = \log\left(\frac{1}{2}\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right) + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n}$$

pour toutes les valeurs de t non exceptées, à la condition que les valeurs des logarithmes soient déterminées, comme on l'a établi dans § 2. Si maintenant on donne à la quantité t une valeur réelle comprise entre 1 et $+\infty$, l'équation précédente persiste encore, si on donne au radical $(1-t)^{\frac{1}{4}}$ l'une ou l'autre des deux valeurs qu'elle peut alors prendre, et si on donne en même temps à la fonction $\Psi(t)$ la valeur correspondante.

Pour une valeur réelle négative de t, on a enfin

$$\lim_{k=0}\log \Psi(t \pm ik) = \log[-\Psi(t)] \pm \pi i,$$

$$\lim_{k=0}\log \varphi(t \pm ik) = \log[-\varphi(t)] \pm \pi i$$

(où k représente une quantité positive), et par suite

$$(5) \qquad \log[-\Psi(t)] = \log\left(-\frac{1}{2}\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right) + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n}.$$

Ceci établi, si on définit maintenant les valeurs des puissances

$$(k^2)^{\frac{1}{4}}, \qquad (1-k^2)^{\frac{1}{4}}, \qquad \Psi(k^2)^{\frac{1}{4}}$$

comme on l'a établi dans § 2, il résulte des équations

$$k^2 = \left(\frac{\theta_2[0,\ \Psi(k^2)]}{\theta_3[0,\ \Psi(k^2)]}\right)^4, \qquad 1 - k^2 = \left(\frac{\theta[0,\ \Psi(k^2)]}{\theta_3[0,\ \Psi(k^2)]}\right)^4$$

dans l'hypothèse préalable où ni k^2 ni $1 - k^2$ n'ont de valeurs réelles appartenant à l'intervalle $(-\infty \ldots 0)$, si on remplace dans $\theta_2[0,\ \Psi(k^2)]$ le radical $\sqrt[4]{\Psi(k^2)}$ par la valeur $\Psi(k^2)^{\frac{1}{4}}$

$$(6) \qquad (k^2)^{\frac{1}{4}} = \frac{\theta_2[0,\ \Psi(k^2)]}{\theta_3[0,\ \Psi(k^2)]}, \qquad (1 - k^2)^{\frac{1}{4}} = \frac{\theta[0,\ \Psi(k^2)]}{\theta_3[0,\ \Psi(k^2)]}.$$

Car ces équations ont lieu lorsque k^2 est une valeur comprise entre 0 et 1; comme $(k^2)^{\frac{1}{4}}$, $(1 - k^2)^{\frac{1}{4}}$, $\theta_2[0,\ \Psi(k^2)]$, $\theta_3[0,\ \Psi(k^2)]$, $\theta[0,\ \Psi(k^2)]$ sont toutes des fonctions analytiques uniformes de k^2, elles subsistent encore pour toute valeur complexe de k^2, si on excepte du domaine de cette grandeur, les valeurs réelles appartenant aux intervalles $(-\infty \ldots 0)$ et $(1 \ldots +\infty)$.

De plus comme la seconde coordonnée de $\Psi(k^2)$ d'après ce qui précède a le même signe que la seconde coordonnée de k^2,

$$\log \Psi(k^2) - \log(k^2)$$

tend vers une limite réelle lorsque k^2 s'approche indéfiniment d'une quantité réelle négative; et de même

$$\frac{\Psi(k^2)^{\frac{1}{4}}}{(k^2)^{\frac{1}{4}}}$$

tend vers une limite positive. La première des équations (6) subsiste donc encore pour une valeur négative de k^2, à la condition qu'après avoir fixé la valeur de $(k^2)^{\frac{1}{4}}$ on donne au radical $\sqrt[4]{\Psi(k^2)}$ celle de ses valeurs pour laquelle

$$\frac{\sqrt[4]{\Psi(k^2)}}{(k^2)^{\frac{1}{4}}}$$

est une quantité positive. La seconde des équations (6) subsiste en tous cas pour une valeur négative de k^2, puisque pour une telle valeur $\Psi(k^2)$ est réelle et par suite $\theta[0, \Psi(k^2)]$, $\theta_3[0, \Psi(k^2)]$, aussi bien que $(1-k^2)^{\frac{1}{4}}$ sont des quantités positives.

Enfin pour une valeur réelle de k^2 située entre 1 et $+\infty$, les équations en question subsistent encore, si après avoir fixé la valeur de $(1-k^2)^{\frac{1}{4}}$ on prend pour $\Psi(k^2)$ la valeur correspondante.

D'après cela les équations précédentes (3) existent, si l'on fixe les valeurs des radicaux $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1-k^2}$ de manière que dans chacun d'eux la première coordonnée soit positive, et ne soit pas en valeur absolue inférieure à la seconde coordonnée, (1) si de plus on pose

$$q = \Psi(k^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \left(\frac{1-\sqrt[4]{1-k^2}}{1+\sqrt[4]{1-k^2}}\right)^{4n+1}$$

et enfin si on détermine encore la valeur de $\sqrt[4]{q}$, de manière que sa première coordonnée soit positive et ne soit pas en valeur absolue inférieure à sa seconde, ce qui, dans le cas où k^2 et par suite q ont une valeur négative, donne la condition à remplir que $\dfrac{\sqrt[4]{q}}{\sqrt[4]{k^2}}$ doit être une quantité positive.

De plus, en conservant les valeurs ainsi déterminées pour les quantités $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1-k^2}$, $\Psi(k^2)$, et après avoir pris 4 nombres α, β, γ, δ, entiers satisfaisant à la condition

$$(2\alpha+1)(2\delta+1) - 4\beta\gamma = 1,$$

posons

$$\tau = \frac{1}{\pi i}\log \Psi(k^2), \qquad \tau_1 = \frac{2\gamma + (2\delta+1)\tau}{2\alpha+1+2\beta\tau},$$

$$q = e^{\tau_1 \pi i}, \qquad \sqrt[4]{q} = e^{\frac{1}{4}\tau_1 \pi i},$$

(1) D'après cette détermination $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1-k^2}$ ont les mêmes valeurs que les puissances $(k^2)^{\frac{1}{4}}$, $(1-k^2)^{\frac{1}{4}}$; cela résulte immédiatement de la définition donnée pour ces dernières expressions dans § 2.

d'où, dans le cas où k^2 est une quantité négative, il faut prendre pour $\log \Psi(k^2)$ la valeur pour laquelle $e^{\frac{1}{4}\log \Psi(k^2)}$ est égale à la valeur déterminée précédemment pour $\sqrt[4]{\Psi(k^2)}$. Alors, en vertu des équations (14) du paragraphe précédent, si on désigne par ε l'un des deux nombres $1, -1$ auquel $2\alpha + 1$ soit congruent (mod 4), on a

$$\frac{\theta_2(0 \mid \tau_1)}{\theta_3(0 \mid \tau_1)} = i^{\varepsilon\gamma} \cdot \frac{\theta_2(0 \mid \tau)}{\theta_3(0 \mid \tau)}, \qquad \frac{\theta_0(0 \mid \tau_1)}{\theta_3(0 \mid \tau_1)} = i^{-\varepsilon\beta} \cdot \frac{\theta_0(0 \mid \tau)}{\theta_3(0 \mid \tau)}$$

et par suite

$$\text{(8)} \qquad \frac{\theta_2(0,\ q)}{\theta_3(0,\ q)} = i^{\varepsilon\gamma}\sqrt[4]{k^2}, \qquad \frac{\theta(0,\ q)}{\theta_3(0,\ q)} = i^{-\varepsilon\beta}\sqrt[4]{1 - k^2}$$

et les équations (1) deviennent

$$\text{(9)} \qquad \left|\begin{aligned}
&\sin \operatorname{am}(u, k) = \frac{i^{-\varepsilon\gamma}}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \frac{\theta_1(x,\ q)}{\theta(x,\ q)} \\
&\cos \operatorname{am}(u, k) = \frac{i^{-\varepsilon\beta - \varepsilon\gamma}\sqrt[4]{1 - k^2}}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \frac{\theta_2(x,\ q)}{\theta(x,\ q)} \\
&\Delta \operatorname{am}(u, k) = i^{-\varepsilon\beta} \cdot \sqrt[4]{1 - k^2} \cdot \frac{\theta_3(x,\ q)}{\theta(x,\ q)} \\
&x = \frac{u}{\theta_3^2(0,\ q)}, \qquad \sqrt[4]{q} = e^{\frac{2\gamma\pi i + (2\delta + 1)\log \Psi(k^2)}{(2\alpha + 1)\pi i + 2\beta \log \Psi(k^2)} \cdot \frac{\pi i}{4}}.
\end{aligned}\right.$$

Ainsi se trouve résolu le problème qu'il fallait résoudre pour terminer la théorie des fonctions elliptiques développée dans le mémoire de Jacobi. Il reste cependant encore une question à traiter. La série indéfinie, par laquelle se trouve exprimée la fonction $\Psi(t)$ n'est que faiblement convergente, lorsque la valeur absolue de la quantité $(1 - t)$ est petite, lorsque t a une valeur peu différente de 1. Il est par suite d'une importance essentielle, de déduire, comme nous allons le montrer, de cette série infinie d'autres expressions de $\Psi(t)$, desquelles, l'une au moins se prête très-facilement au calcul de $\Psi(t)$, quelle que soit la valeur de $\Psi(t)$.

6.

A la condition qu'on excepte du domaine de la variable t les valeurs réelles appartenant à l'intervalle $(1 \ldots +\infty)$, $\Psi(t)$ n'est pas seulement, comme on l'a montré dans le paragraphe précédent, une fonction définie uniforme et continue, mais encore une fonction se comportant partout régulièrement. [1] Cela est évident, si on considère que, dans le domaine auquel est limitée par la condition imposée la variation de t,

$$\varphi(t) = \frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}$$

est une fonction définie uniforme et régulière, et que la série procédant suivant les puissances de $\varphi(t)$, qui représente la fonction $\Psi(t)$ est uniformément convergente dans le voisinage de toute valeur de t déterminée.

Si on excepte de plus du domaine de la quantité t les valeurs réelles négatives, alors dans le domaine auquel est limitée la variation de t — (on peut le désigner par T') — $\Psi(t)$ ne peut ni s'annuler ni recevoir une valeur négative; dans ce domaine $\log \Psi(t)$ est donc aussi une fonction définie uniforme et régulière.

De cette propriété de $\log \Psi(t)$, résulte que l'équation

$$\log \Psi(t) . \log \Psi(1-t) = \pi^2 \tag{1}$$

établie dans le § 4 dans l'hypothèse où t est une quantité réelle comprise entre 0 et 1 subsiste pour toute valeur de t appartenant au domaine T'.

En effet comme non-seulement $\log \Psi(t)$, mais encore $\log \Psi(1-t)$ se comporte partout régulièrement à l'intérieur de T', par suite l'expression

$$\log \Psi(t) . \log \Psi(1-t) - \pi^2$$

---

[1] Je dis d'une fonction définie uniforme de la variable t qu'elle se comporte régulièrement dans le voisinage d'une valeur déterminée t_0, lorsque, pour toutes les valeurs de t comprises à l'intérieur d'un certain contour autour du point t_0, on peut la représenter par une série ordinaire suivant les puissances de $t - t_0$.

peut se représenter sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances de $t - t_0$, à l'intérieur d'un certain contour autour de t_0, t_0 étant une valeur quelconque déterminée de t.

Si on prend t_0 dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$, comme il y a dans toute direction au voisinage de t_0 des valeurs de la quantité t pour lesquelles l'expression précédente s'annule, tous les coefficients de cette série sont nécessairement nuls; il doit donc en être ainsi pour toutte autre valeur de t_0 et l'équation (1) doit subsister en tout point de T' d'après un théorème connu de la théorie des fonctions, le domaine T' formant un tout continu.

De plus, comme la seconde coordonnée de $\Psi(t)$ a le même signe que la seconde coordonnée de t, on a

$$\log \Psi(t) = \log[-\Psi(t)] \pm i\pi,$$

avec le signe $+$ ou le signe $-$ devant i suivant que la seconde coordonnée de t est positive ou négative. Maintenant comme $\log[-\Psi(t)]$ se comporte régulièrement dans le voisinage de toute valeur réelle négative de t, on a

$$(2) \qquad \left| \begin{aligned} \log \Psi(\overset{+}{t}) &= \log[-\Psi(t)] + i\pi \\ \log \Psi(\overset{-}{t}) &= \log[-\Psi(t)] - i\pi \end{aligned} \right.$$

pour toute valeur négative réelle de t. A l'aide de ces formules on tire de l'équation (1) pour une valeur réelle de $t > 1$

$$(3) \qquad \left| \begin{aligned} \log \Psi(\overset{+}{t}) &= \frac{\pi^2}{\log[-\Psi(1-t)] - i\pi} \\ \log \Psi(\overset{-}{t}) &= \frac{\pi^2}{\log[-\Psi(1-t)] + i\pi}. \end{aligned} \right.$$

Si on admet maintenant que t ait une valeur complexe, et si on désigne par ε le nombre 1 ou -1, suivant que la seconde coordonnée de t est positive ou négative; alors

$$\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}$$

si on remplace t par $1-t$ se transforme en

$$\frac{1-t^{\frac{1}{4}}}{1+t^{\frac{1}{4}}} = -\frac{1-\left(1-\frac{t-1}{t}\right)^{\frac{1}{4}}}{1+\left(1-\frac{t-1}{t}\right)^{\frac{1}{4}}}.$$

On a par suite

$$(4) \qquad \Psi(1-t) = -\Psi\left(\frac{t-1}{t}\right);$$

d'où

$$(5) \qquad \log \Psi(1-t) = \log \Psi\left(\frac{t-1}{t}\right) - \varepsilon i\pi.$$

De plus l'équation (1), si on y remplace t par $\frac{t-1}{t}$, devient

$$(6) \qquad \log \Psi\left(\frac{t-1}{t}\right) . \log \Psi\left(\frac{1}{t}\right) = \pi^2.$$

Si dans (5) on remplace t par $\frac{t-1}{t}$, et si on remarque que la seconde coordonnée de $\frac{t-1}{t}$ a le même signe que la seconde coordonnée de t, il vient

$$(7) \qquad \log \Psi\left(\frac{1}{t}\right) = \log \Psi\left(\frac{1}{1-t}\right) - \varepsilon i\pi.$$

Enfin il résulte de (1) si on remplace t par $\frac{1}{1-t}$

$$(8) \qquad \log \Psi\left(\frac{1}{1-t}\right) . \log \Psi\left(\frac{t}{t-1}\right) = \pi^2.$$

Les équations (1), (5), (6), (7), (8) conduisent aux suivantes, dans lesquelles il faut prendre devant i le signe supérieur ou inférieur, suivant que la seconde coordonnée de t est positive ou négative

$$
(9)\qquad \left|\begin{aligned}
\log \Psi(t) &= \frac{\pi^2}{\log \Psi(1-t)}\\
\log \Psi(t) &= \frac{\pi^2}{\log \Psi\left(\dfrac{t-1}{t}\right) \mp i\pi}\\
\log \Psi(t) &= \frac{\pi \log \Psi\left(\dfrac{1}{t}\right)}{\pi \mp i \log \Psi\left(\dfrac{1}{t}\right)}\\
\log \Psi(t) &= \frac{\pi^2}{\log \Psi\left(\dfrac{1}{1-t}\right)} \pm i\pi\\
\log \Psi(t) &= \log \Psi\left(\frac{t}{t-1}\right) \pm i\pi.
\end{aligned}\right.
$$

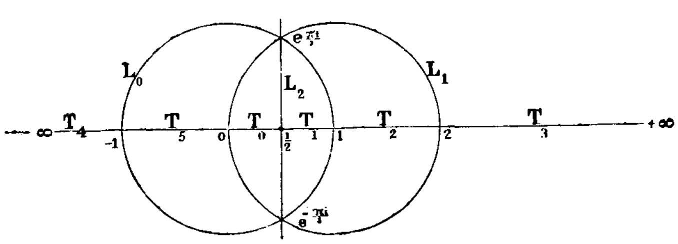
Il est facile d'après ce qui précède de découvrir ce que deviennent ces équations lorsque la seconde coordonnée de t s'annule.

Qu'on imagine maintenant dans le plan de la variable t un cercle L_0 de rayon 1 et de centre 0, un deuxième cercle L_1 de même rayon et ayant pour centre le point 1, et par les points d'intersection de L_0 et L_1 pour lesquels t a les valeurs $e^{\frac{\pi i}{3}}$, $e^{-\frac{\pi i}{3}}$, une droite indéfinie L_2. Ces trois lignes divisent le plan en six parties $(T_0, T_1, \ldots, T_5)$, de manière que les intervalles

$$\left(0 \ldots \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2} \ldots 1\right), (1 \ldots 2), (2 \ldots +\infty), (-\infty \ldots -1), (-1 \ldots -0)$$

soient respectivement situés dans

$$T_0,\ T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4,\ T_5$$



si à chaque valeur de t on en fait correspondre deux autres t' et t'' au moyen des équations

$$t' + t = 1, \qquad tt'' = 1,$$

aux valeurs de t situées dans les espaces

$$T_0, \ T_1, \ T_2, \ T_3, \ T_4, \ T_5$$

correspondront des valeurs de t' respectivement en

$$T_1, \ T_0, \ T_5, \ T_4, \ T_3, \ T_2$$

et de t'' en

$$T_3, \ T_2, \ T_1, \ T_0, \ T_5, \ T_4.$$

D'où découle facilement le théorème suivant.

Si t est situé en

$$T_1, \ T_2, \ T_3, \ T_4, \ T_5$$

alors en T_0 seront situés réspectivement

$$1 - t, \qquad \frac{t-1}{t}, \qquad \frac{1}{t}, \qquad \frac{1}{1-t}, \qquad \frac{t}{t-1}.$$

D'après les formules (9), le calcul de $\Psi(t)$ pour toute valeur donnée de t se ramène donc au calcul de la même fonction pour un argument relatif au domaine T_0.

Pour des valeurs réelles de t, on appliquera donc les formules suivantes

$$t = \frac{1}{2} \ldots 1 \qquad \log \Psi(t) = \frac{\pi^2}{\log \Psi(1-t)}$$

$$t = 1 \ldots 2 \qquad \log \Psi(\overset{+}{t}) = \frac{\pi^2}{\log \Psi\left(\dfrac{t-1}{t}\right) - i\pi},$$

$$\log \Psi(\overset{-}{t}) = \frac{\pi^2}{\log \Psi\left(\dfrac{t-1}{t}\right) + i\pi}$$

$$t = 2 \ldots +\infty \qquad \log \Psi(\overset{+}{t}) = \frac{\pi \log \Psi\left(\frac{1}{t}\right)}{\pi - i \log \Psi\left(\frac{1}{t}\right)},$$

$$\log \Psi(\overset{-}{t}) = \frac{\pi \log \Psi\left(\frac{1}{t}\right)}{\pi + i \log \Psi\left(\frac{1}{t}\right)}$$

$$t = -\infty \ldots -1 \qquad \log \Psi(\overset{+}{t}) = \frac{\pi^2}{\log \Psi\left(\frac{1}{1-t}\right)} + i\pi,$$

$$\log \Psi(\overset{-}{t}) = \frac{\pi^2}{\log \Psi\left(\frac{1}{1-t}\right)} - i\pi,$$

$$t = -1 \ldots 0 \qquad \log \Psi(\overset{+}{t}) = \log \Psi\left(\frac{t}{t-1}\right) + i\pi,$$

$$\log \Psi(\overset{-}{t}) = \log \Psi\left(\frac{t}{t-1}\right) - i\pi.$$

Il reste encore maintenant à rechercher quelle est la valeur la plus grande que peut prendre le module de

$$\varphi(t) = \frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}}$$

lorsque la quantité t est limitée au domaine T_0.

Comme on le sait cette valeur la plus grande correspond à une valeur de t situé sur la limite de T_0. La limite de T_0 est déterminée par le segment de la droite L_2 compris entre les deux points $e^{-\frac{\pi i}{3}}$, $e^{\frac{\pi i}{3}}$, et par l'arc du cercle L_1 limité par ces deux points et passant par le point 0.

Si, en désignant par w une quantité réelle, on pose

$$t = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \operatorname{tg} \frac{w}{2} = \frac{1}{e^{wi} + 1},$$

t parcourt la droite L_2 lorsque w parcourt l'intervalle $(-\pi \ldots +\pi)$. Alors $\frac{d \log |\varphi(t)|}{dw}$ est égale à la partie réelle de

$$\frac{d \log \varphi(t)}{dw} = \left(\frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{4}}\right) \cdot \frac{d \log t}{dw};$$

par suite comme

$$1 - t = \frac{e^{\frac{wi}{2}}}{2 \cos \frac{w}{2}}, \qquad \frac{d \log t}{dw} = -ite^{wi} = -i(1-t)$$

$$\frac{d|\varphi(t)|}{dw} = \frac{1}{2}|\varphi(t)| \cdot \left[\left(2 \cos \frac{w}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} \sin \frac{w}{8} + \left(2 \cos \frac{w}{2}\right)^{-\frac{3}{4}} \sin \frac{3w}{8}\right].$$

A l'intérieur de l'intervalle $(w = -\pi \ldots +\pi)$ $\varphi(t)$ n'est ni nulle ni infinie; par suite $\frac{d|\varphi(t)|}{dw}$ s'annule pour $w = 0$ et est positive lorsque w est situé entre 0 et π, négative lorsque w est situé entre 0 et $-\pi$. Le module de $\varphi(t)$ est donc un minimum pour $w = 0$, et croît constamment lorsque t parcourt en croissant constamment l'intervalle $(0 \ldots \pi)$, ou l'intervalle $(0 \ldots -\pi)$ en décroissant constamment.

Pour $t = e^{\frac{\pi i}{3}}$, comme $1 - e^{\frac{\pi i}{3}} = e^{-\frac{\pi i}{3}}$, on a

$$\varphi(t) = \frac{1 - e^{-\frac{\pi i}{12}}}{1 + e^{-\frac{\pi i}{12}}} = i \operatorname{tg} \frac{\pi}{24};$$

et pour $t = e^{-\frac{\pi i}{3}}$

$$\varphi(t) = -i \operatorname{tg} \frac{\pi}{24}.$$

La plus grande valeur du module de $\varphi(t)$ sur la droite joignant les deux points $e^{\frac{\pi i}{3}}$, $e^{-\frac{\pi i}{3}}$ est donc égale à $\operatorname{tg} \frac{\pi}{24}$.

Si on pose encore

$$t = 1 - e^{-wi}$$

t parcourt le cercle L_1 lorsque w parcourt l'intervalle $(-\pi \ldots + \pi)$. Alors on a

$$\varphi(t) = \frac{1 - e^{-\frac{wi}{4}}}{1 + e^{-\frac{wi}{4}}} = i \operatorname{tg} \frac{w}{8}$$

et le module de $\varphi(t)$ est un minimum au point $w = 0$, $t = 0$, et un maximum au point $w = \pm \pi$, $t = 2$. La plus grande valeur qu'il peut prendre sur la partie de l'arc de cercle limitant T_0, est donc obtenue aux points $e^{\frac{\pi i}{3}}$, $e^{-\frac{\pi i}{3}}$. Ainsi donc on a démontré:

Le module de $\varphi(t)$ a dans le domaine T_0 sa plus grande valeur aux points $t = e^{\frac{\pi i}{3}}$, $t = e^{-\frac{\pi i}{3}}$ et ce maximum est égal à $\operatorname{tg} \frac{\pi}{24}$.

Par suite pour toute valeur de t appartenant au domaine T_0 la série

$$\frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{2}{2^5} \varphi(t)^5 + \frac{15}{2^9} \varphi(t)^9 + \frac{150}{2^{13}} \varphi(t)^{13} + \ldots$$

est si rapidement convergente, qu'ordinairement dans la pratique les trois premiers termes, et dans beaucoup de cas les deux premiers donnent la valeur de la fonction $\Psi(t)$ avec une approximation suffisante.

7.

Si dans les séries qui définissent les fonctions $\theta_0(v \mid \tau)$, $\theta_1(v \mid \tau)$ etc., on remplace τ par $\varepsilon + \tau$, ε désignant l'un des deux nombres 1, -1 on voit que les fonctions

$$\theta_0(v \mid \tau), \qquad \theta_1(v \mid \tau), \qquad \theta_2(v \mid \tau), \qquad \theta_3(v \mid \tau)$$

sont égales respectivement aux fonctions

$$\theta_3(v \mid \varepsilon + \tau), \qquad i^{-\frac{\varepsilon}{2}} \theta_1(v \mid \varepsilon + \tau), \qquad i^{-\frac{\varepsilon}{2}} \theta_2(v \mid \varepsilon + \tau), \qquad \theta_0(v \mid \varepsilon + \tau).$$

De plus si dans les équations (1) de § 4 on pose

$$\sqrt[4]{q} = e^{\frac{\tau\pi i}{4}}, \qquad \sqrt[4]{q'} = e^{-\frac{\pi i}{4\tau}}, \qquad u = \theta_3^2(0,\ q) \,.\, v\pi, \qquad ui = \theta_3^2(0,\ q') \,.\, v'\pi,$$

et si, au moyen des formules (6) du § 3, on exprime les fonctions $f(u,\ q)$, $f_1(u,\ q)$, $f_2(u,\ q)$, au moyen des fonctions $\theta(v\pi,\ q)$, $\theta_1(v\pi,\ q)$, les fonctions $f(ui,\ q')$, $f_1(ui,\ q')$, $f_2(ui,\ q')$ au moyen de $\theta(v'\pi,\ q')$ et de $\theta_1(v'\pi,\ q')$, et si on remarque que d'après les formules (6) du § 4, on a

$$\frac{\theta_3(0,\ q)}{\theta_2(0,\ q)} = \frac{\theta_3(0,\ q')}{\theta(0,\ q')}, \qquad \frac{\theta(0,\ q)}{\theta_2(0,\ q)} = \frac{\theta_2(0,\ q')}{\theta(0,\ q')}, \qquad \frac{\theta(0,\ q)}{\theta_3(0,\ q)} = \frac{\theta_2(0,\ q')}{\theta_3(0,\ q')},$$

$$\theta_3^2(0,\ q) = \frac{i}{\tau}\theta_3^2(0,\ q')$$

et par suite

$$v' = -\frac{v}{\tau},$$

on arrive au théorème suivant:

Le quotient de deux quelconques des fonctions

$$\theta_0(v \mid \tau), \qquad \theta_1(v \mid \tau), \qquad \theta_2(v \mid \tau), \qquad \theta_3(v \mid \tau)$$

ne change pas de valeur si on remplace ces fonctions respectivement par les suivantes

$$\theta_2\left(-\frac{v}{\tau} \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right), \quad \frac{1}{i}\theta_1\left(-\frac{v}{\tau} \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right), \quad \theta_0\left(-\frac{v}{\tau} \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right), \quad \theta_3\left(-\frac{v}{\tau} \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right).$$

Maintenant posons comme plus haut (§ 5)

$$(1) \qquad \tau_1 = \frac{2\gamma\pi i + (2\delta + 1)\log \Psi(k^2)}{(2\alpha + 1)\pi i + 2\beta\log \Psi(k^2)}$$

et

$$(2) \qquad \tau_2 = \frac{1}{-\tau_1}, \qquad \tau_3 = \mathfrak{c} + \tau_2 = \frac{1 - \mathfrak{c}\tau_1}{-\tau_1}, \qquad \tau_4 = \frac{1}{-\tau_3} = \frac{\tau_1}{1 - \mathfrak{c}\tau_1},$$

$$\tau_5 = \mathfrak{c} + \tau_4 = \frac{\mathfrak{c}}{1 - \mathfrak{c}\tau_1}, \qquad \tau_6 = \frac{1}{-\tau_5} = -\mathfrak{c} + \tau_1,$$

$$(3) \qquad v_1 = \frac{u}{\pi\theta_3^2(0 \mid \tau_1)}, \qquad v_2 = -\frac{v_1}{\tau_1}, \qquad v_3 = v_2 = -\frac{v_1}{\tau_1},$$

$$v_4 = \frac{v_3}{\tau_3} = -\frac{v_1}{\tau_1\tau_3}, \qquad v_5 = \epsilon v_4 = \frac{-\epsilon v_1}{\tau_1\tau_3}, \qquad v_6 = \frac{v_5}{\tau_5} = \frac{-\epsilon v_1}{\tau_1\tau_3\tau_5},$$

ou bien, comme on a d'après les formules (6, 7) du § 4

$$\theta_3^2(0 \mid \tau_1) = \frac{i}{\tau_1}\theta_3^2(0 \mid \tau_2) = \frac{i}{\tau_1}\theta_0^2(0 \mid \tau_3)$$

$$= -\frac{1}{\tau_1\tau_3}\theta_2^2(0 \mid \tau_4) = \frac{\epsilon i}{\tau_1\tau_3}\theta_2^2(0 \mid \tau_5) = \frac{-\epsilon}{\tau_1\tau_3\tau_5}\theta_0^2(0 \mid \tau_6)$$

posons

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} v_1 = \dfrac{u}{\pi\theta_3^2(0 \mid \tau_1)}, & v_2 = \dfrac{ui}{\pi\theta_3^2(0 \mid \tau_2)}, & v_3 = \dfrac{ui}{\pi\theta_0^2(0 \mid \tau_3)}, \\ v_4 = \dfrac{u}{\pi\theta_2^2(0 \mid \tau_4)}, & v_5 = \dfrac{ui}{\pi\theta_2^2(0 \mid \tau_5)}, & v_6 = \dfrac{u}{\pi\theta_0^2(0 \mid \tau_6)}. \end{array} \right.$$

Maintenant si on change dans les équations (9) du § 5 les fonctions $\theta(x, q)$, $\theta_1(x, q)$, ... respectivement en

$$\theta_0(v_1 \mid \tau_1), \qquad \theta_1(v_1 \mid \tau_1), \qquad \theta_2(v_1 \mid \tau_1), \qquad \theta_3(v_1 \mid \tau_1)$$

et si en appliquant plusieurs fois les deux théorèmes précédents, on remplace celles-ci au moyen de fonctions — θ d'arguments

$$(v_2, \tau_2), \ (v_3, \tau_3), \ \ldots, \ (v_6, \tau_6)$$

on obtient les représentations suivantes des fonctions elliptiques $\sin\operatorname{am}(u, k)$, $\cos\operatorname{am}(u, k)$, $\Delta\operatorname{am}(u, k)$, dans lesquelles ε, β, γ, $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1-k^2}$ ont la même signification que dans les équations citées (9)

$$(5) \qquad i^{\varepsilon\gamma}\sqrt[4]{k^2}.\sin\operatorname{am}(u, k) = \frac{\theta_1(v_1 \mid \tau_1)}{\theta_0(v_1 \mid \tau_1)} = \frac{1}{i}\cdot\frac{\theta_1(v_2 \mid \tau_2)}{\theta_2(v_2 \mid \tau_2)} = \frac{1}{i}\cdot\frac{\theta_1(v_3 \mid \tau_3)}{\theta_2(v_3 \mid \tau_3)}$$

$$= \frac{\theta_1(v_4 \mid \tau_4)}{\theta_0(v_4 \mid \tau_4)} = i^{\frac{\epsilon}{2}-1}\cdot\frac{\theta_1(v_5 \mid \tau_5)}{\theta_3(v_5 \mid \tau_5)} = i^{\frac{\epsilon}{2}}\cdot\frac{\theta_1(v_6 \mid \tau_6)}{\theta_3(v_6 \mid \tau_6)}$$

$$(6) \qquad i^{\varepsilon(\beta+\gamma)}\sqrt[4]{k^2}.\cos\mathrm{am}(u,\ k) = \frac{\theta_2(v_1 \mid \tau_1)}{\theta_0(v_1 \mid \tau_1)} = \frac{\theta_0(v_2 \mid \tau_2)}{\theta_2(v_2 \mid \tau_2)} = i^{\frac{\mathfrak{e}}{2}}.\frac{\theta_3(v_3 \mid \tau_3)}{\theta_2(v_3 \mid \tau_3)}$$

$$= i^{\frac{\mathfrak{e}}{2}}.\frac{\theta_3(v_4 \mid \tau_4)}{\theta_0(v_4 \mid \tau_4)} = i^{\frac{\mathfrak{e}}{2}}.\frac{\theta_0(v_5 \mid \tau_5)}{\theta_3(v_5 \mid \tau_5)} = i^{\frac{\mathfrak{e}}{2}}.\frac{\theta_2(v_6 \mid \tau_6)}{\theta_3(v_6 \mid \tau_6)}$$

$$(7) \qquad \frac{i^{\varepsilon\beta}}{\sqrt[4]{1-k^2}}.\Delta\,\mathrm{am}(u,\ k) = \frac{\theta_3(v_1 \mid \tau_1)}{\theta_0(v_1 \mid \tau_1)} = \frac{\theta_3(v_2 \mid \tau_2)}{\theta_2(v_2 \mid \tau_2)} = i^{\frac{\mathfrak{e}}{2}}.\frac{\theta_0(v_3 \mid \tau_3)}{\theta_2(v_3 \mid \tau_3)}$$

$$= i^{\frac{\mathfrak{e}}{2}}.\frac{\theta_2(v_4 \mid \tau_4)}{\theta_0(v_4 \mid \tau_4)} = \frac{\theta_2(v_5 \mid \tau_5)}{\theta_3(v_5 \mid \tau_5)} = \frac{\theta_0(v_6 \mid \tau_6)}{\theta_3(v_6 \mid \tau_6)}.$$

Il faut remarquer ici qu'on a

$$v_3 = v_2, \qquad v_5 = \mathfrak{e}v_4, \qquad v_6 = v_1.$$

Les quantites $\tau_1, \ldots, \tau_6$ exprimées au moyen de τ sont de la forme

$$\frac{\mathfrak{c} + \mathfrak{d}\tau_1}{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\tau_1},$$

où chacun des nombres $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ a l'une des valeurs 0, 1, -1 et entre lesquels existe la relation

$$\mathfrak{a}\mathfrak{d} - \mathfrak{b}\mathfrak{c} = 1$$

Exprimées au moyen de $\tau = \frac{1}{\pi i}\log \Psi(k^2)$, elles prennent donc la forme

$$\frac{c + d\tau}{a + b\tau},$$

a, b, c, d étant des nombres entiers liés par la relation

$$ad - bc = 1.$$

Il est très-facile de montrer qu'inversement, si a, b, c, d sont quatre nombres entiers quelconques satisfaisant à l'égalité précédente, l'expression $\frac{c + d\tau}{a + b\tau}$, peut toujours être ramenée à l'une des 6 formes

$$\tau_1, \qquad \frac{1}{-\tau_1}, \qquad \frac{1 - \mathfrak{e}\tau_1}{-\tau_1}, \qquad \frac{\tau_1}{1 - \mathfrak{e}\tau_1}, \qquad \frac{\mathfrak{e}}{1 - \mathfrak{e}\tau_1}, \qquad -\mathfrak{e} + \tau_1.$$

où τ_1 a la forme

$$\tau_1 = \frac{2\gamma + (2\delta + 1)\tau}{(2\alpha + 1) + 2\beta\tau},$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant quatre nombres entiers satisfaisant à l'égalité

$$(2\alpha + 1)(2\delta + 1) - 4\beta\gamma = 1.$$

On peut y prendre à volonté ε égal à 1 ou à -1.

En particulier si on prend $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ égaux à 0, par suite

$$\tau_1 = \frac{1}{\pi i}\log \Psi(k^2)$$

et qu'on détermine ensuite $\tau_2, \ldots, \tau_6$ d'après les formules (2) dans l'hypothèse où k^2 est une quantité complexe et ε comme plus haut égal à 1 ou à -1 suivant que la seconde coordonnée de k^2 est positive ou négative, il résulte alors des équations (1, 5, 6, 7, 8) du § 6

$$(8)\quad \left|\begin{array}{lll} \tau_1\pi i = \log \Psi(k^2), & \tau_2\pi i = \log \Psi(1 - k^2), & \tau_3\pi i = \log \Psi\left(\dfrac{k^2 - 1}{k^2}\right) \\ \tau_4\pi i = \log \Psi\left(\dfrac{1}{k^2}\right), & \tau_5\pi i = \log \Psi\left(\dfrac{1}{1 - k^2}\right), & \tau_6\pi i = \log \Psi\left(\dfrac{k^2}{k^2 - 1}\right). \end{array}\right.$$

On a de plus

$$\log(k^2) = \log(-k^2) + \varepsilon\pi i, \qquad \log(1 - k^2) = \log(k^2 - 1) - \varepsilon\pi i$$

et par suite

$$(9)\qquad \sqrt[4]{k^2} = i^{\frac{\varepsilon}{2}}\sqrt[4]{-k^2}, \qquad \sqrt[4]{1 - k^2} = i^{-\frac{\varepsilon}{2}}\sqrt[4]{k^2 - 1}.$$

Si donc on prend de nouveau les notations de JACOBI, et si on pose

$$(10)\quad \left|\begin{array}{lll} q = \Psi(k^2), & q_1 = \Psi(1 - k^2), & q_2 = \Psi\left(\dfrac{k^2 - 1}{k^2}\right), \\ q_3 = \Psi\left(\dfrac{1}{k^2}\right), & q_4 = \Psi\left(\dfrac{1}{1 - k^2}\right), & q_5 = \Psi\left(\dfrac{k^2}{k^2 - 1}\right) \end{array}\right.$$

$$(11)\quad \left|\begin{array}{lll} x = \dfrac{u}{\theta_3^2(0, q)}, & x_1 = \dfrac{ui}{\theta_3^2(0, q_1)}, & x_2 = \dfrac{ui}{\theta^2(0, q_2)}, \\ x_3 = \dfrac{u}{\theta_2^2(0, q_3)}, & x_4 = \dfrac{ui}{\theta_2^2(0, q_4)}, & x_5 = \dfrac{u}{\theta^2(0, q_5)}, \end{array}\right.$$

formules dans lesquelles on a

$$(12) \quad \begin{cases} q = -q_5, & q_2 = -q_1, & q_4 = -q_3, \\ x_2 = x_1, & x_4 = ex_3, & x_5 = x; \end{cases}$$

on tire alors des équations (5, 6, 7) les six systèmes particuliers de formule qui sont réunis dans le tableau suivant.

Dans les trois premières colonnes sont inscrits au-dessous de $\sin\mathrm{am}(u, k)$, $\cos\mathrm{am}(u, k)$, $\Delta\,\mathrm{am}(u, k)$ les numérateurs, et dans la quatrième colonne le dénominateur commun des fractions au moyen desquelles ces fonctions s'expriment dans les six cas admis.

	$\sin\mathrm{am}(u, k)$	$\cos\mathrm{am}(u, k)$	$\Delta\,\mathrm{am}(u, k)$	
1	$\frac{1}{\sqrt[4]{k^2}}\cdot\theta_1(x, q)$	$\frac{\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt[4]{k^2}}\cdot\theta_2(x, q)$	$\sqrt[4]{1-k^2}\cdot\theta_3(x, q)$	$/\theta(x, q)$
2	$\frac{1}{i\sqrt[4]{k^2}}\cdot\theta_1(x_1, q_1)$	$\frac{\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt[4]{k^2}}\cdot\theta(x_1, q_1)$	$\sqrt[4]{1-k^2}\cdot\theta_3(x_1, q_1)$	$/\theta_2(x_1, q_1)$
3	$\frac{1}{i\sqrt[4]{k^2}}\cdot\theta_1(x_2, q_2)$	$\frac{\sqrt[4]{k^2-1}}{\sqrt[4]{k^2}}\cdot\theta_3(x_2, q_2)$	$\sqrt[4]{k^2-1}\cdot\theta(x_2, q_2)$	$/\theta_2(x_2, q_2)$
4	$\frac{1}{\sqrt[4]{k^2}}\cdot\theta_1(x_3, q_3)$	$\frac{\sqrt[4]{k^2-1}}{\sqrt[4]{k^2}}\cdot\theta_3(x_3, q_3)$	$\sqrt[4]{k^2-1}\cdot\theta_2(x_3, q_3)$	$/\theta(x_3, q_3)$
5	$\frac{1}{i\sqrt[4]{-k^2}}\cdot\theta_1(x_4, q_4)$	$\frac{\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt[4]{-k^2}}\cdot\theta(x_4, q_4)$	$\sqrt[4]{1-k^2}\cdot\theta_2(x_4, q_4)$	$/\theta_3(x_4, q_4)$
6	$\frac{1}{\sqrt[4]{-k^2}}\cdot\theta_1(x_5, q_5)$	$\frac{\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt[4]{-k^2}}\cdot\theta_2(x_5, q_5)$	$\sqrt[4]{1-k^2}\cdot\theta(x_5, q_5)$	$/\theta_3(x_5, q_5)$

Ces expressions des fonctions elliptiques subsistent encore pour des valeurs réelles de k^2, lorsque les radicaux qui s'y trouvent sont convenablement déterminés, ce sur quoi je fais les remarques suivantes.

On a admis plus haut qu'on avait à déterminer pour une valeur réelle donnée de k^2 aussi bien les valeurs de $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{q}$, que la valeur du radical $\sqrt[4]{1-k^2}$ dont dépend la valeur de $q = \Psi(k^2)$, de manière à laisser subsister les égalités

$$\frac{\theta_2(0,\ q)}{\theta_3(0,\ q)} = \sqrt[4]{k^2}, \qquad \frac{\theta(0,\ q)}{\theta_3(0,\ q)} = \sqrt[4]{1-k^2}.$$

Si à la place de k^2 on a les quantités

$$(13)\quad k_1^2 = 1-k^2,\quad k_2^2 = \frac{k^2-1}{k^2},\quad k_3^2 = \frac{1}{k^2},\quad k_4^2 = \frac{1}{1-k^2},\quad k_5^2 = \frac{-k^2}{1-k^2},$$

qu'on fixe pour $\nu = 1, 2, 3, 4, 5$, les valeurs de

$$\sqrt[4]{1-k_\nu^2},\qquad \sqrt[4]{k_\nu^2},\qquad q_\nu,\qquad \sqrt[4]{q_\nu},$$

de manière à avoir

$$(14)\qquad \frac{\theta_2(0,\ q_\nu)}{\theta_3(0,\ q_\nu)} = \sqrt[4]{k_\nu^2}, \qquad \frac{\theta(0,\ q_\nu)}{\theta_3(0,\ q_\nu)} = \sqrt[4]{1-k_\nu^2}$$

et qu'on détermine alors les valeurs que $\frac{\theta_2(0,\ q_\nu)}{\theta_3(0,\ q_\nu)}$, $\frac{\theta_0(0,\ q_\nu)}{\theta_3(0,\ q_\nu)}$ doivent avoir d'après la table de formule précédente, alors il vient

$$(15)\quad \left|\begin{array}{ll}
\sqrt[4]{k_1^2} = \sqrt[4]{1-k^2}, & \sqrt[4]{1-k_1^2} = \sqrt[4]{k^2} \\[2ex]
\sqrt[4]{k_2^2} = \sqrt[4]{\dfrac{k^2-1}{k^2}} = \dfrac{\sqrt[4]{k^2-1}}{\sqrt[4]{k^2}}, & \sqrt[4]{1-k_2^2} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{k^2}} \quad = \dfrac{1}{\sqrt[4]{k^2}} \\[2ex]
\sqrt[4]{k_3^2} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{k^2}} \quad = \dfrac{1}{\sqrt[4]{k^2}}, & \sqrt[4]{1-k_3^2} = \sqrt[4]{\dfrac{k^2-1}{k^2}} = \dfrac{\sqrt[4]{k^2-1}}{\sqrt[4]{k^2}} \\[2ex]
\sqrt[4]{k_4^2} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{1-k^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-k^2}}, & \sqrt[4]{1-k_4^2} = \sqrt[4]{\dfrac{-k^2}{1-k^2}} = \dfrac{\sqrt[4]{-k^2}}{\sqrt[4]{1-k^2}} \\[2ex]
\sqrt[4]{k_5^2} = \sqrt[4]{\dfrac{-k^2}{1-k^2}} = \dfrac{\sqrt[4]{-k^2}}{\sqrt[4]{1-k^2}}, & \sqrt[4]{1-k_5^2} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{1-k^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-k^2}}.
\end{array}\right.$$

Ces égalités donnent donc les valeurs que doivent avoir, les quantités $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1-k^2}$ dans les formules (1, 2), $\sqrt[4]{k^2-1}$, $\sqrt[4]{k^2}$ dans les formules (3, 4), enfin $\sqrt[4]{-k^2}$, $\sqrt[4]{1-k^2}$ dans les formules (5, 6), et il n'importe en rien que k^2 soit réel ou complexe.

Si cette quantité $t = k^2$ appartient au domaine désigné plus haut (§ 6) par T_0, alors on prendra parmi les expressions précédentes des fonctions elliptiques les formules (1) comme les plus commodes, parce que le module de q ne surpasse jamais la limite

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}\right)^{4n+1}$$

et par suite que les séries θ convergent très-rapidement.

Mais si $t = k^2$ appartient au domaine T_ν, ($\nu = 1, 2, 3, 4, 5$) alors k_ν^2 appartient au domaine T_0 et on se servira pour le calcul des fonctions elliptiques le plus commodément des formules de la table contenues dans la ligne horizontale de rang $\nu + 1$.

Si k^2 est réel et est situé dans le domaine T_ν, ($\nu = 0, \ldots, 5$) alors les formules de rang $(\nu + 1)$ et les radicaux qui s'y trouvent sont tous des quantités réelles et positives.

Il faut encore remarquer que des égalités

$$\theta_3(0, q_\nu) = \theta_3(0, q_\nu^4) + \theta_2(0, q_\nu^4), \qquad \frac{\theta_2(0, q_\nu^4)}{\theta_3(0, q_\nu^4)} = \frac{1 - \sqrt[4]{1-k_\nu^2}}{1 + \sqrt[4]{1-k_\nu^2}}$$

résultent les expressions suivantes de $\theta_3(0, q_\nu)$, $\theta(0, q_\nu)$, $\theta_2(0, q_\nu)$

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
\theta_3(0, q_\nu) &= \frac{2}{1+\sqrt[4]{1-k_\nu^2}}\cdot\theta_3(0, q_\nu^4) = \frac{2}{1+\sqrt[4]{1-k_\nu^2}}\cdot(1 + 2q_\nu^4 + 2q_\nu^{16} + \ldots)\\
\theta(0, q_\nu) &= \frac{2\sqrt[4]{1-k_\nu^2}}{1+\sqrt[4]{1-k_\nu^2}}\cdot\theta_3(0, q_\nu^4) = \frac{2\sqrt[4]{1-k_\nu^2}}{1+\sqrt[4]{1-k_\nu^2}}\cdot(1 + 2q_\nu^4 + 2q_\nu^{16} + \ldots)\\
\theta_2(0, q_\nu) &= \frac{2\sqrt[4]{k_\nu^2}}{1+\sqrt[4]{1-k_\nu^2}}\cdot\theta_3(0, q_\nu^4) = \frac{2\sqrt[4]{k_\nu^2}}{1+\sqrt[4]{1-k_\nu^2}}\cdot(1 + 2q_\nu^4 + 2q_\nu^{16} + \ldots).
\end{aligned}\right.$$

On obtient donc en particulier pour les quantités $\theta_3(0, q), \ldots, \theta(0, q_5$ qui se trouvent dans les équations (11)

$$
\left|\begin{aligned}
\theta_3(0, q) &= \frac{2}{1 + \sqrt[4]{1 - k^2}} \cdot (1 + 2q^4 + 2q^{16} + \ldots) \\
\theta_3(0, q_1) &= \frac{2}{1 + \sqrt[4]{k^2}} \cdot (1 + 2q_1^4 + 2q_1^{16} + \ldots) \\
\theta(0, q_2) &= \frac{2}{1 + \sqrt[4]{k^2}} \cdot (1 + 2q_2^4 + 2q_2^{16} + \ldots) \\
\theta_2(0, q_3) &= \frac{2}{\sqrt[4]{k^2 - 1} + \sqrt[4]{k^2}} \cdot (1 + 2q_3^4 + 2q_3^{16} + \ldots) \\
\theta_2(0, q_4) &= \frac{2}{\sqrt[4]{1 - k^2} + \sqrt[4]{-k^2}} \cdot (1 + 2q_4^4 + 2q_4^{16} + \ldots) \\
\theta(0, q_5) &= \frac{2}{1 + \sqrt[4]{1 - k^2}} \cdot (1 + 2q_5^4 + 2q_5^{16} + \ldots)
\end{aligned}\right. \tag{17}
$$