SUR UN THÉORÈME CONCERNANT LES FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

EDVARD PHRAGMEN

À STOCKHOLM.

Dans son enseignement à l'université de Berlin, M. WEIERSTRASS a donné une théorie des fonctions elliptiques aussi remarquable par la beauté que par la simplicité des méthodes, où il prend pour point de départ le théorème suivant:

Toute fonction analytique $\varphi(u)$ possédant un théorème d'addition ou, en d'autres termes, telle qu'il existe une relation algébrique entre les valeurs de la fonction correspondant aux valeurs de l'argument u, v, $u+v$, est

1° ou une fonction algébrique de u; ou bien

2° si ω désigne une constante convenablement choisie, une fonction algébrique de la fonction $e^{\frac{\pi i u}{\omega}}$; ou enfin

3° si ω, ω' sont deux constantes convenablement choisies, une fonction algébrique de la fonction [1]

$$\wp(u\mid\omega,\omega') = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u-2\mu\omega-2\mu'\omega')^2} - \frac{1}{(2\mu\omega+2\mu'\omega')^2}\right]$$

$(\mu, \mu' = 0, 1, 2, \ldots$ sauf la combinaison $\mu = \mu' = 0)$.

Cette théorie n'a jamais été, en son entier, l'objet d'aucune publication de la part de son auteur; le seul ouvrage à ma connaissance qui

[1] Pour la théorie de cette fonction, voir l'ouvrage de M. SCHWARZ: *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen* (1881—1884).

puisse en donner une idée nette est celui de M. SCHWARZ; mais comme la démonstration que M. WEIERSTRASS a donnée du théorème énoncé plus haut ne s'y trouve pas, j'ai été réduit à mes propres ressources pour en chercher une; ce n'est que plus tard que la démonstration de M. WEIERSTRASS m'a été communiquée par mes professeurs, M. MITTAG-LEFFLER et M^me^ KOWALEVSKI. Un caractère essentiel de cette démonstration c'est qu'elle peut être généralisée de manière à embrasser le cas général des fonctions abéliennes. Mais si l'on renonce à cette généralisation et que l'on se borne à démontrer le théorème ci-dessus énoncé, la démonstration que j'ai trouvée paraît un peu plus simple et plus facile que celle de M. WEIERSTRASS et j'ai l'honneur de la présenter aux lecteurs des Acta, dans l'espoir qu'elle leur offrira quelque intérêt.

Nous posions que la fonction analytique $\varphi(u)$ avait un théorème d'addition algébrique ou qu'il existait, entre $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ et $\varphi(u+v)$, une relation algébrique. Je me bornerai à supposer qu'il y a trois éléments [1]

$$\mathfrak{P}_1(u \mid a), \qquad \mathfrak{P}_2(v \mid b), \qquad \mathfrak{P}(u + v \mid a + b)$$

de la fonction φ liés par une équation algébrique

$$G[\mathfrak{P}_1(u \mid a),\ \mathfrak{P}_2(v \mid b),\ \mathfrak{P}(u + v \mid a + b)] = 0. \tag{1}$$

On sait alors que la même équation a lieu pour tout système de trois éléments qu'on peut obtenir en continuant le système des éléments $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}$ le long d'un chemin quelconque. Mais de là on ne peut pas conclure immédiatement que l'on ait

$$G[\varphi(u),\ \varphi(v),\ \varphi(u + v)] = 0$$

pour trois valeurs quelconques de la fonction correspondant aux valeurs de l'argument u, v, $u + v$. En effet, si l'on change l'élément $\mathfrak{P}_1(u \mid a)$ en $\mathfrak{P}_1'(u \mid a)$ en le continuant le long d'un chemin fermé et qu'on laisse inaltéré l'élément $\mathfrak{P}_2(v \mid b)$, $\mathfrak{P}(u + v \mid a + b)$ se changera en général en un

---

[1] $\mathfrak{P}(u \mid a)$ = une série procédant suivant les puissances entières et positives de $(u - a)$.

nouvel élément $\mathfrak{P}'(u+v\,|\,a+b)$, de sorte que l'on ne voit pas si l'élément nouveau $\mathfrak{P}_1'(u\,|\,a)$ satisfait à la relation

$$G[\mathfrak{P}_1'(u\,|\,a),\ \mathfrak{P}_2(v\,|\,b),\ \mathfrak{P}(u+v\,|\,a+b)]=0$$

ou non.

Dans ce qui suit, je démontrerai en premier lieu que si l'on admet la relation (1), la fonction $\varphi(u)$ a le caractère d'une fonction algébrique à l'intérieur de tout domaine fini.

En disant qu'une fonction définie par un élément donné a le caractère d'une fonction algébrique à l'intérieur d'un domaine donné, j'entends que toutes les valeurs qu'on peut obtenir en continuant l'élément le long de chemins appartenant tout entiers au domaine donné satisfont à une équation de la forme

$$z^n+f_1z^{n-1}+f_2z^{n-2}+\ldots+f_n=0,$$

où $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ont le caractère d'une fonction rationnelle à l'intérieur du même domaine.

Puis je montrerai que l'on a en effet

$$G[\varphi(u),\ \varphi(v),\ \varphi(u+v)]=0,$$

où $\varphi(u)$ désigne une valeur quelconque de la fonction φ correspondant à l'argument u et ainsi de suite pour $\varphi(v)$ et $\varphi(u+v)$.

Dès lors, je sais que $\varphi(u)$ ne peut avoir en chaque point qu'un nombre fini de valeurs, et, m'appuyant sur ce fait, je démontre aisément que $\varphi(u)$ est ou une fonction algébrique ou une fonction périodique, et il n'y a plus de difficulté à achever la démonstration.

Supposons donc que la relation

$$G[\mathfrak{P}_1(u\,|\,a),\ \mathfrak{P}_2(v\,|\,b),\ \mathfrak{P}(u+v\,|\,a+b)]=0$$

ait lieu entre trois éléments $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}$ de la fonction φ.

Si nous considérons un de ces éléments, par exemple $\mathfrak{P}_1(u\,|\,a)$, nous voyons qu'on peut trouver une quantité positive r_1 telle, que pour le domaine

$$|u-a|<r_1$$

la fonction définie par cet élément ait le caractère d'une fonction algébrique. C'est ce qui du moins a lieu si l'on choisit r_1 plus petit que le rayon de convergence de la série $\mathfrak{P}_1(u \mid a)$. Pour les autres éléments $\mathfrak{P}_2(v \mid b)$, $\mathfrak{P}(u + v \mid a + b)$, l'analogue a lieu.

De plus, on voit que les limites supérieures des quantités r_1, r_2, r sont finies ou infinies en même temps. Car si l'une de ces limites supérieures est infinie, c'est que $\varphi(u)$ a le caractère d'une fonction algébrique pour tout domaine fini, et alors il faut que les autres soient aussi infinies. Or, on voit aisément qu'elles ne peuvent être finies toutes les trois. Car, si c'était le cas, admettons que ρ_1, ρ_2, ρ soient leurs valeurs: il faut qu'on ait l'une des deux inégalités suivantes

$$\rho_1 < \rho + \rho_2 \quad \text{ou} \quad \rho_2 < \rho + \rho_1.$$

Soit $\rho_1 < \rho + \rho_2$. Si l'on pose alors

$$v - b = -\frac{\rho_2}{\rho + \rho_2}(u - a)$$

et par conséquent

$$u + v - a - b = \frac{\rho}{\rho + \rho_2}(u - a),$$

et que l'on suppose

$$|u - a| < R < \rho + \rho_2,$$

on a

$$|v - b| < \frac{R}{\rho + \rho_2} \cdot \rho_2 < \rho_2,$$

$$|u + v - a - b| < \frac{R}{\rho + \rho_2} \cdot \rho < \rho,$$

et, par conséquent, les fonctions de u définies après cette substitution par les éléments $\mathfrak{P}_2$ et $\mathfrak{P}$ ont le caractère d'une fonction algébrique pour tout domaine

$$|u - a| < R,$$

où R est une quantité positive plus petite que $\rho + \rho_2$. Si l'on désigne ces fonctions par y, z et la fonction définie par l'élément $\mathfrak{P}_1(u \mid a)$ par x, on a la relation

$$G(x, y, z) = 0.$$

Si entre cette équation et les équations

$$y^n + \varphi_1 y^{n-1} + \ldots + \varphi_n = 0,$$

$$z^\nu + \psi_1 z^{\nu-1} + \ldots + \psi_\nu = 0,$$

qui définissent y et z comme des fonctions à caractère algébrique à l'intérieur du domaine $|u - a| < R$, on élimine y et z, on obtient une équation

$$x^n + f_1 x^{n-1} + \ldots + f_n = 0,$$

où $f_1, \ldots, f_n$ ont le caractère d'une fonction rationnelle dans le domaine $|u - a| < R$.

Donc x a le caractère d'une fonction algébrique à l'intérieur de ce même domaine $|u - a| < R$, où R est une quantité positive quelconque plus petite que $\rho + \rho_2$, ce qui est contraire à la supposition $\rho_1 < \rho + \rho_2$.

On voit que le même raisonnement s'applique au cas où $\rho_2 < \rho + \rho_1$.

Donc la fonction $\varphi(u)$ a le caractère d'une fonction algébrique dans tout domaine fini.

Prouvons maintenant que l'on a toujours entre trois valeurs de la fonction φ correspondant aux valeurs de l'argument $u, v, u + v$ la relation

$$G[\varphi(u),\ \varphi(v),\ \varphi(u + v)] = 0.$$

Nous le démontrerons en faisant voir que chaque valeur φ_a, que la fonction $\varphi(u)$ peut prendre dans le point a, ou dont $\varphi(u)$ s'approche indéfiniment lorsque u s'approche indéfiniment de a sur un certain chemin, satisfait à l'équation

$$G[\varphi_a,\ \mathfrak{P}_2(v \mid b),\ \mathfrak{P}(a + v \mid a + b)] = 0.$$

En effet, on arrive à la valeur φ_a en continuant l'élément $\mathfrak{P}_1(u \mid a)$ le long d'un certain chemin fermé. On peut toujours choisir un domaine continu, fini et simplement connexe qui contienne ce chemin tout entier. On peut encore déterminer un second domaine continu et fini tel, que la limite inférieure des distances d'un point à l'intérieur du premier domaine et d'un point à l'extérieur du second soit plus grande qu'une quantité $d > |b|$.

Imaginons-nons pour un instant un troisième domaine assez grand pour contenir à son intérieur non seulement le dernier des deux domaines que nous venons de fixer, y compris la limite, mais aussi le chemin le long duquel il faut continuer l'élément $\mathfrak{F}_1(u \mid a)$ pour arriver à l'élément $\mathfrak{F}(u + v \mid a + b)$. A l'intérieur de ce domaine, la fonction définie par l'élément $\mathfrak{F}_1(u \mid a)$ — ou, ce qui donne la même fonction, par $\mathfrak{F}(u + v \mid a + b)$ — a le caractère d'une fonction algébrique, et par conséquent elle ne peut avoir qu'un nombre fini de points singuliers à l'intérieur du plus grand de nos deux premiers domaines. Nous pouvons donc choisir deux points a', b' dans l'entourage de a et de b, de manière à satisfaire aux conditions suivantes. En premier lieu, il faut que l'on ait $|b'| < d$, de sorte qu'à chaque point α à l'intérieur du plus petit de nos deux domaines corresponde un point $\alpha + b'$ à l'intérieur du plus grand. De plus, le point a' doit être choisi à l'intérieur du petit domaine et d'une telle manière, que les points a', $a' + b'$ ne se confondent avec aucun des points en nombre fini du grand domaine qui constituent des points singuliers pour la fonction considérée tout à l'heure. Enfin, si α est un point singulier de cette fonction situé à l'intérieur du petit domaine, $\alpha + b'$ doit être un point régulier de la même fonction.

Sans changer la valeur finale φ_a, nous pouvons maintenant remplacer le chemin fermé $a \ldots a$ par la suite des chemins réguliers suivants: 1° un chemin aa', 2° un nombre de *lacets*[1] joignant le point a' à des points singuliers situés à l'intérieur du moindre domaine, et 3° le chemin $a'a$. On peut même choisir ces lacets de manière que les lacets correspondants que décrit le point $u + b'$ soient composés de chemins réguliers et de cercles qui ne contiennent aucun point singulier. Donc, si l'on continue le système des éléments $\mathfrak{F}_1(u \mid a)$, $\mathfrak{F}_2(v \mid b)$, $\mathfrak{F}(u + v \mid a + b)$ en faisant varier 1° u de a à a' et v de b à b', 2° u de a' à a' le long des lacets, et 3° u de a' à a et v de b' à b, en partant de l'élément $\mathfrak{F}_1(u \mid a)$ on s'approche indéfiniment de la valeur φ_a, tandis que les éléments $\mathfrak{F}_2(v \mid b)$ et $\mathfrak{F}(u + v \mid a + b)$ reviennent.

---

[1] Par un *lacet* joignant le point a' à un point singulier α, nous entendons un chemin régulier composé d'un chemin partant de a' et aboutissant dans l'entourage de α, d'un petit cercle autour de α et du premier chemin parcouru en sens contraire (Voir par ex. BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*).

Mais il est démontré dès lors que chaque élément régulier ou singulier $\varphi(u \mid a)$ de la fonction $\varphi(u)$ dans l'entourage du point a satisfait nécessairement à l'équation

$$G[\varphi(u \mid a),\ \mathfrak{S}_2(v \mid b),\ \mathfrak{S}(u + v \mid a + b)] = 0.$$

Comme l'analogue a lieu pour les éléments $\mathfrak{S}_2$ et $\mathfrak{S}$ et que d'ailleurs les points a, b sont tout à fait arbitraires, notre assertion se trouve entièrement justifiée.

De ce que la relation

$$G[\varphi(u),\ \varphi(v),\ \varphi(u + v)] = 0$$

a toujours lieu, il s'ensuit que la fonction $\varphi(u)$ ne peut avoir en chaque point qu'un nombre fini de valeurs

$$\varphi_1(u),\ \varphi_2(u),\ \ldots,\ \varphi_n(u).$$

Donc, si l'on forme les expressions

$$\frac{1}{\varphi_1 u - a} + \ldots + \frac{1}{\varphi_n u - a},$$

$$\frac{1}{(\varphi_1 u - a)^2} + \ldots + \frac{1}{(\varphi_n u - a)^2},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{1}{(\varphi_1 u - a)^n} + \ldots + \frac{1}{(\varphi_n u - a)^n},$$

on voit immédiatement qu'elles représentent des fonctions qui ont le caractère d'une fonction rationnelle à l'intérieur de tout domaine fini. Si elles sont toutes des fonctions rationnelles, $\varphi(u)$ est une fonction algébrique. Dans le cas contraire, supposons que pour la fonction

$$\frac{1}{(\varphi_1 u - a)^m} + \ldots + \frac{1}{(\varphi_n u - a)^m}$$

le point $u = \infty$ est un point singulier essentiel. On sait alors que, pour des valeurs de l'argument plus grandes en valeur absolue qu'une quantité donnée quelconque, cette fonction peut prendre des valeurs plus grandes en valeur absolue qu'une autre quantité donnée quelconque, et, par conséquent, pour des valeurs de u plus grandes en valeur absolue qu'une quantité arbitrairement donnée, $\varphi(u)$ peut prendre des valeurs telles, que la valeur absolue de $[\varphi(u) - a]$ soit plus petite que toute quantité donnée. Mais cela étant, on démontre à l'aide d'un raisonnement employé par M. WEIERSTRASS dans son cours et que je reproduis ici succinctement, que $\varphi(u)$ est nécessairement périodique.

En effet, on voit en premier lieu que, dans le voisinage d'un point donné quelconque, il y a toujours une valeur que $\varphi(u)$ reprend au moins un nombre donné de fois. Car supposons que dans le voisinage d'un point a il y ait une valeur b que $\varphi(u)$ reprend un nombre m de fois aux points $u_1, \ldots, u_m$. Alors $\varphi(u)$ peut prendre chaque valeur dans un certain entourage de b pour des valeurs de l'argument dans le voisinage des points $u_1, \ldots, u_m$. Mais $\varphi(u)$ pouvant prendre une valeur aussi peu différente de b qu'on le désire dans un point du voisinage de $u = \infty$, on voit qu'on peut trouver dans chaque entourage de b une valeur que $\varphi(u)$ reprend $(m + 1)$ fois au moins. Dans l'entourage de chaque valeur a, on peut donc trouver une autre valeur b que $\varphi(u)$ reprend au moins un nombre donné de fois.

Donc, si l'équation

$$G[\varphi(u),\ \varphi(v),\ \varphi(u + v)] = 0$$

est du degré m par rapport à $\varphi(u + v)$ et que l'on choisisse $(m + 1)$ points $v_1, \ldots, v_{m+1}$, dans lesquels $\varphi(v)$ reprend la même valeur a, l'équation en z

$$G[\varphi(u),\ a,\ z] = 0$$

aura pour racines

$$\begin{array}{l} \varphi_1(u + v_1),\ \ldots,\ \varphi_1(u + v_{m+1}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(u + v_1),\ \ldots,\ \varphi_n(u + v_{m+1}). \end{array}$$

Par conséquent, le nombre des racines différentes ne pouvant dépasser m, on aura pour chaque valeur donnée de u une égalité de la forme

$$\varphi_\alpha(u + v_\gamma) = \varphi_\beta(u + v_\delta) \qquad (\gamma \gtrless \delta)$$

ce qui, le nombre de ces combinaisons étant fini, ne peut être que si une au moins de ces égalités est une identité. Mais d'une identité

$$\varphi_\alpha(u + 2\omega) = \varphi_\beta(u),$$

c'est-à-dire de l'identité d'un des éléments de $\varphi(2\omega + u)$ à un point quelconque avec l'un des éléments de $\varphi(u)$ au même point, on conclut que les fonctions de u $\varphi(2\omega + u)$ et $\varphi(u)$ sont identiques, c'est-à-dire que $\varphi(u)$ a la période 2ω.

Soit maintenant 2ω une période de $\varphi(u)$ telle, qu'il n'y ait pas de période de la forme $2\mu\omega$, $\mu =$ une quantité réelle plus petite que l'unité. Cette période existe. Soit de plus $z = e^{\frac{\pi i u}{\omega}}$. Les fonctions symétriques élémentaires de $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u)$ sont des fonctions analytiques uniformes de z, qui n'ont que deux points singuliers essentiels au plus, $z = 0$ et $z = \infty$, et l'on voit, comme ci-dessus, que si la fonction $\varphi(u)$ n'est pas algébrique en z, elle reprend la même valeur pour $(m + 1)$ valeurs de z et par conséquent pour $(m + 1)$ valeurs de u non-équivalentes par rapport à la période 2ω. De là on conclut que $\varphi(u)$ a des périodes dont le rapport à 2ω n'est pas une quantité réelle.

Choisissons maintenant deux périodes quelconques 2ω, $2\omega'$ dont le rapport n'est pas une quantité réelle, et formons la fonction $\wp(u \mid \omega, \omega')$ appartenant à ces périodes: en posant $z = \wp(u \mid \omega, \omega')$, on voit aisément que $\varphi(u)$ est une fonction algébrique de z. Car de la définition de $\wp(u \mid \omega, \omega')$ il s'ensuit immédiatement que cette fonction est une fonction doublement périodique, aux périodes élémentaires 2ω, $2\omega'$, et qui n'a pas, à distance finie, de singularité essentielle. Par conséquent, comme $\wp(u)$ a un infini double dans le parallélogramme des périodes, on conclut que, dans chaque parallélogramme élémentaire, il y a deux points, distincts ou coïncidants, où cette fonction acquiert une valeur donnée quelconque. Et, lorsque z est situé dans l'entourage d'un point z_0 quelconque, fini ou infini, chacune des deux valeurs correspondantes de u non-équivalentes par rapport aux périodes a le caractère d'une fonction algébrique de z. Donc $\varphi(u)$ considéré comme fonction de z a aussi le caractère d'une fonction algébrique dans l'entourage de tout point z_0 (fini ou infini), et de plus cette fonction ne peut avoir qu'un nombre fini de valeurs pour chaque valeur de z.

Mais de là on peut conclure que $\varphi(u)$ est une fonction algébrique de z.