ZUR THEORIE DER ELIMINATION

VON

E. NETTO

in BERLIN.

Herr J. MOLK hat in seiner schönen Abhandlung: *Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité* etc. (Acta mathematica, Bd. 6), durch welche er sich das Verdienst erworben hat, einen Teil der fundamentalen KRONECKER'schen Untersuchungen in ausgeführter Darstellung zu geben, eines Satzes Erwähnung getan, den ich ihm gelegentlich mitteilte. Er findet sich Cap. IV, § 1, Nr. 6 seiner Arbeit; die Anführung meines Namens daselbst giebt mir Veranlassung, das Theorem hier mitzuteilen. In geometrischer Ausdrucksweise lautet dasselbe: *Geht eine algebraische Curve $F(x, y) = 0$ durch sämtliche Schnittpunkte zweier anderer algebraischen Curven $f(x, y) = 0$, $f_1(x, y) = 0$, dann ist eine Potenz der Function $F(x, y)$ als lineare homogene Function von $f(x, y)$ und $f_1(x, y)$ darstellbar, d. h. es wird*

$$F(x, y)^n = f(x, y) \cdot g(x, y) + f_1(x, y) \cdot g_1(x, y),$$

wo die g, g_1 wie f, f_1, F ganze Functionen von x, y bedeuten.

In der bequemen KRONECKER'schen Schreibweise heisst dies:

$$F(x, y)^n \equiv 0; \qquad [\mathrm{mod}\,(f(x, y),\ f_1(x, y))].$$

Wir setzen, ohne der Allgemeinheit zu schaden, voraus, dass f, f_1 keinen gemeinsamen Teiler haben.

Nehmen wir zuerst die lineare Substitution

$$\xi = \alpha x + \beta y, \qquad \eta = \gamma x + \delta y$$

mit unbestimmten Coefficienten vor, und führen dadurch f, f_1 in $\varphi(\xi, \eta)$, $\varphi_1(\xi, \eta)$ über, dann kann man es durch passende Wahl von α, β, γ, δ bewirken, dass die beiden Eliminationsresultanten für $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$ nämlich $R_1(\xi) = 0$, $R_2(\eta) = 0$ nur für die vielfachen Schnittpunkte von φ, φ_1 vielfache Wurzeln besitzen und zwar genau in der Multiplicität der entsprechenden Schnittpunkte. Sind also ξ_1, η_1; ξ_2, η_2; ...; ξ_k, η_k sämtliche von einander verschiedene Wertsysteme, welche gleichzeitig $\varphi(\xi, \eta) = 0$, $\varphi_1(\xi, \eta) = 0$ befriedigen, dann wird

$$(1)\qquad \begin{aligned} R_1(\xi) &= (\xi - \xi_1)^{\mu_1}(\xi - \xi_2)^{\mu_2} \dots (\xi - \xi_k)^{\mu_k} \\ R_2(\eta) &= (\eta - \eta_1)^{\mu_1}(\eta - \eta_2)^{\mu_2} \dots (\eta - \eta_k)^{\mu_k}, \end{aligned}$$

und μ_α giebt die Multiplicität von ξ_α, η_α an.

Führen wir ferner eine neue Variable u durch die Substitution

$$u = \sigma\xi + \tau\eta$$

mit willkürlichem, unbestimmten σ und mit $\tau = 1$ an die Stelle von η ein, und setzen dementsprechend $u_\alpha = \sigma\xi_\alpha + \tau\eta_\alpha$, so mögen $\varphi(\xi, \eta)$, $\varphi_1(\xi, \eta)$ weiter in $\tilde{\omega}(\xi, u)$, $\tilde{\omega}_1(\xi, u)$ übergehen. Die Resultante dieser beiden Ausdrücke liefert dann bei der Elimination von ξ eine Function, welche durch Specialisirung in die beiden Formen (1) gebracht werden kann, und die folglich die Form hat

$$(2)\qquad \begin{aligned} R(u) &= \tilde{\omega}(\xi, u).h(\xi, u) + \tilde{\omega}_1(\xi, u).h_1(\xi, u) \\ &= (u - u_1)^{\mu_1}(u - u_2)^{\mu_2} \dots (u - u_k)^{\mu_k}. \end{aligned}$$

Hebt man den Factor $(u - u_\alpha)^{\mu_\alpha}$ hervor, so kann man setzen

$$(u - u_\alpha)^{\mu_\alpha} S_\alpha(u) = R(u) \equiv 0; \qquad [\mathrm{mod}\,(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_1)]$$

und daher, wenn man auf die Variablen ξ, η zurückgeht,

$$3)\qquad [\sigma(\xi - \xi_\alpha) + \tau(\eta - \eta_\alpha)]^{\mu_\alpha}.\prod_\beta [\sigma(\xi - \xi_\beta) + \tau(\eta - \eta_\beta)]^{\mu_\beta} \equiv 0; \quad [\mathrm{mod}\,(\varphi, \varphi_1)]$$

$$(\beta = 1, 2, \dots, \alpha - 1, \alpha + 1, \dots, k).$$

Da σ willkürlich ist, müssen in der Entwickelung von (3) die Coefficienten der einzelnen Potenzen von σ einzeln congruent Null mod (φ, φ_1) sein. Die höchste Potenz liefert unmittelbar

$$(4_a) \qquad (\xi - \xi_a)^{\mu_a} P_a \equiv 0; \qquad P_a = \prod_{\beta} (\xi - \xi_\beta)^{\mu_\beta},$$

wobei also P_a für alle $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ mit Ausnahme von ξ_a verschwindet.

Vergleicht man ferner die Coefficienten der nächst hohen Potenz von σ auf beiden Seiten der Congruenz (3) so folgt

$$\mu_a (\xi - \xi_a)^{\mu_a - 1} (\eta - \eta_a) P_a + (\xi - \xi_a)^{\mu_a} \sum_{\beta} \mu_\beta \frac{\eta - \eta_\beta}{\xi - \xi_\beta} P_a \equiv 0,$$

und daraus durch Multiplication mit $\Pi(\xi - \xi_\beta)$ und unter Berücksichtigung von (4_a)

$$(4_b) \qquad (\xi - \xi_a)^{\mu_a - 1} (\eta - \eta_a) . P'_a \equiv 0; \qquad P'_a = \prod_{\beta} (\xi - \xi_\beta)^{\mu_\beta + 1}.$$

Sucht man weiter den Coefficienten von τ^2 auf, so findet sich

$$\frac{\mu_a(\mu_a - 1)}{1.2} (\xi - \xi_a)^{\mu_a - 2} (\eta - \eta_a)^2 P_a + \mu_a (\xi - \xi_a)^{\mu_a - 1} (\eta - \eta_a) \sum_{\beta} \mu_\beta \frac{\eta - \eta_\beta}{\xi - \xi_\beta} P_a$$

$$+ (\xi - \xi_a)^{\mu_a} \left[\sum_{\beta} \frac{\mu_\beta(\mu_\beta - 1)}{1.2} \left(\frac{\eta - \eta_\beta}{\xi - \xi_\beta} \right)^2 + \sum_{\beta, \gamma} \mu_\beta \mu_\gamma \frac{(\eta - \eta_\beta)(\eta - \eta_\gamma)}{(\xi - \xi_\beta)(\xi - \xi_\gamma)} \right] P_a \equiv 0$$

und daraus durch Multiplication mit $\Pi(\xi - \xi_\beta)^2$ und unter Berücksichtigung von (4_a) und (4_b)

$$(4_c) \qquad (\xi - \xi_a)^{\mu_a - 2} (\eta - \eta_a)^2 . P''_a \equiv 0; \qquad P''_a = \prod_{\beta} (\xi - \xi_\beta)^{\mu_\beta + 2}.$$

In genau derselben Art findet man allgemein

$$(4) \qquad \begin{aligned} &(\xi - \xi_a)^{\mu_a - \rho} (\eta - \eta_a)^\rho . P_a^{(\rho)} \equiv 0; \qquad [\bmod (\varphi, \varphi_1)] \\ &P_a^{(\rho)} = \prod_{\beta} (\xi - \xi_\beta)^{\mu_\beta + \rho}, \end{aligned}$$

wobei also $P_a^{(\rho)}$ für $\xi = \xi_a$ nicht verschwindet.

Nachdem dieser Hülfssatz bewiesen ist, nehmen wir eine Curve $\Phi = 0$, welche durch die sämtlichen Schnittpunkte von $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$

geht, oder eine Function $\Phi(\xi, \eta)$, die für alle Systeme $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2; \ldots; \xi_k, \eta_k$ verschwindet, welche $\varphi(\xi, \eta) = 0$, $\varphi_1(\xi, \eta) = 0$ gleichzeitig befriedigen. Dann ist

$$(5) \qquad \Phi(\xi, \eta) = (\xi - \xi_a)\Psi(\xi, \eta) + (\eta - \eta_a)\Psi_1(\xi, \eta),$$

und durch Erhebung in die μ_a^{te} Potenz und Multiplication mit $P^{(\mu_a)}$ findet man

$$(6) \qquad \Phi(\xi, \eta)^{\mu_a} . P^{(\mu_a)} \equiv 0; \qquad [\mathrm{mod}\,(\varphi, \varphi_1)].$$

Es bezeichne nun μ den höchsten der Exponenten $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, dann kann natürlich in (6) μ_a durch μ ersetzt werden; multiplicirt man ferner mit einer noch unbestimmten Grösse u_a und summirt über $\alpha = 1, 2, \ldots, k$, so ergiebt sich

$$(7) \qquad \Phi(\xi, \eta)^{\mu}[u_1 P_1 + u_2 P_2 + \ldots + u_k P_k] \equiv 0; \qquad [\mathrm{mod}\,(\varphi, \varphi_1)].$$

In dieser Congruenz kann die Klammer, welche ausser von den unbestimmten Grössen nur von ξ abhängt, für keinen Wert dieser Variablen verschwinden. Folglich lassen sich die u als Functionen von ξ so wählen, dass der Wert der Klammer gleich einer Constanten, z. B. gleich Eins wird. Es entsteht also das zu beweisende Resultat

$$\Phi(\xi, \eta)^{\mu} \equiv 0; \qquad [\mathrm{mod}\,(\varphi, \varphi_1)]$$

mit dem Zusatze, *dass die Potenz, welche ausreicht, um die geforderte Darstellung zu ermöglichen, gleich der höchsten bei den Schnittpunkten auftretenden Multiplicität sein wird.*

Berlin, März 1885.